



Resistencia de Materiales

CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN Y ROTURA

CONTENIDO DE LA ASIGNATURA

- BLOQUE TEMÁTICO:** ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES
- CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD Y LA RESISTENCIA DE MATERIALES
 - CAPÍTULO 2: EL SÓLIDO ELÁSTICO.
 - CAPÍTULO 3: CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN Y DE ROTURA**
 - CAPÍTULO 4: RESISTENCIA DE MATERIALES. CONCEPTOS BÁSICOS
 - CAPÍTULO 5: TRACCIÓN Y COMPRESIÓN
 - CAPÍTULO 6: FLEXIÓN PLANA ELÁSTICA.
 - CAPÍTULO 7: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO PLÁSTICO
 - CAPÍTULO 8: FLEXO-COMPRESIÓN DESVIADA
 - CAPÍTULO 9: TORSIÓN
 - CAPÍTULO 10: POTENCIAL ELÁSTICO DE BARRAS. MÉTODOS ENERGÉTICOS
 - CAPÍTULO 11: INESTABILIDAD DE BARRAS PRISMÁTICAS. PANDEO

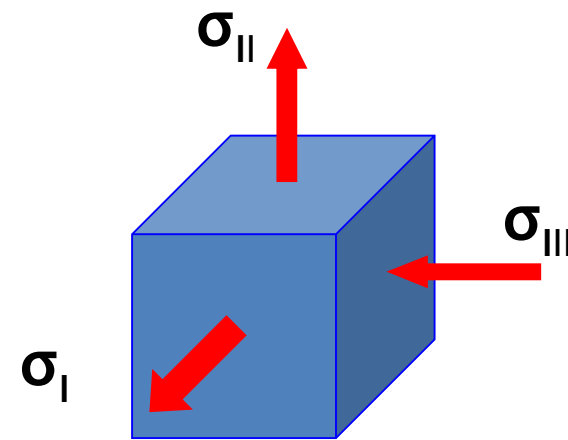


Resistencia de Materiales

CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN Y ROTURA

- Introducción.
- Representación en el espacio de tensiones principales. Superficies de fallo
- Comportamiento dúctil vs. comportamiento frágil.
- Tensión equivalente. Coeficiente de seguridad. Tensión de trabajo.
- Criterio de Rankine-Lamé.
- Criterio de Saint Venant-Poncelet.
- Criterio de Tresca-Guest.
- Criterio de Maxwell-Huber-Von Mises-Hencky-Nadai.
- Teoría de los estados límites.
- Representación gráfica de los Criterios de resistencia para estados de tensión plana

¿En qué momento
la combinación de tensiones
es suficiente para desencadenar
el proceso del fallo mecánico?



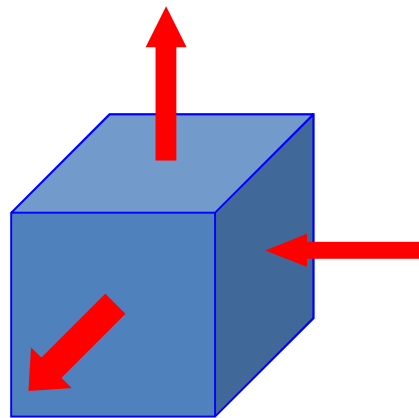
¿Cómo de grande es un tensor?

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

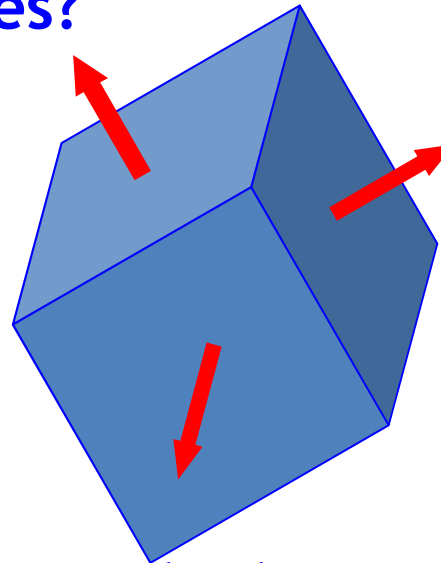
- ¿Tan grande como la mayor de sus componentes?
- ¿Tan grande como el mayor de sus autovalores?
- ¿Tan grande como su traza?
- ¿Tan grande como su determinante?
- ¿Tan grande como ...?

Entonces... ¿Cómo comparar dos estados de tensiones?

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$



¿ $\gg$?



¿Cómo predecir si un estado de tensión provocará el **fallo** de un dominio elástico?

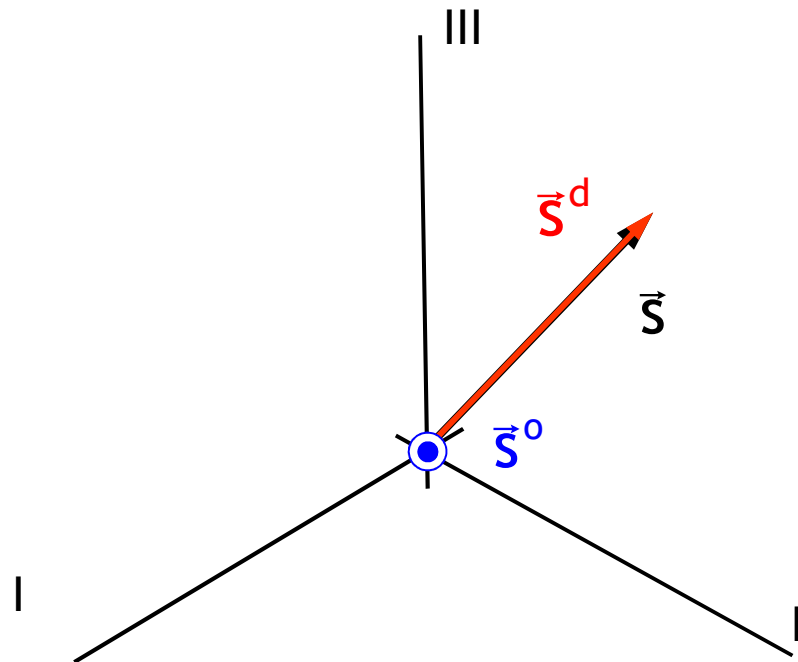
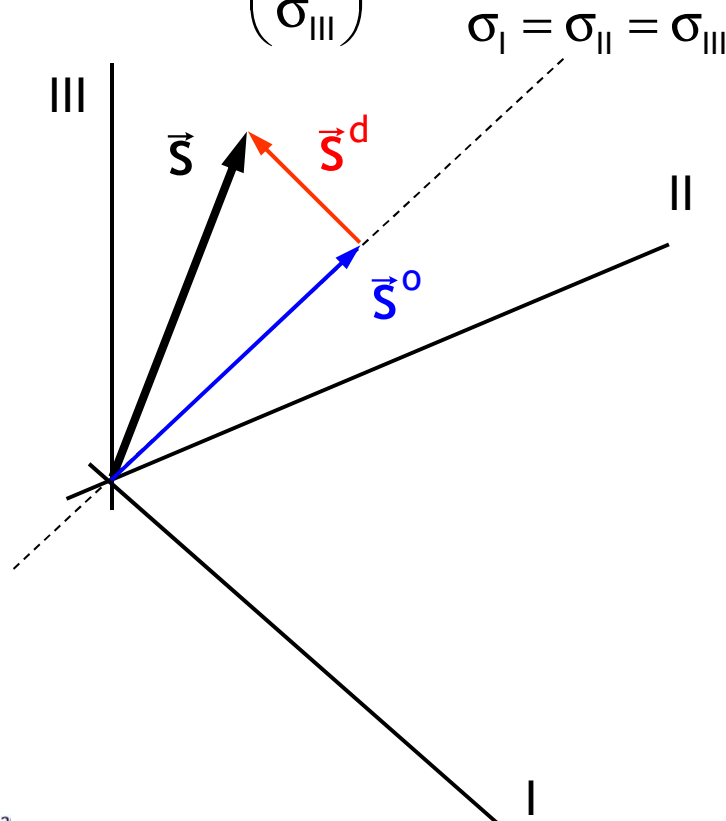


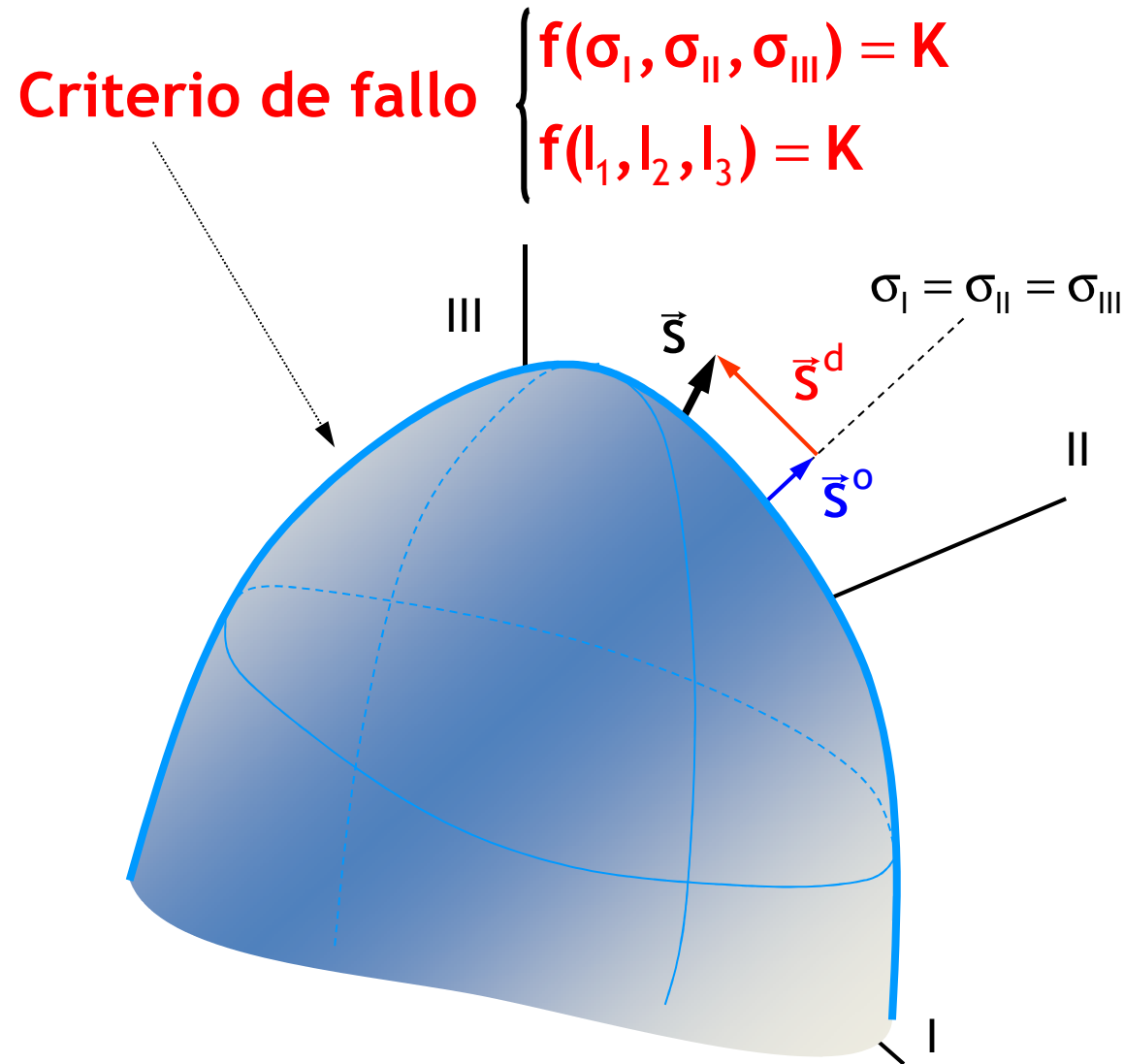
Representación en el espacio de tensiones principales (o de Haig-Westergaard)

Pseudovector

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} I_1/3 \\ I_1/3 \\ I_1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_I - I_1/3 \\ \sigma_{II} - I_1/3 \\ \sigma_{III} - I_1/3 \end{pmatrix} = \vec{s}^o + \vec{s}^d$$

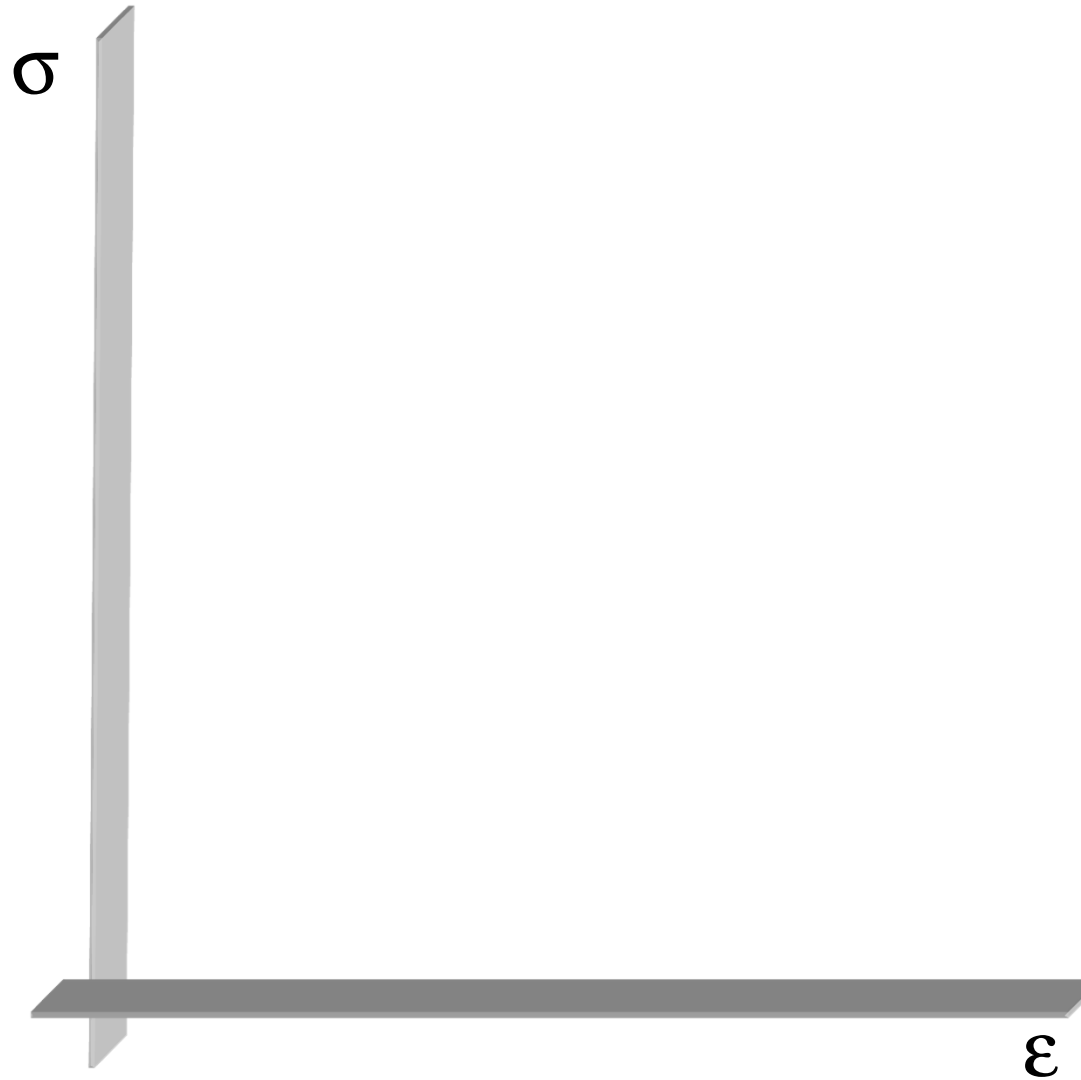




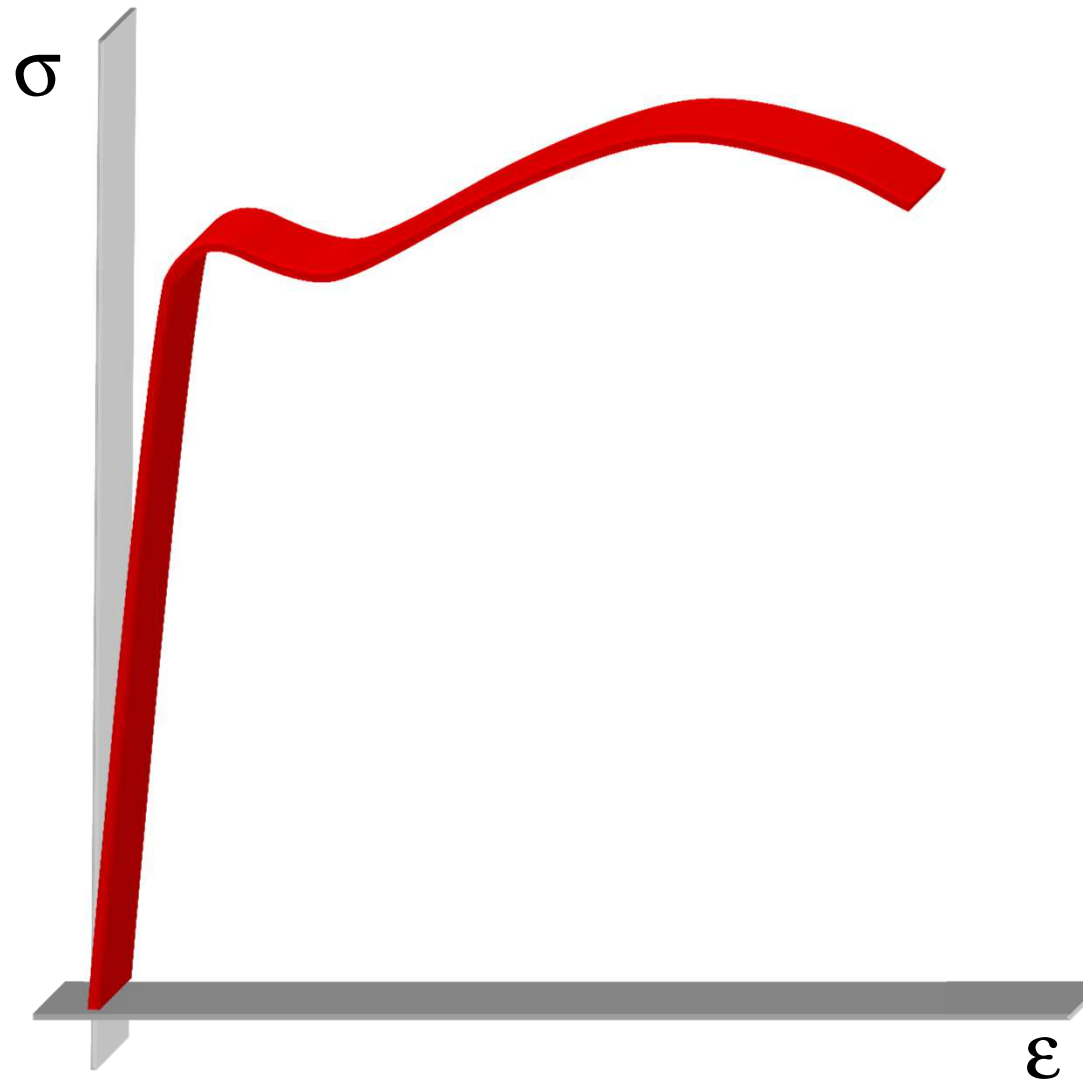
Tensi3n
equivalente
 $f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$

Superficie que separa los estados tensionales
permitidos de los no permitidos

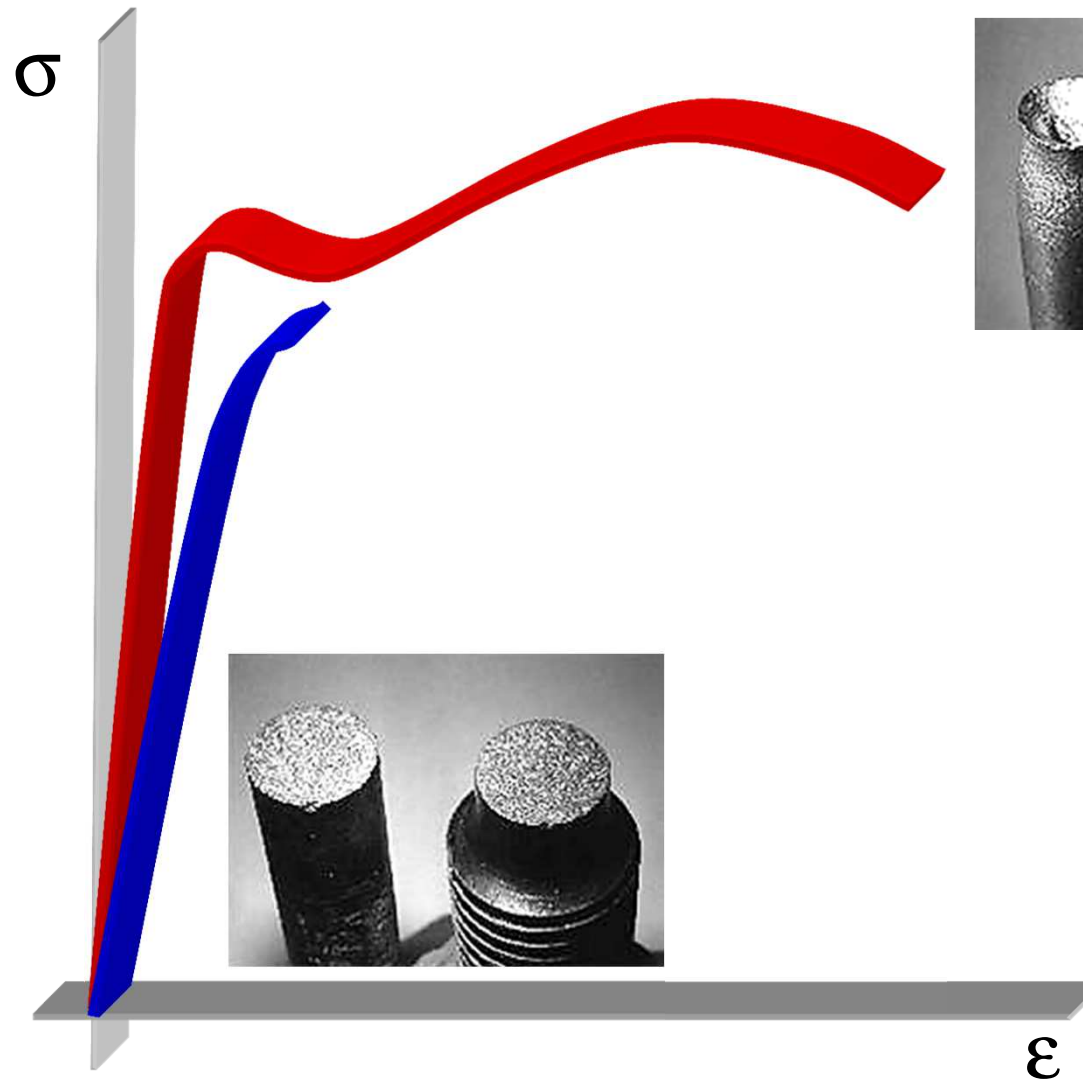
El fallo de todos los materiales no es igual !!!



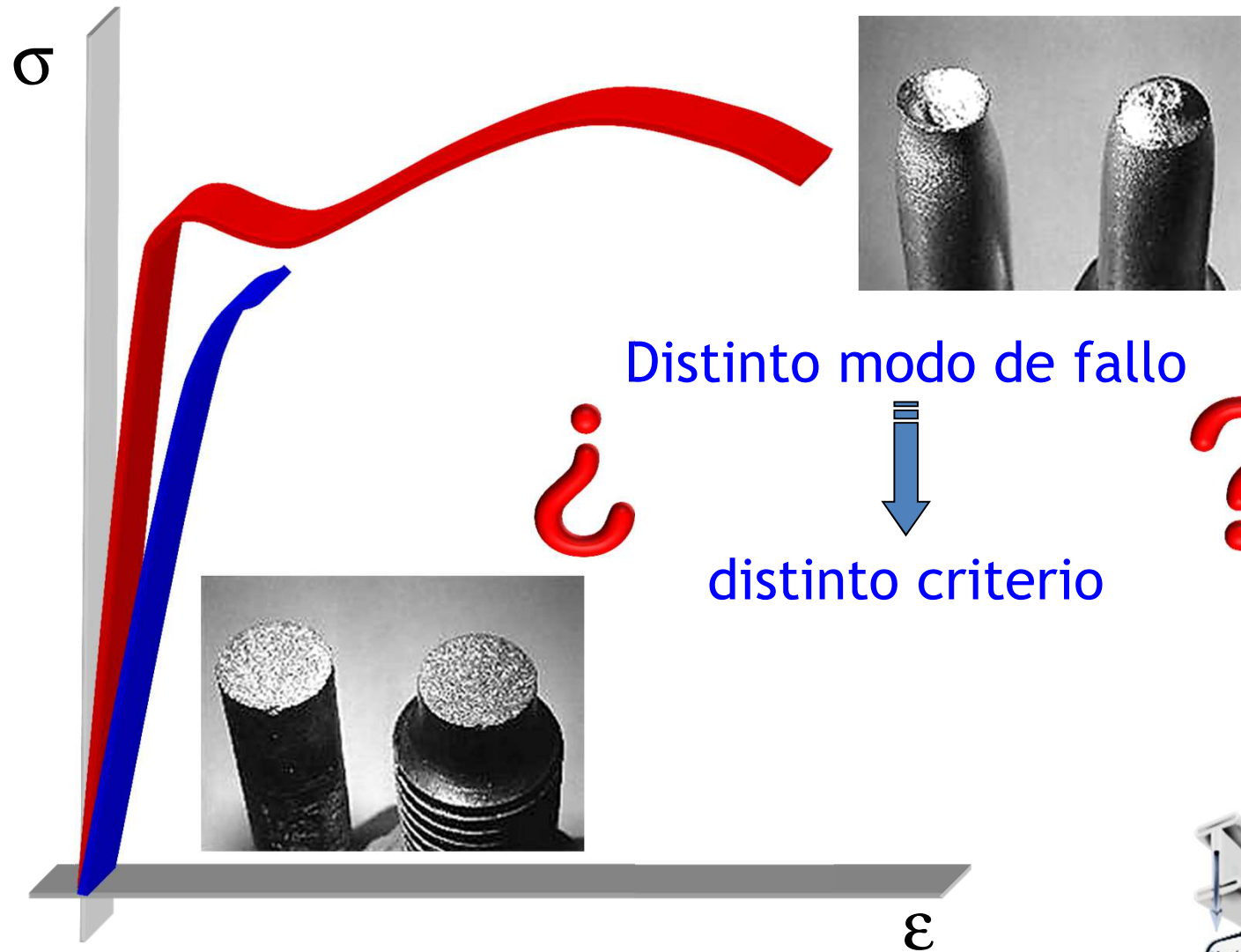
El fallo de todos los materiales no es igual !!!



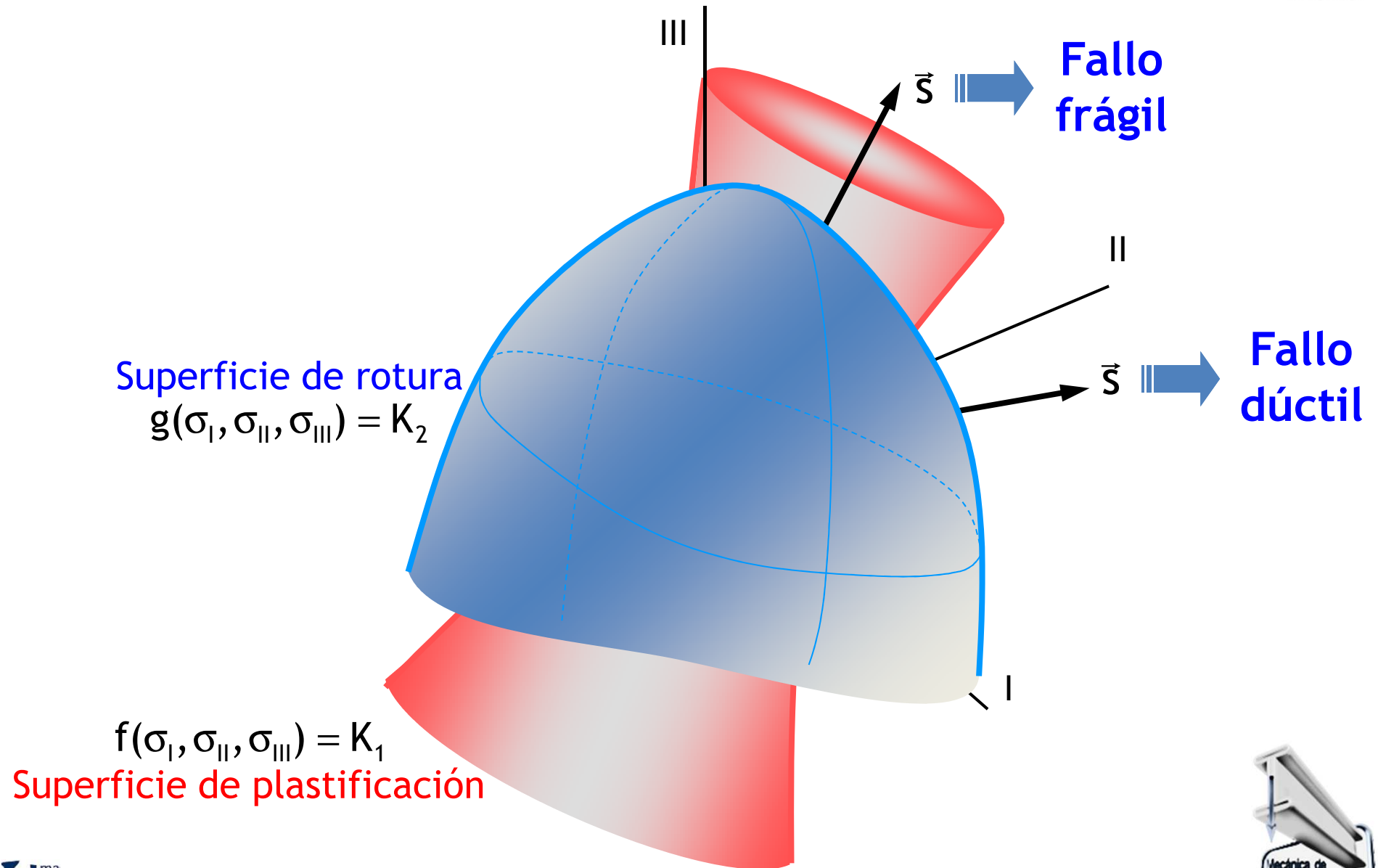
El fallo de todos los materiales no es igual !!!

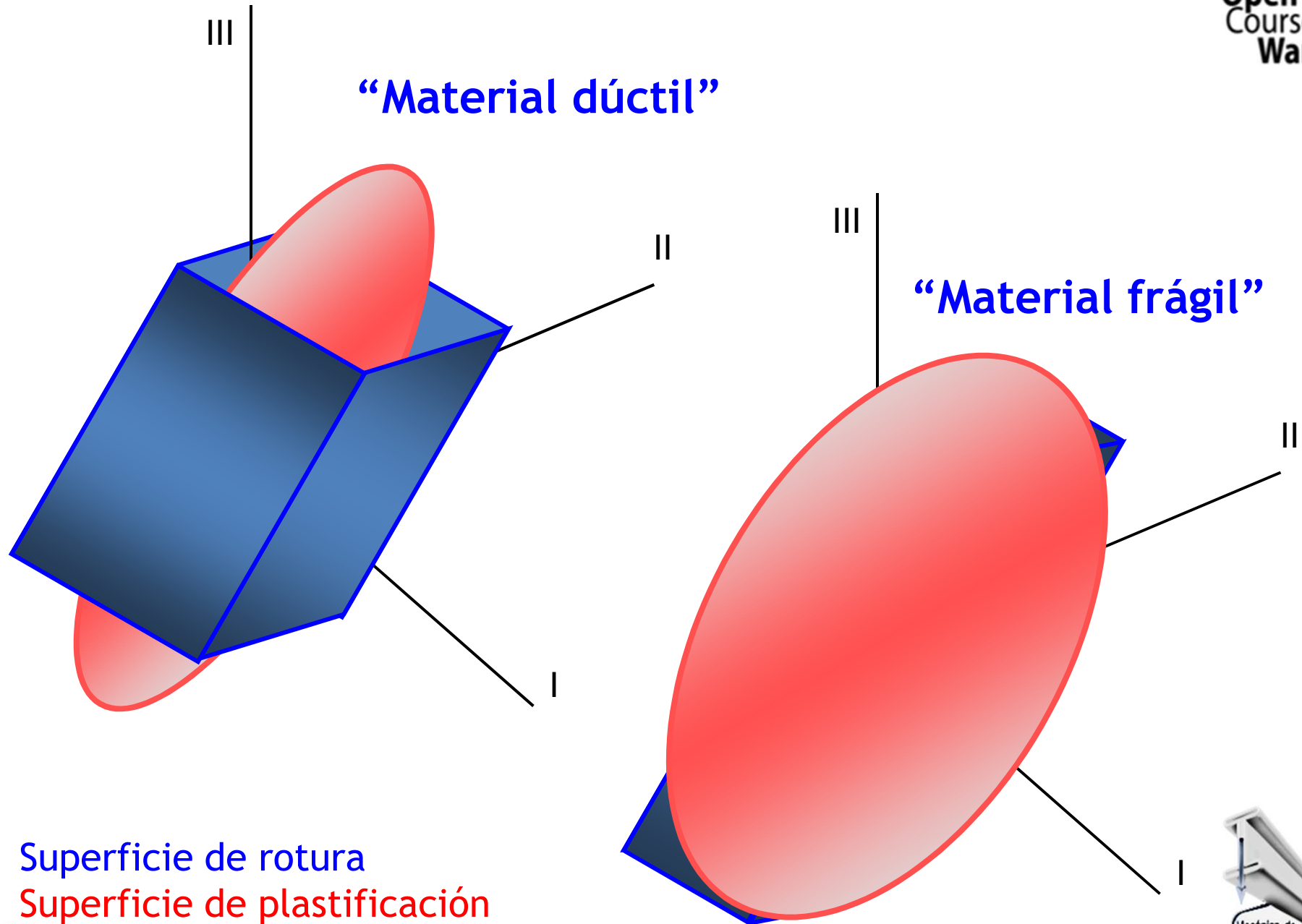


El fallo de todos los materiales no es igual !!!



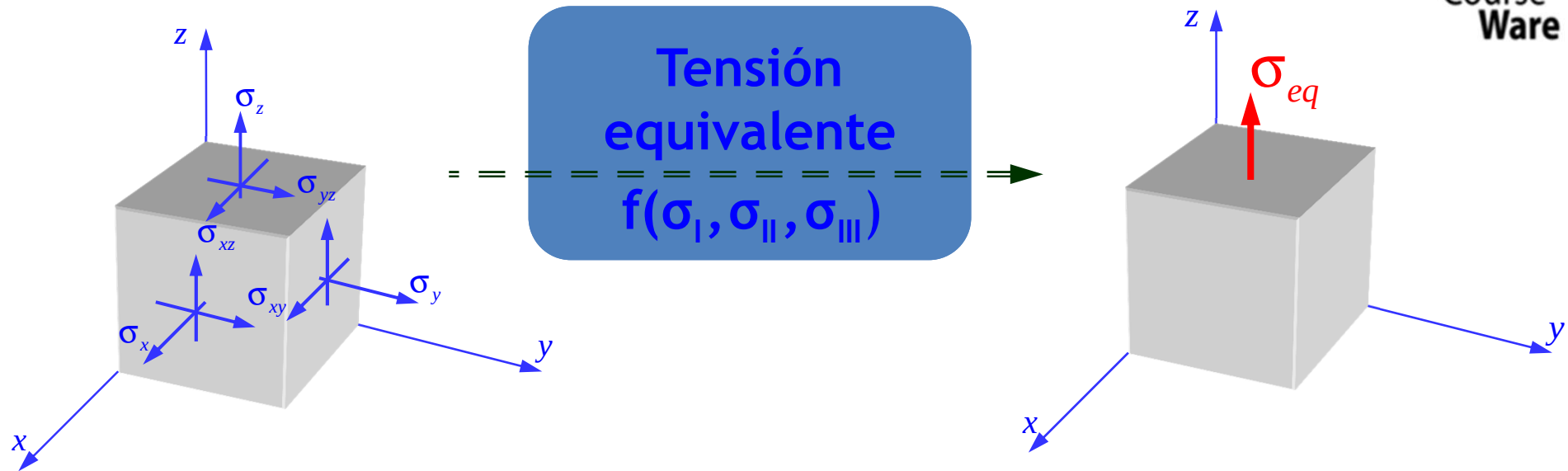
Fallo dúctil vs. Fallo frágil





Superficie de rotura

Superficie de plastificaci3n



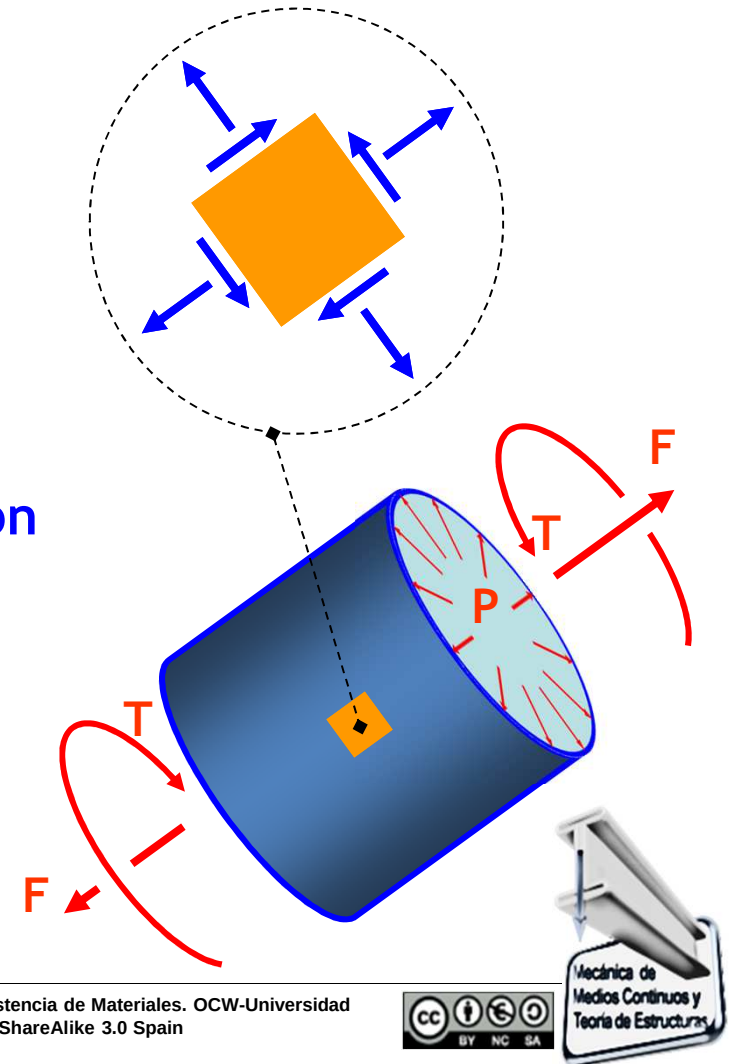
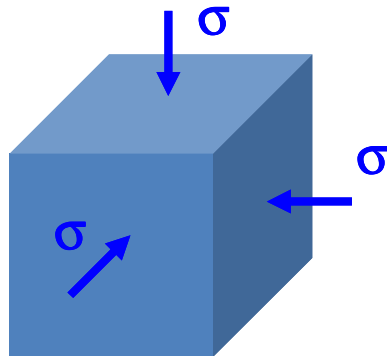
Tensión de trabajo $\rightarrow \sigma_T = \frac{\sigma_f}{m}$ $\leftarrow$ **Coeficiente de seguridad en tensiones**

Criterios de fallo

- Rankine-Lamé (1858)
- Saint Venant-Poncelet (1870)
- Tresca-Guest (1872)
- Beltrami-Haig (1885)
- Von Mises (1913)-Huber (1904)
- Estados límite de Möhr (1900)

Evidencias experimentales

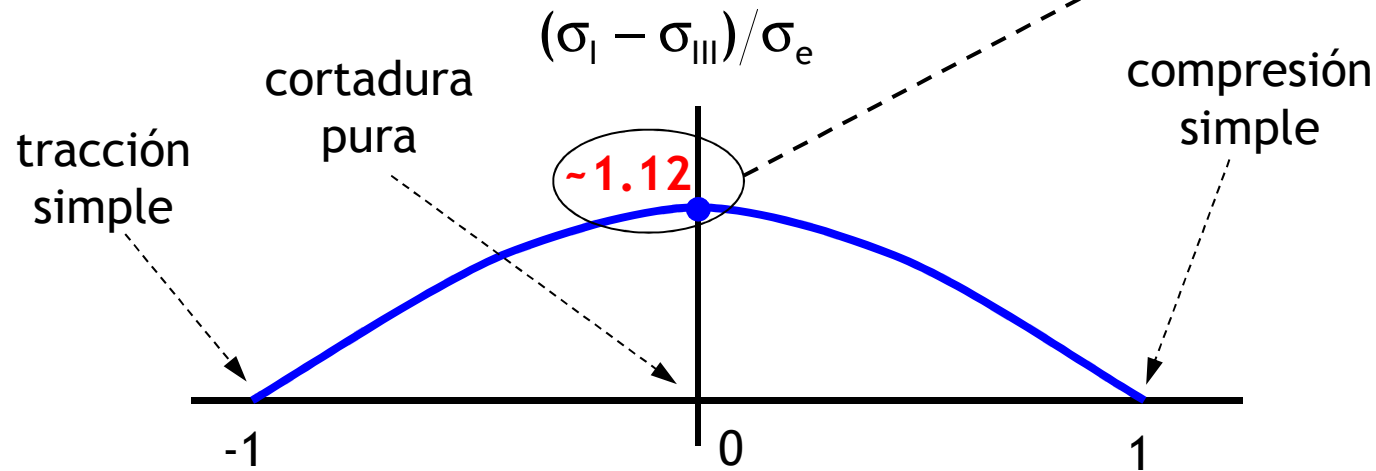
- Lode (1926): tracción + presión
- Taylor-Quinney (1931) tracción + torsión
- Ensayos de Bridgman (1945...)



Evidencias experimentales

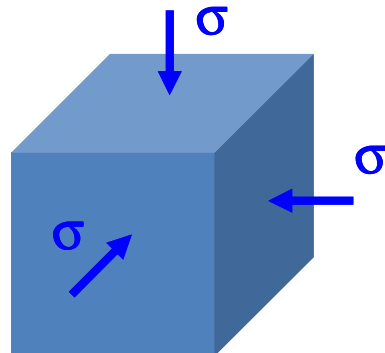
- Lode (1926): tracción + presión
- Taylor-Quinney (1931) tracción + torsión
- Ensayos de Bridgman (1945)

$$\tau \cong 0.56\sigma_e$$



parámetro de Lode
("forma" del estado tensional)

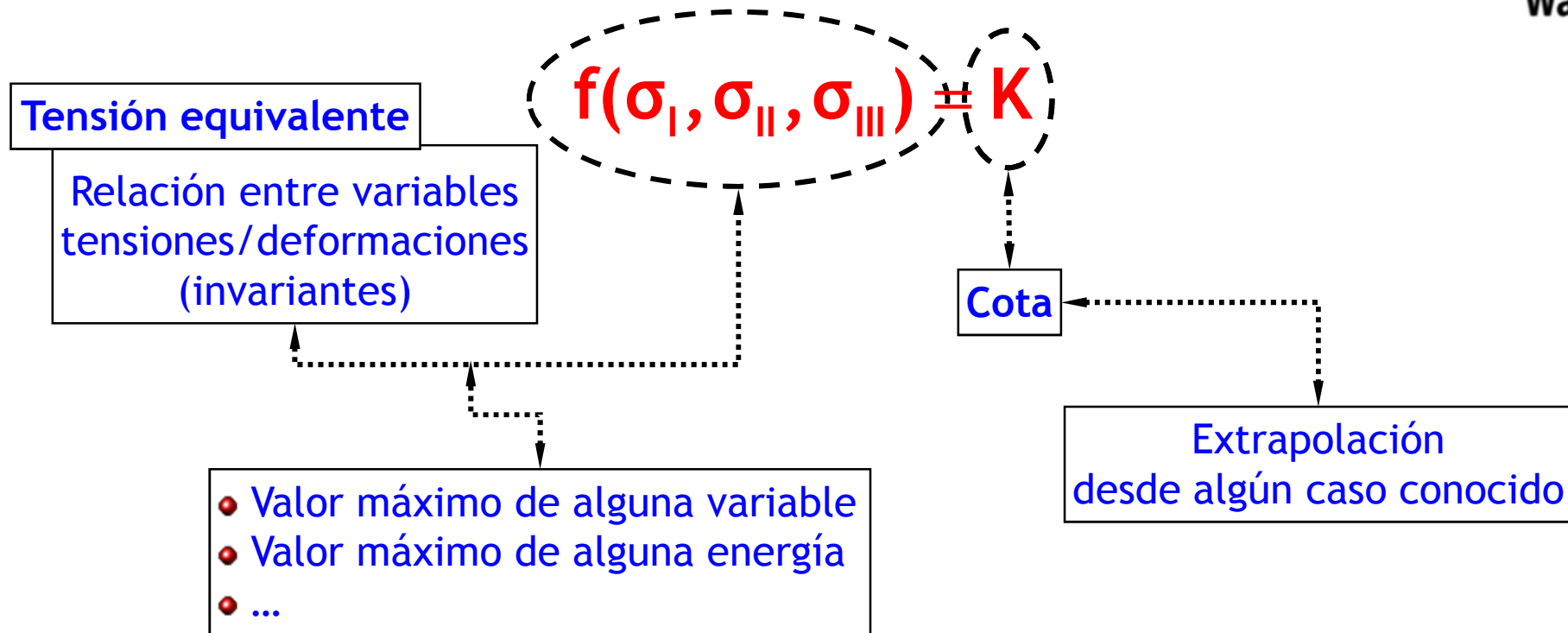
$$\mu = 2 \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{\sigma_I - \sigma_{III}} - 1$$



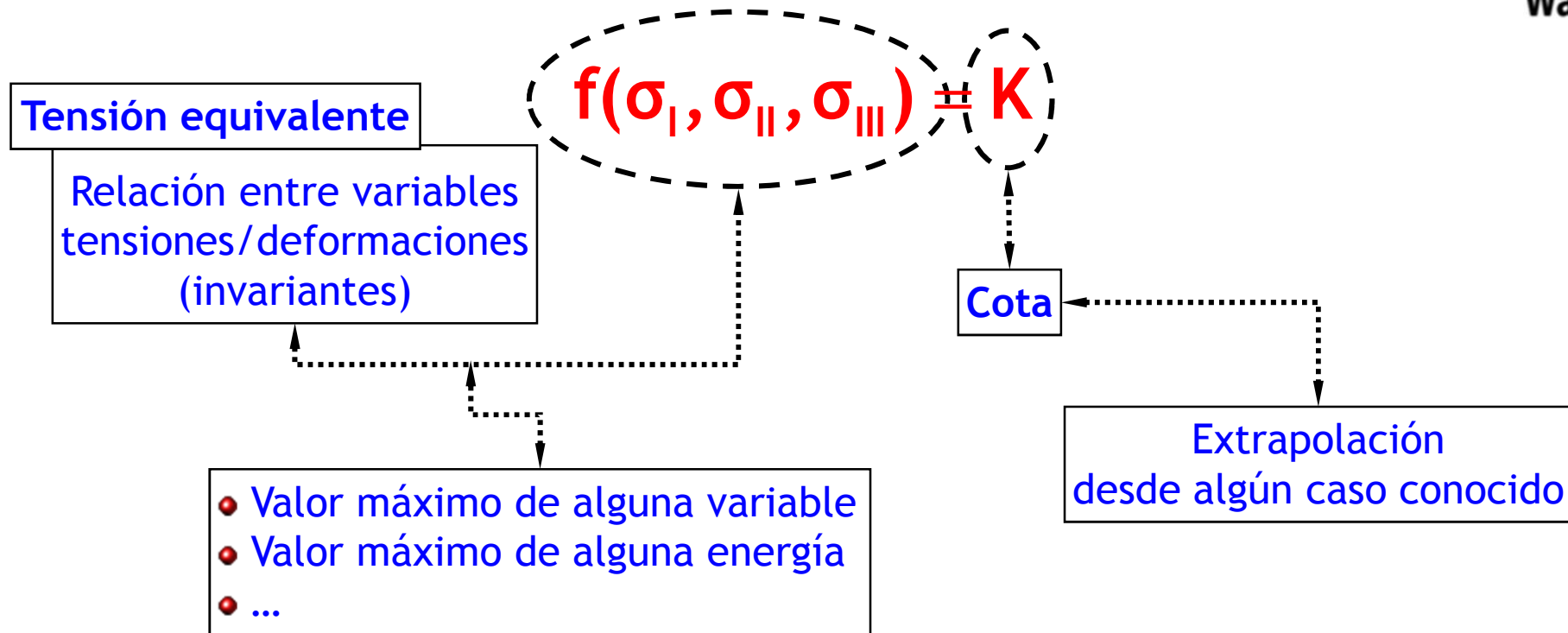
**PLASTIFICACIÓN
INDEPENDIENTE
DE LA PARTE ESFÉRICA**



Criterio de fallo



Criterio de fallo



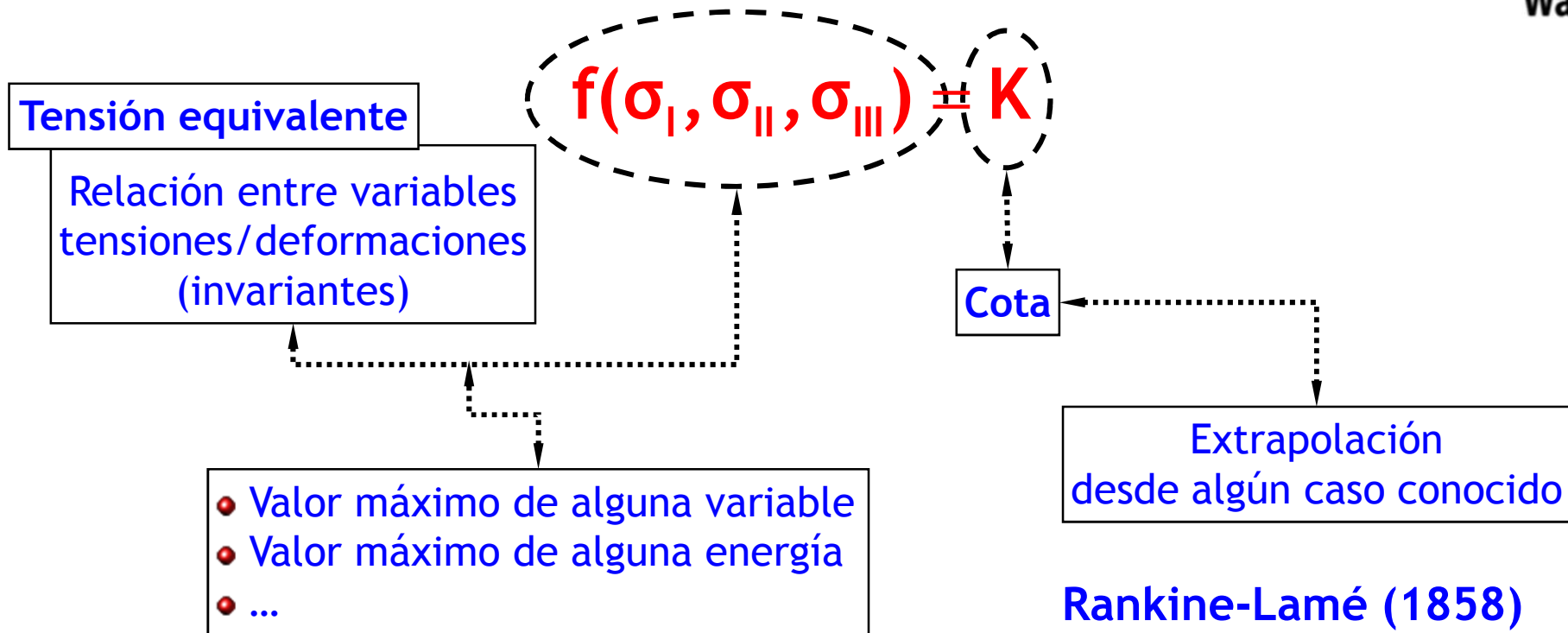
Ejemplo

Tensión equivalente = mayor de las tensiones principales

$$\sigma_{eqv} = \max\{\sigma_I, |\sigma_{III}|\}$$

Caso conocido: ensayo de tracción
plastificación cuando $\sigma = \sigma_e$

Criterio de fallo



Rankine-Lamé (1858)

$$\max\{\sigma_I, |\sigma_{III}|\} < \sigma_e$$

ó

$$|\sigma_I| < \sigma_e; |\sigma_{II}| < \sigma_e; |\sigma_{III}| < \sigma_e$$

Ejemplo

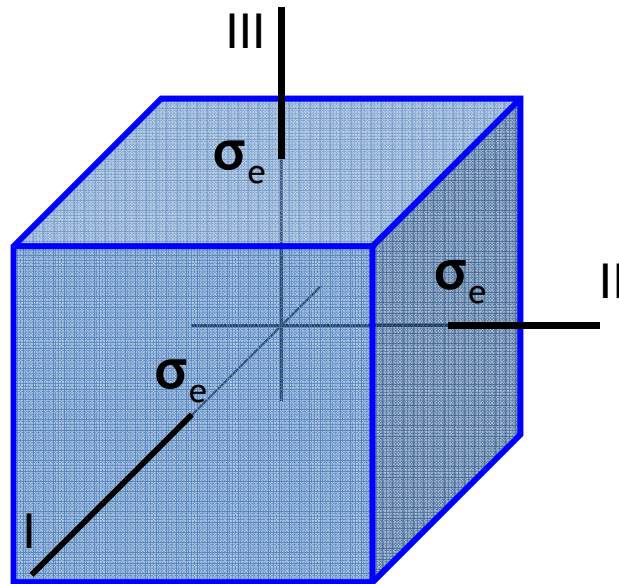
Tensión equivalente = mayor de las tensiones principales

$$\sigma_{eqv} = \max\{\sigma_I, |\sigma_{III}|\}$$

Caso conocido: ensayo de tracción
plastificación cuando $\sigma = \sigma_e$



Rankine-Lamé (1858)



$$\sigma_{eqv}^R = \max\{\sigma_I, |\sigma_{III}|\} < \sigma_e$$

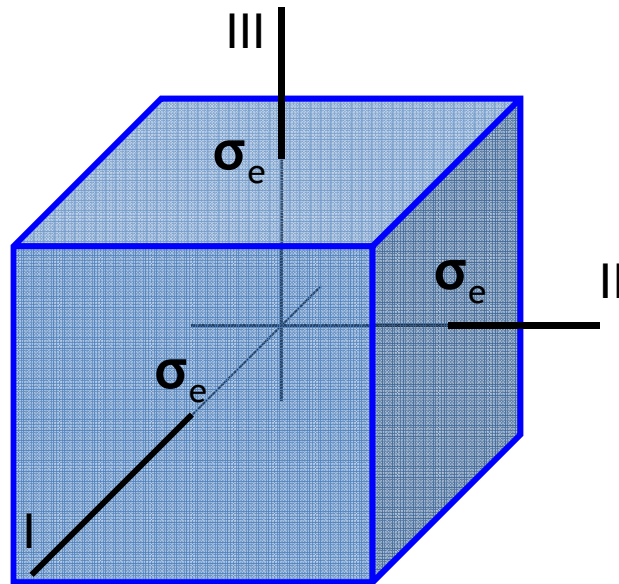
ó

$$|\sigma_I| < \sigma_e; |\sigma_{II}| < \sigma_e; |\sigma_{III}| < \sigma_e$$



Plastificación
función de I_1

Rankine-Lamé (1858)



$$\sigma_{eqv}^R = \max\left\{\sigma_I, |\sigma_{III}|\right\} < \sigma_e$$

ó

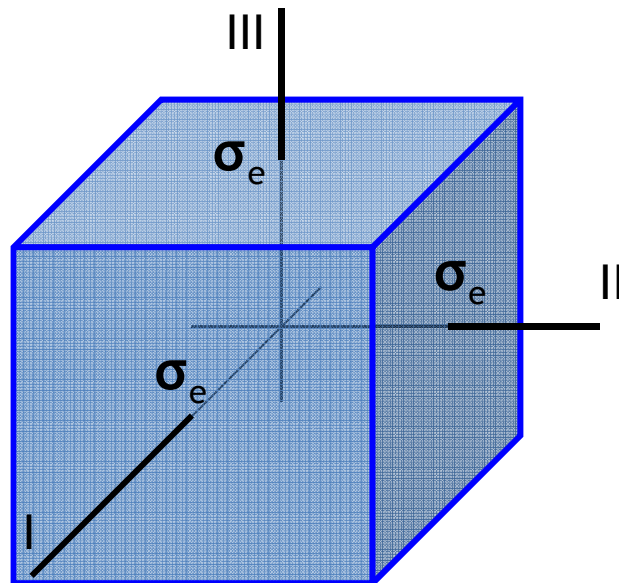
$$|\sigma_I| < \sigma_e; |\sigma_{II}| < \sigma_e; |\sigma_{III}| < \sigma_e$$



~~Plastificación
función de I_1~~

Resultados de Bridgman

Rankine-Lamé (1858)



$$\sigma_{eqv}^R = \max\{\sigma_I, |\sigma_{III}|\} < \sigma_e$$

ó

$$|\sigma_I| < \sigma_e; |\sigma_{II}| < \sigma_e; |\sigma_{III}| < \sigma_e$$

Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{eqv}^R = \max\{\tau, |-\tau|\} = \tau$$

Fallo: $\sigma_{eqv}^R = \sigma_e$

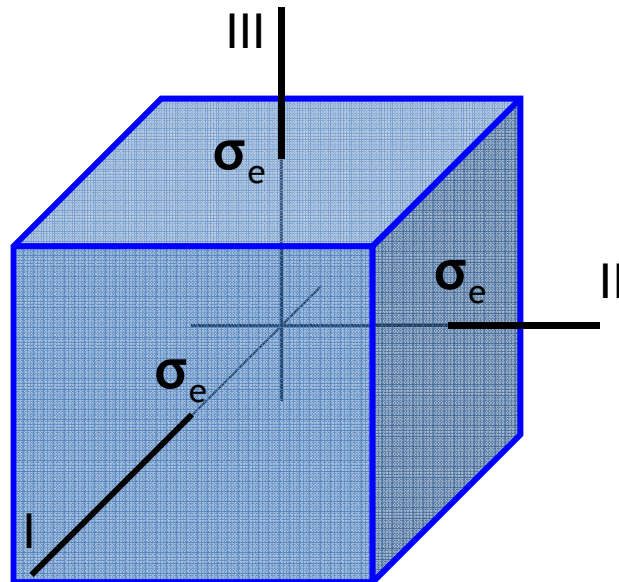
Fallo: $\tau = \sigma_e$

~~Plastificación
función de I_1~~

Resultados de Bridgman



Rankine-Lamé (1858)



$$\sigma_{eqv}^R = \max\{\sigma_I, |\sigma_{III}|\} < \sigma_e$$

ó

$$|\sigma_I| < \sigma_e; |\sigma_{II}| < \sigma_e; |\sigma_{III}| < \sigma_e$$

Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{eqv}^R = \max\{\tau, |-\tau|\} = \tau$$

Fallo: $\sigma_{eqv}^R = \sigma_e$

Resultados de Lode

~~Fallo: $\tau = \sigma_e$~~

~~Plastificación
función de I_1~~

Resultados de Bridgman

Saint Venant-Poncelet (1870)

“Tensión equivalente”
Mayor de las deformaciones principales

$$\max\{\epsilon_I, |\epsilon_{III}|\} < K \quad \longleftrightarrow \quad |\epsilon_I| < K; |\epsilon_{II}| < K; |\epsilon_{III}| < K$$

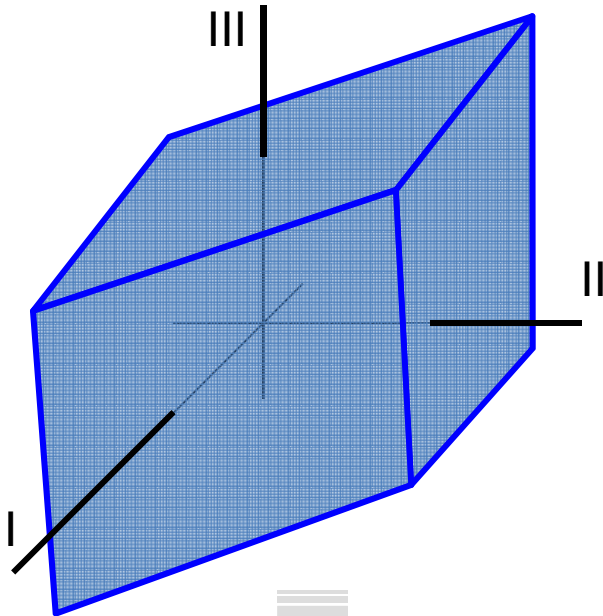
Comparando con el ensayo de tracción

$$\sigma_{eqv}^{SV} = \max\{\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}), |\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})|\} < \sigma_e$$



Saint Venant-Poncelet (1870)

$$\sigma_{eqv}^{SV} = \max\{\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}), |\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})|\} < \sigma_e$$



~~Plastificación
función de I_1~~

Resultados de Bridgman

Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

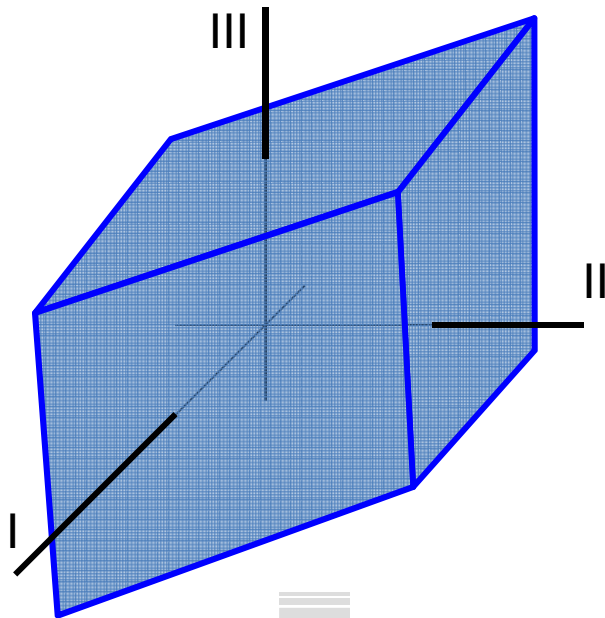
$$\sigma_{eqv}^{SV} = \max\{\tau - \nu(0 - \tau), |-\tau - \nu(0 + \tau)|\} = (1 + \nu)\tau$$

Fallo: $\tau = \frac{\sigma_e}{(1 + \nu)}$



Saint Venant-Poncelet (1870)

$$\sigma_{eqv}^{SV} = \max\{\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}), |\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})|\} < \sigma_e$$



Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{eqv}^{SV} = \max\{\tau - \nu(0 - \tau), |-\tau - \nu(0 + \tau)|\} = (1 + \nu)\tau$$

Fallo: $\tau = \frac{\sigma_e}{(1 + \nu)} = 0.77\sigma_e$

$$\nu = 0.3$$

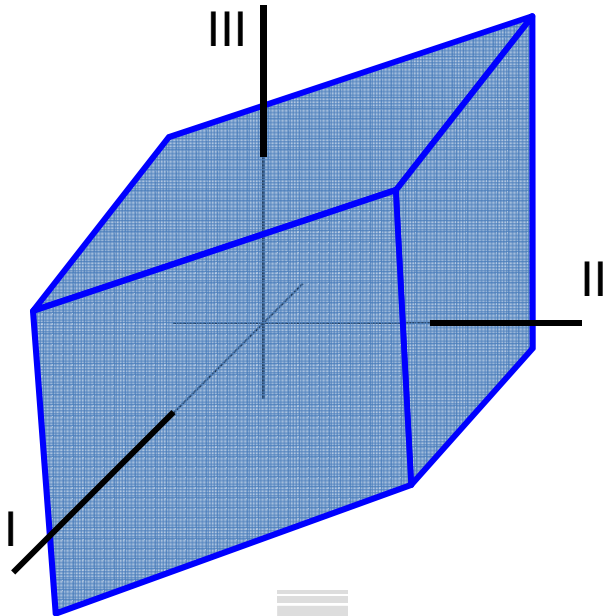
~~Plastificación
función de I_1~~

Resultados de Bridgman



Saint Venant-Poncelet (1870)

$$\sigma_{eqv}^{SV} = \max\{\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}), |\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})|\} < \sigma_e$$



Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{eqv}^{SV} = \max\{\tau - \nu(0 - \tau), |-\tau - \nu(0 + \tau)|\} = (1 + \nu)\tau$$

~~Plastificación
función de I_1~~

Resultados de Bridgman

Fallo:

$$\tau = \frac{\sigma_e}{(1 + \nu)} = \cancel{0.77\sigma_e}$$

Resultados de Lode

$$\nu = 0.3$$



Tresca-Guestt (1872)

Tensión equivalente
máxima de las tensiones tangenciales

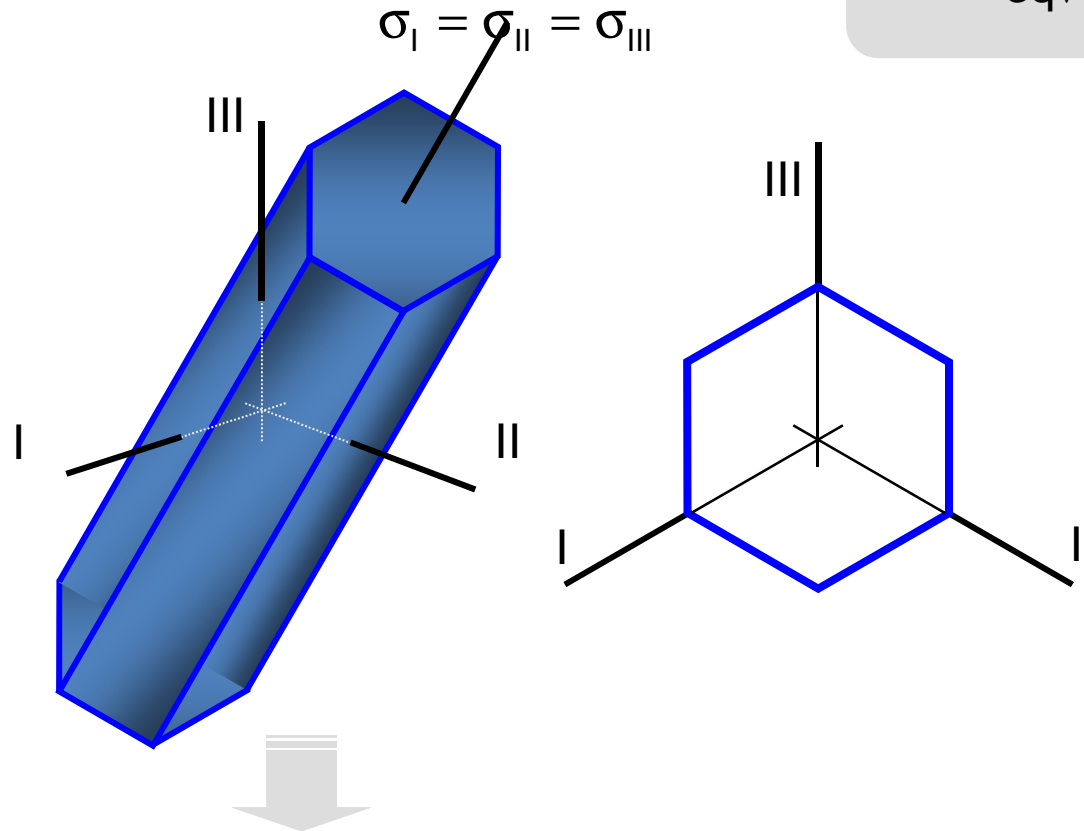
$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} < K \quad \longleftrightarrow \quad \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right| < K; \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right| < K; \left| \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right| < K$$

Comparando con el ensayo de tracción

$$\sigma_{eqv}^T = \sigma_I - \sigma_{III} < \sigma_e$$

Tresca-Guestt (1872)

$$\sigma_{\text{eqv}}^T = \sigma_I - \sigma_{III} < \sigma_e$$



Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\text{eqv}}^T = \tau - (-\tau) = 2\tau$$

Fallo: $\tau = 0.5\sigma_e$

Resultados de Lode $\tau \cong 0.56\sigma_e$

**Plastificación
INDEPENDIENTE de I_1**

Resultados de Bridgman

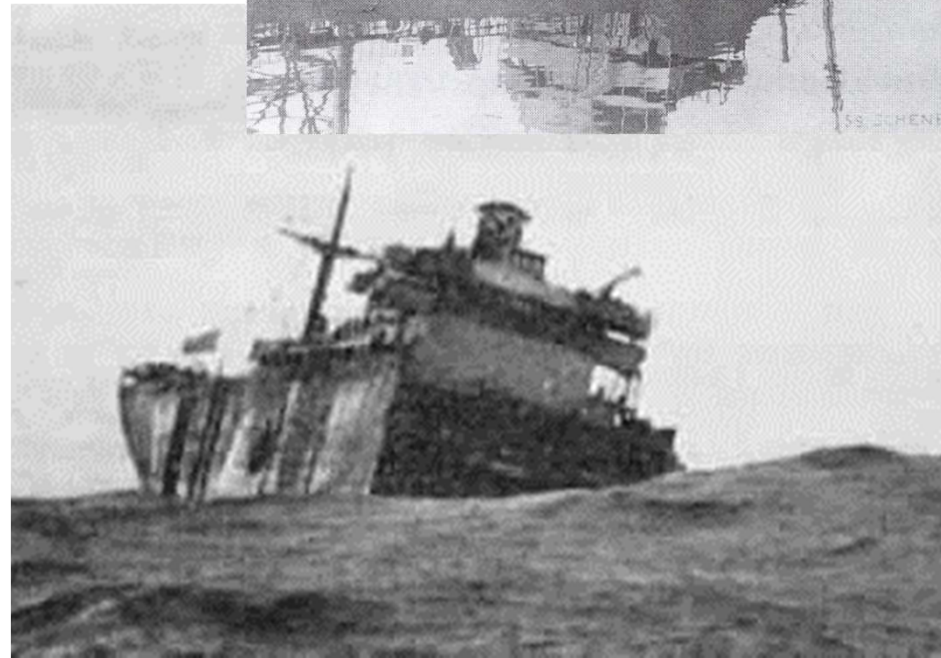
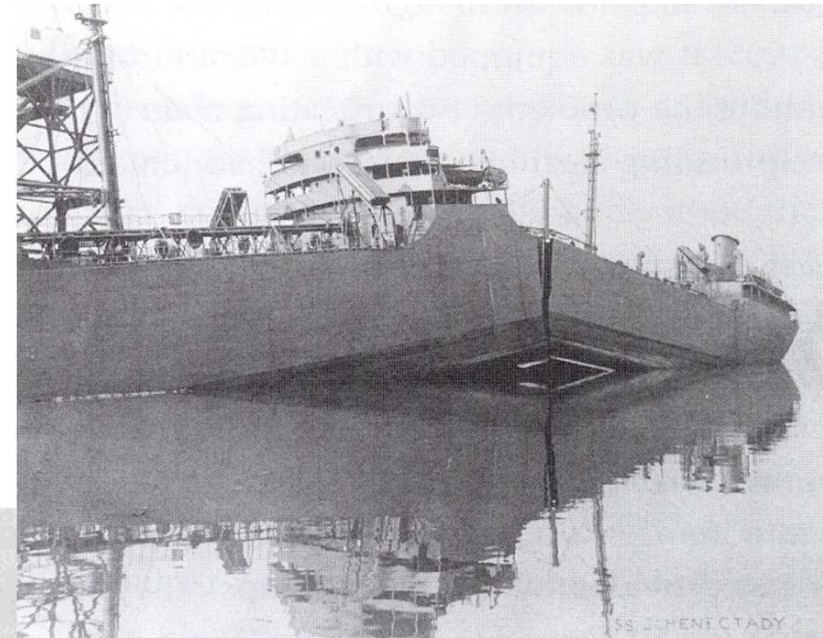
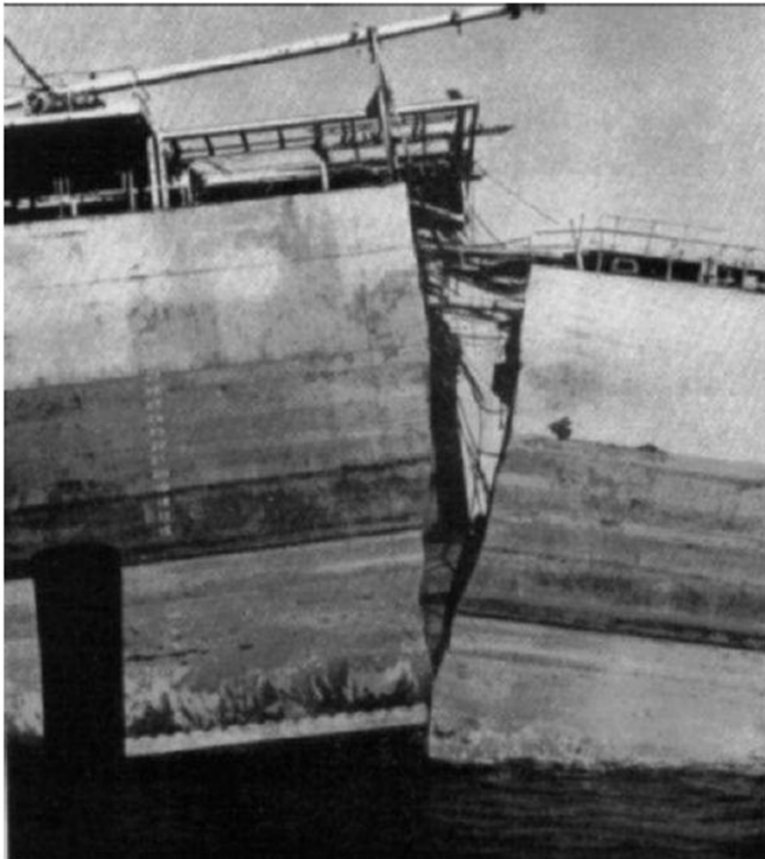
**GRAN CRITERIO PARA
PREVENIR EL FALLO
POR PLASTIFICACIÓN**



ojo !!!

Cuidado con el fallo frágil de materiales “dúctiles”

<http://www.usmm.org/libertyships.html>



Beltrami (1885)

“Tensión equivalente”
valor crítico de la energía de deformación

$$\frac{\sigma_I \varepsilon_I + \sigma_{II} \varepsilon_{II} + \sigma_{III} \varepsilon_{III}}{2} < K$$

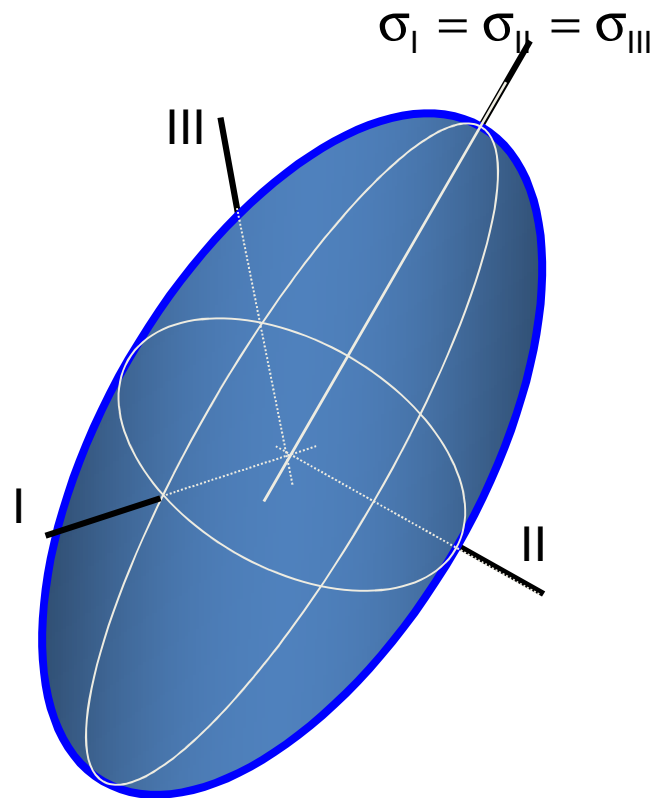
Comparando con el ensayo de tracción

$$\sigma_{eqv}^B = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III})} < \sigma_e$$

$$\sigma_{eqv}^B = \sqrt{I_1^2 - 2(1 + \nu)I_2} < \sigma_e$$



Beltrami (1885)



$$\sigma_{eqv}^B = \sqrt{I_1^2 - 2(1 + \nu)I_2} < \sigma_e$$

Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{eqv}^B = \sqrt{0 + 2(1 + \nu)\tau^2} = \sigma_e$$

Fallo: ~~$\tau = 0.62\sigma_e$~~

Resultados de Lode

$$\nu = 0.3$$

~~Plastificación
función de I_1~~

Resultados de Bridgman

Von Mises (1913)-Huber (1904)-Nadai (1934)

“Tensión equivalente”
valor crítico de la energía de cambio de forma (o de τ octaédrica)

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2] < K$$

Comparando con el ensayo de tracción

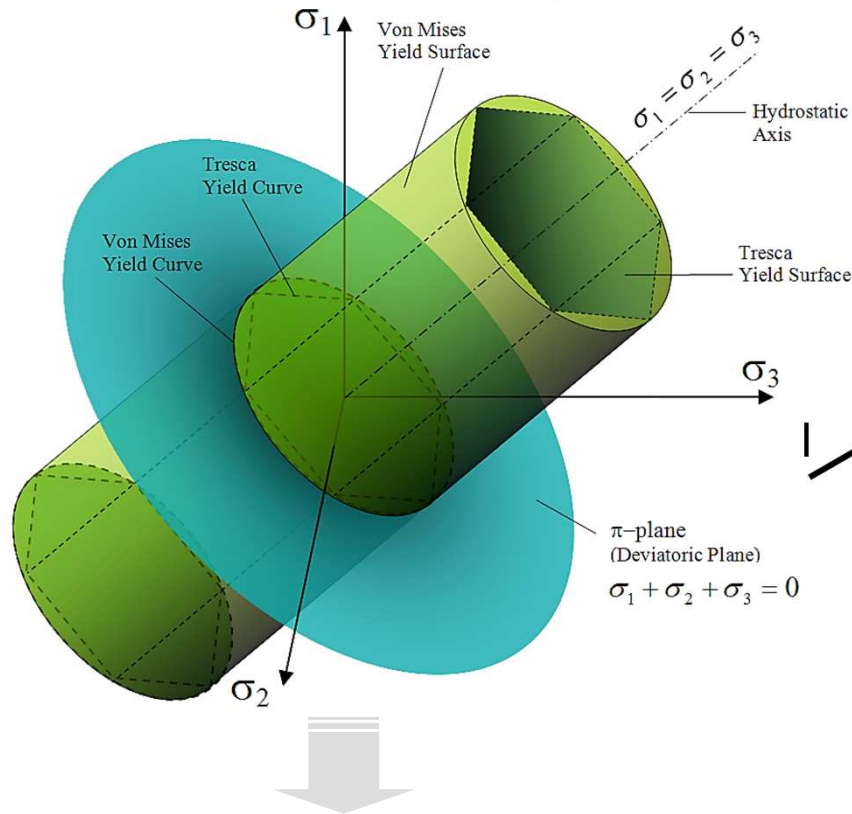
$$\sigma_{eqv}^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2]} < \sigma_e$$

$$\sigma_{eqv}^B = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} < \sigma_e$$



Von Mises (1913)-Huber (1904)-Nadai (1934)

$$\sigma_{eqv}^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2]} < \sigma_e$$



Cortadura pura

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{eqv}^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [\tau^2 + (2\tau)^2 + (\tau)^2]} = \sqrt{3} \tau$$

Fallo: $\tau = 0.577 \sigma_e$

Resultados de Lode $\tau \cong 0.56 \sigma_e$

**Plastificación
INDEPENDIENTE de I_1**

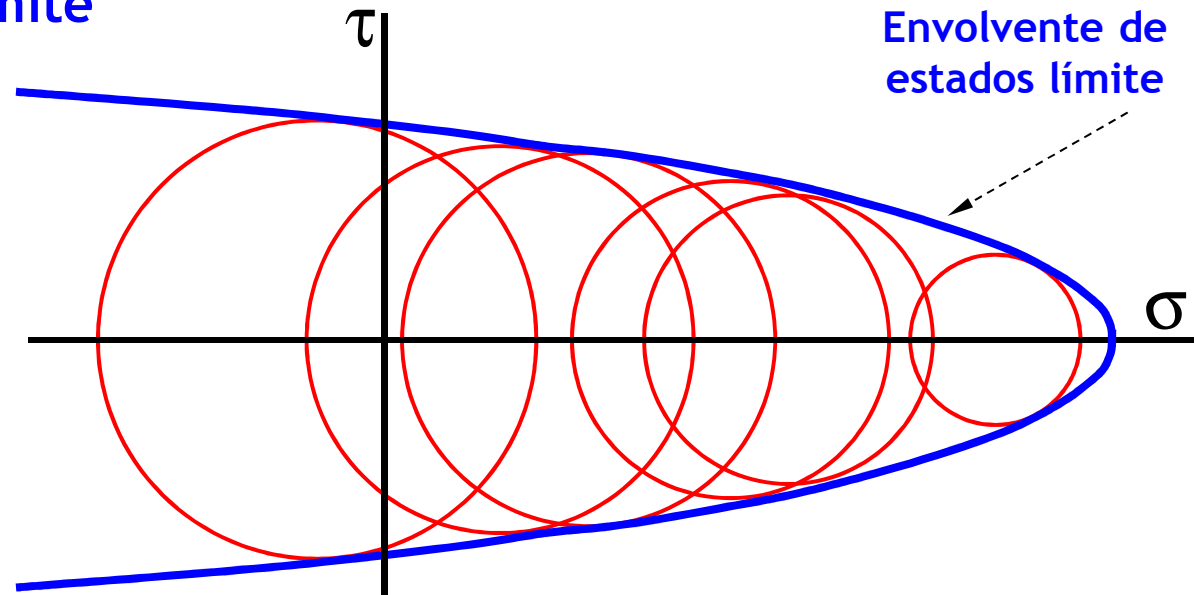
Resultados de Bridgman

**GRAN CRITERIO PARA
PREVENIR EL FALLO
POR PLASTIFICACIÓN**

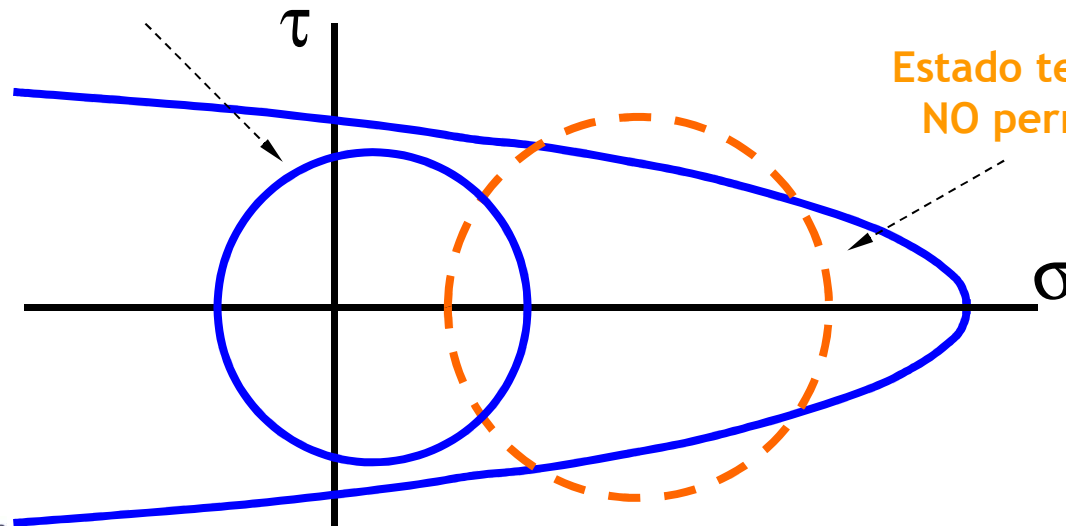


Möhr (1900)

Teoría de los estados límite



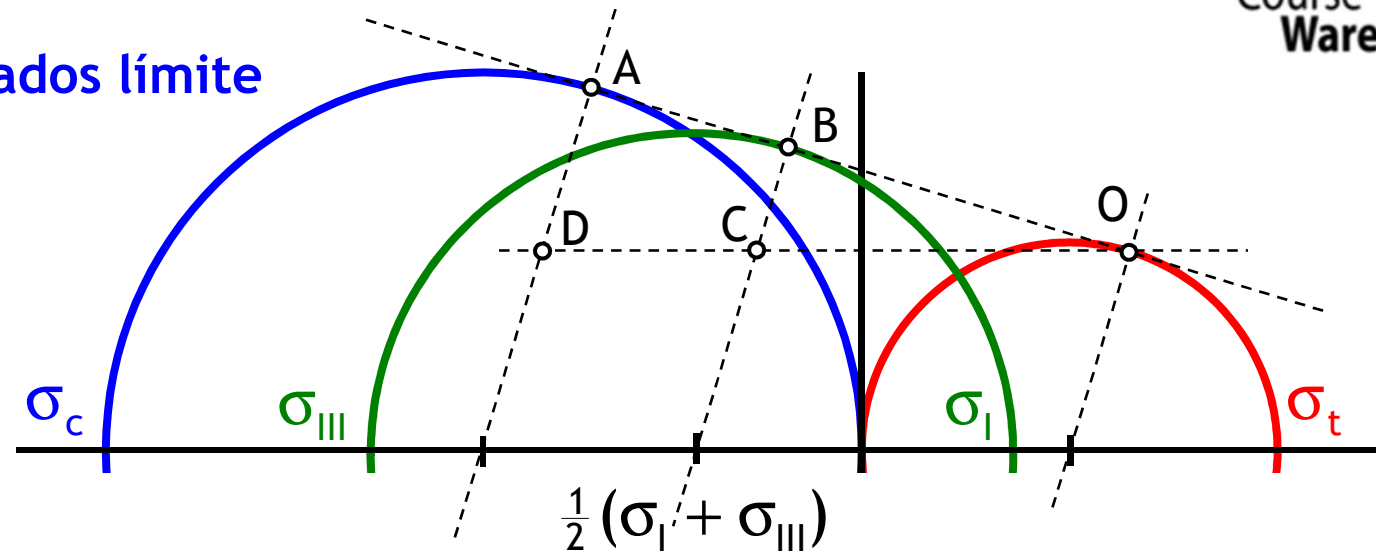
Estado tensional
permitido



Möhr (1900)

Teoría de los estados límite

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CO}}$$



$$\overline{DA} = \frac{1}{2} (\sigma_c - \sigma_t)$$

$$\overline{DO} = \frac{1}{2} (\sigma_c + \sigma_t)$$

$$\overline{CB} = \frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_t)$$

$$\overline{CO} = \frac{1}{2} (\sigma_t - (\sigma_I + \sigma_{III}))$$

$$\frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_t}{\sigma_t - \sigma_I - \sigma_{III}}$$

$$\sigma_I \sigma_c - \sigma_{III} \sigma_t = \sigma_c \sigma_t$$

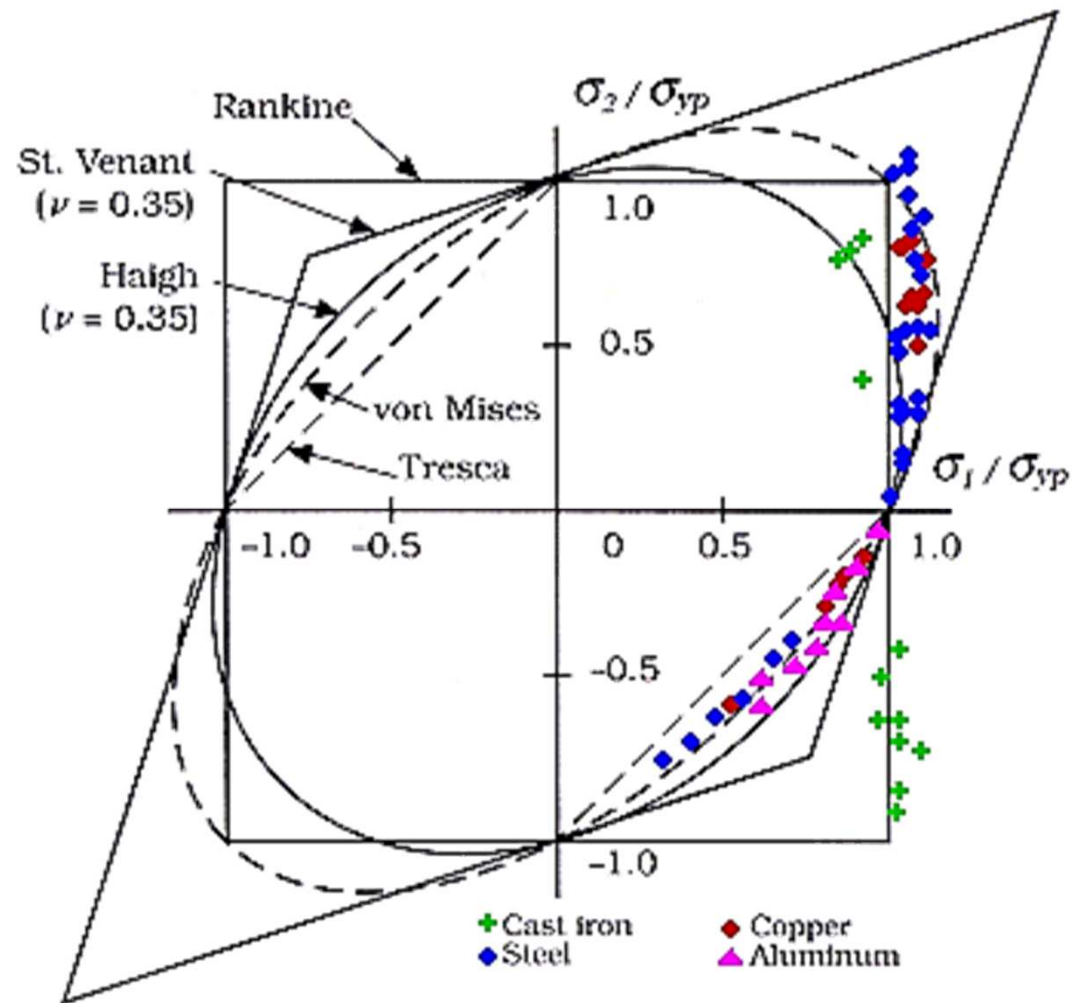
$$k = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$$

$$\sigma_{eqv}^M = \sigma_I - k \sigma_{III} < \sigma_t$$

$$\sigma_{eqv}^M = \sigma_I / k - \sigma_{III} < \sigma_c$$



Algunos resultados experimentales más



Failure Prediction and Avoidance
Experimental Stress Analysis Notebook, Issue 22
 Dec. 1993, Measurements Group, pp. 6-11.