Resistencia de Materiales

POTENCIAL ELÁSTICO DE BARRAS. MÉTODOS ENERGÉTICOS

- El principio de los trabajos virtuales aplicado a la determinación de desplazamientos
- El principio de los trabajos virtuales aplicado a la determinación de incógnitas hiperestáticas.

CONTENIDO DE LA ASIGNATURA

BLOQUE TEMATICO: ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERILES

Open Course Ware

TRABAJO EXTERNO (caso más general)

Energía potencial en la barra prismática

$$W = \frac{1}{2}\left(\sum_{i} \vec{F}_i \cdot \vec{\delta}_i + \int_L \vec{F}_L \cdot \vec{\delta}\, dL + \int_S \vec{F}_S \cdot \vec{\delta}\, dS + \int_V \vec{F}_V \cdot \vec{\delta}\, dV \right)$$

Cargas puntuales | Cargas lineales | Cargas superficiales | Cargas volumétricas

ENERGÍA UNITARIA DE DEFORMACIÓN

$$U = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz}\right)$$

Integrando en el volumen

$$E_p = \int_V U\, dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, dV$$

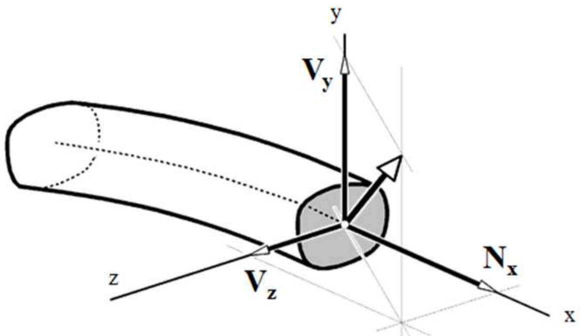
ENERGÍA POTENCIAL

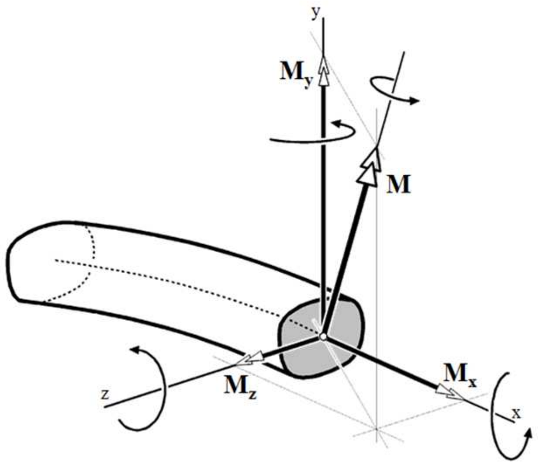
Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

ENERGÍA POTENCIAL DE LA BARRA PRISMÁTICA

	Axil	Flexión	Torsión (C)
σ_{ii}	$\dfrac{N}{A}$	$\dfrac{M_z}{I_z}y \quad \dfrac{M_y}{I_y}z$	---
σ_{ij}	---	$\dfrac{V_y S_z(y)}{b(y)\, I_z} \quad \dfrac{V_z S_y(z)}{b(z)\, I_y}$	$\dfrac{T_x}{I_p}r$
ε_{ii}	$\dfrac{N}{A\,E}$	$\dfrac{M_z}{E\,I_z}y \quad \dfrac{M_y}{E\,I_y}z$	---
γ_{ij}	---	$\dfrac{V_y S_z(y)}{G\,b(y)\, I_z} \quad \dfrac{V_z S_y(z)}{G\,b(z)\, I_y}$	$\dfrac{T_x}{G\,I_p}r$

Energía Potencial Elástica de una barra prismática



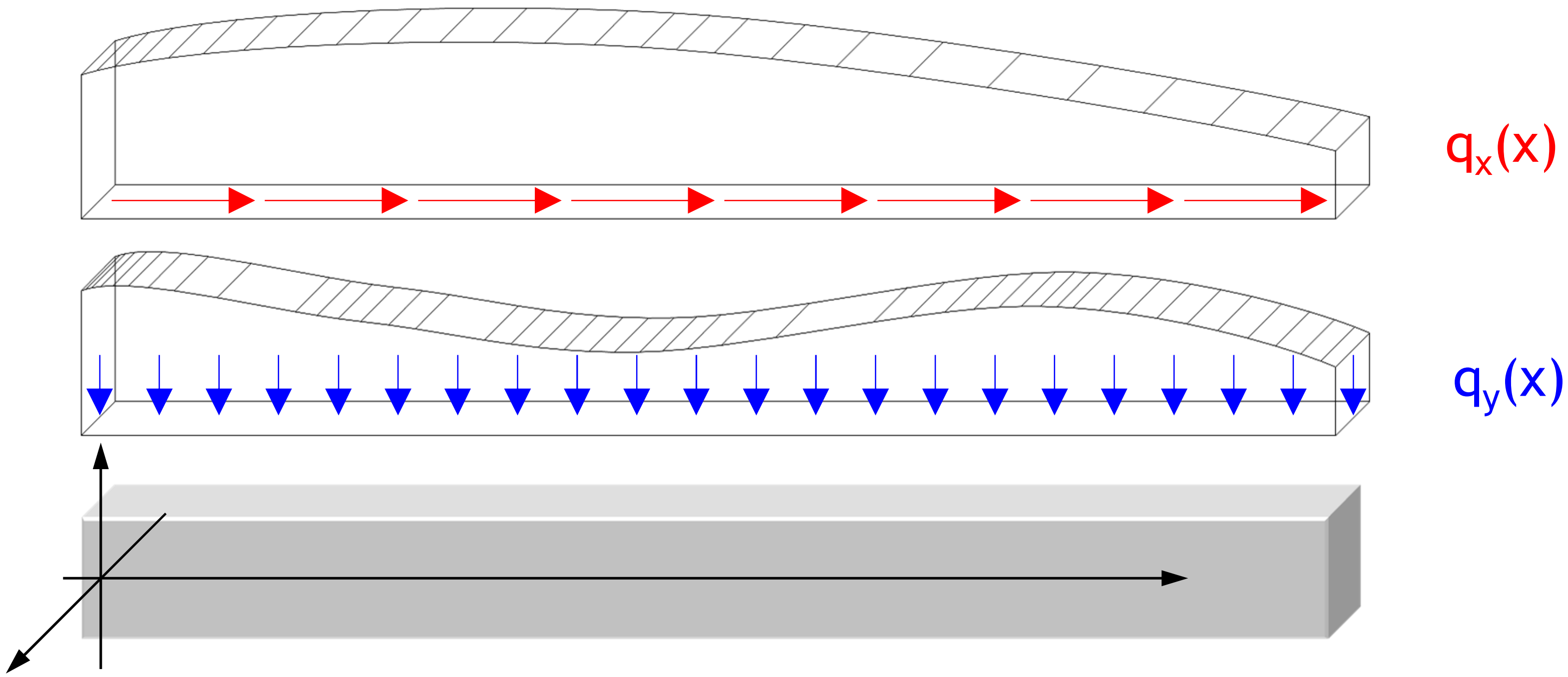


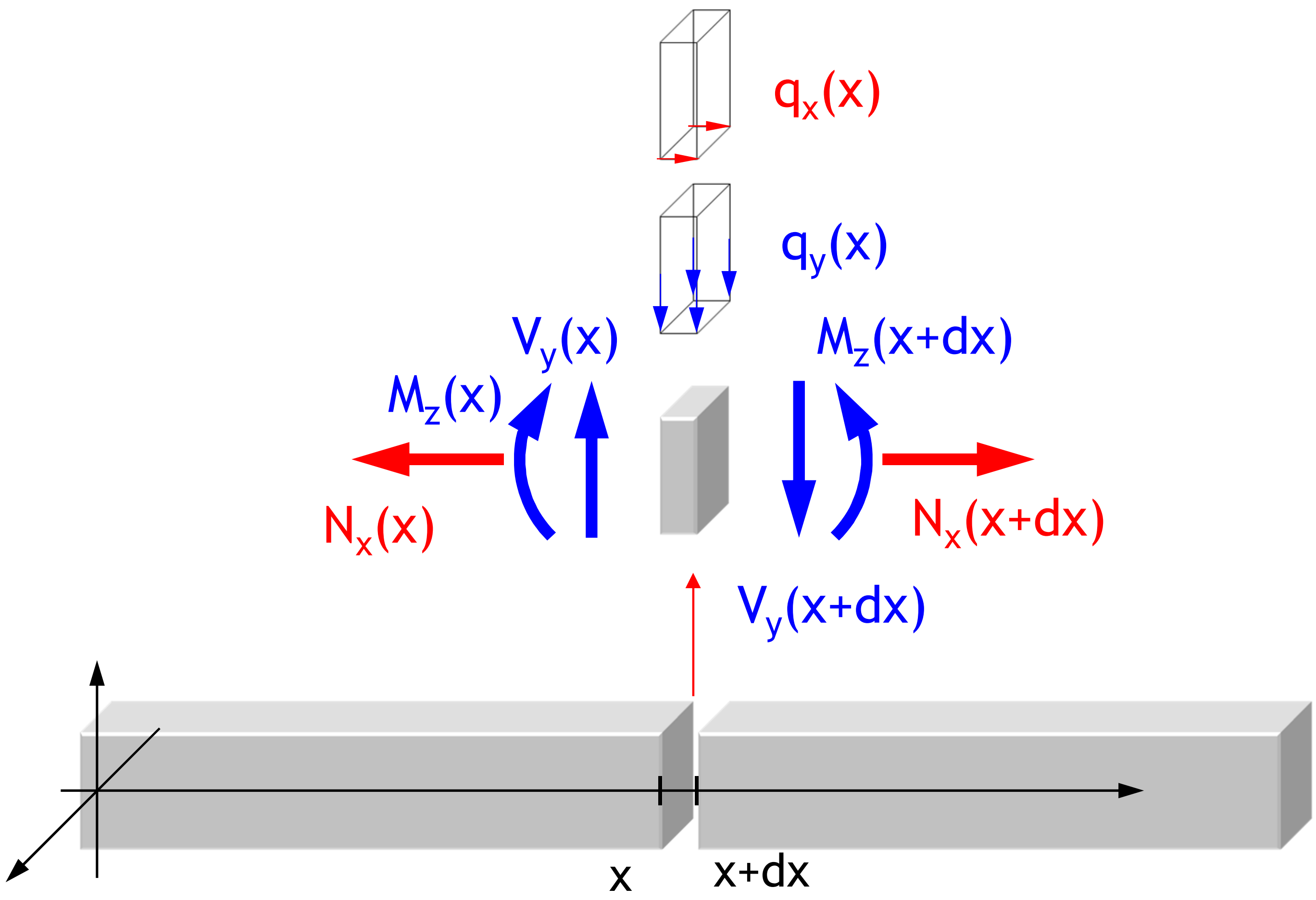
Tipo de esfuerzo		Energía de deformación	
Axil	N	$\int_0^l \frac{N^2}{A.E}.dx$	A: Sección E: Módulo de Young
Cortante	V	$\int_0^l \frac{V^2}{A'.G}.dx$	A': sección reducida G: Módulo de cizalladura
Flector	M	$\int_0^l \frac{M^2}{I.E}.dx$	I: momento de inercia E: módulo de Young
Torsor	Mt	$\int_0^l \frac{Mt^2}{C}.dx$	C: rigidez torsional

ENERGÍA POTENCIAL DE LA BARRA PRISMÁTICA

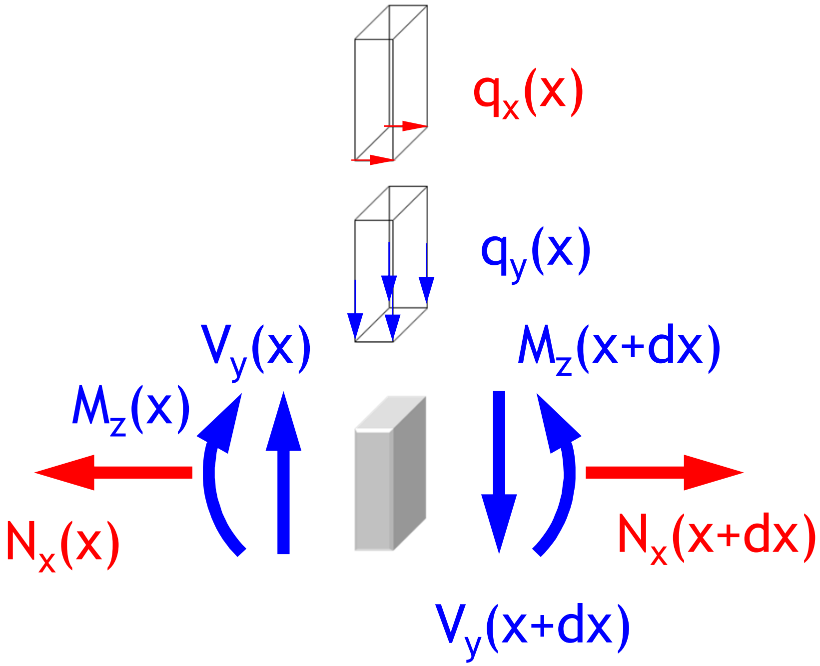
	Energía Potencial (×2)
Axil	$\int_V \sigma_{xx}\varepsilon_{xx}\, dV = \int_0^L \int_A \frac{N}{A}\frac{N}{AE} dAdx = \int_0^L \frac{N^2}{AE} dx$
Flector	$\int_V \sigma_{xx}\varepsilon_{xx}\, dV = \int_0^L \int_A \frac{M_z}{I_z} y \frac{M_z}{EI_z} y\, dAdx = \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z^2} dx \int_0^L y^2 dA = \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx$
Cortante	$\int_V \sigma_{ij}\gamma_{ij}\, dV = \int_0^L \int_A \frac{V_y S_z(y)}{b(y)\, I_z} \frac{V_y S_z(y)}{G\, b(y)\, I_z} dAdx = \int_0^L \frac{V_y^2}{GI_z^2} dx \int_A \left(\frac{S_z(y)}{b(y)}\right)^2 dA$
Torsión (C)	$\int_V \sigma_{ij}\gamma_{ij}\, dV = \int_0^L \int_A \frac{T_x}{I_p} r \frac{T_x}{G\, I_p} r\, dAdx = \int_0^L \frac{T_x^2}{G\, I_p^2} dx \int_A r^2 dA = \int_0^L \frac{T_x^2}{G\, I_p} dx$

El teorema de los trabajos virtuales


$q_x(x)$
$q_y(x)$



$q_x(x)$
$q_y(x)$
$V_y(x)$
$M_z(x+dx)$
$M_z(x)$
$N_x(x)$
$N_x(x+dx)$
$V_y(x+dx)$
x
x+dx



$\sum F_x = 0$

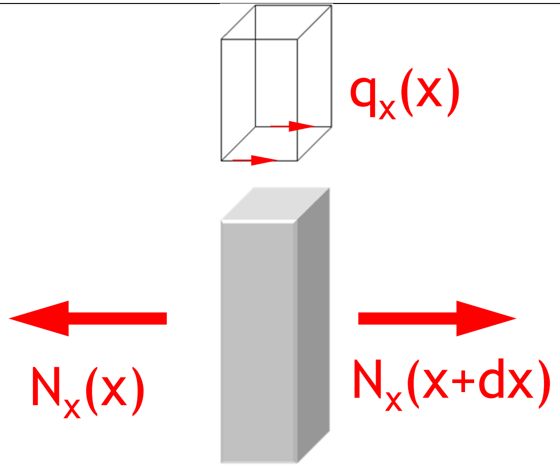
$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$\sum F_y = 0$

$$\frac{d\,V_y(x)}{dx} = -q_y(x)$$

$\sum M_z = 0$

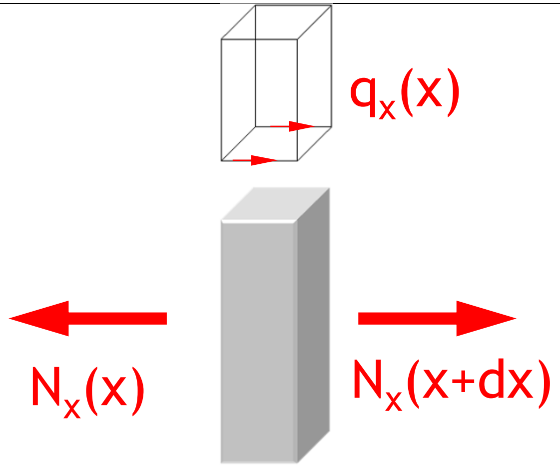
$$\frac{d\,M_z(x)}{dx} = V_y(x)$$



$$\sum F_x = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_0^L q_x(x)\, f(x)\,dx \quad \forall \quad f(x)$$



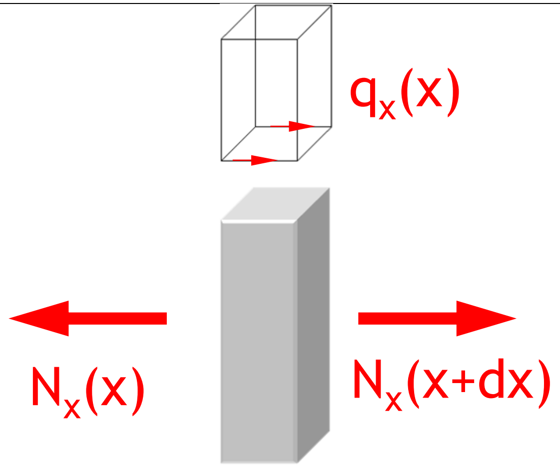
$$\sum F_x = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_0^L q_x(x)\, f(x)\,dx \quad \forall \quad f(x)$$

Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = N(x)\, f(x)\Big]_0^L - \int_0^L N(x) \frac{d\, f(x)}{dx}\,dx$$



$$\sum F_x = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_0^L q_x(x) f(x)\,dx \quad \forall \quad f(x)$$

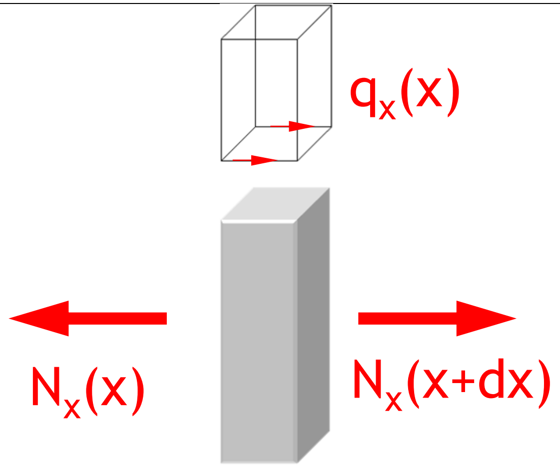
Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = N(x) f(x)\Big]_0^L - \int_0^L N(x) \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx$$

Sin pérdida de generalidad tomemos como función *f(x)* el campo de desplazamientos compatible con las deformaciones producidas por un axil CUALQUIERA

$$f(x) = \bar{u}_x(x)$$

$$\frac{d\bar{u}_x(x)}{dx} = \bar{\varepsilon}_x(x) = \frac{\bar{\sigma}_x(x)}{E} = \frac{\bar{N}(x)}{AE}$$



$$\sum F_x = 0$$

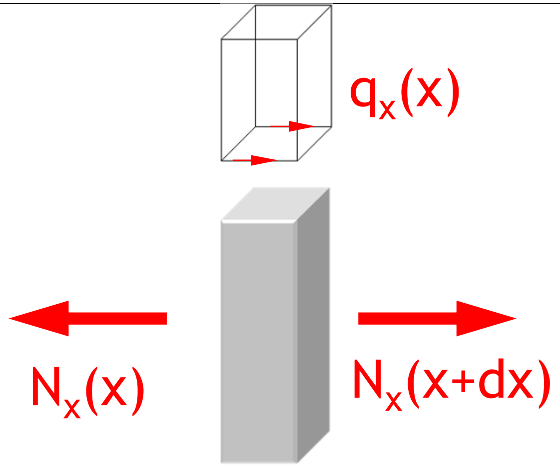
$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_0^L q_x(x) f(x)\,dx \quad \forall \quad f(x)$$

Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = N(x) f(x)\Big]_0^L - \int_0^L N(x) \frac{d\,f(x)}{dx} dx$$

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} \bar{u}(x)\,dx = N(L)\,\bar{u}(L) - N(0)\,\bar{u}(0) - \int_0^L \frac{N(x)\,\bar{N}(x)}{EA} dx$$



$$\sum F_x = 0$$

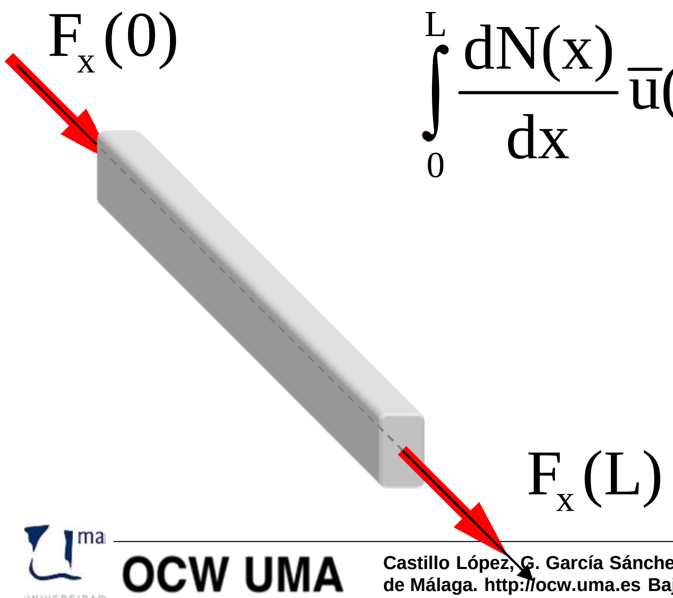
$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

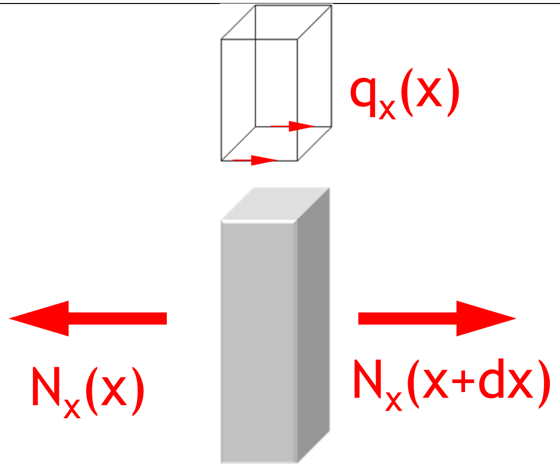
$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_0^L q_x(x) f(x)\,dx \quad \forall \quad f(x)$$

Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = N(x) f(x)\Big]_0^L - \int_0^L N(x) \frac{d\,f(x)}{dx} dx$$

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} \bar{u}(x)\,dx = N(L)\,\bar{u}(L) - N(0)\,\bar{u}(0) - \int_0^L \frac{N(x)\,\bar{N}(x)}{EA} dx$$





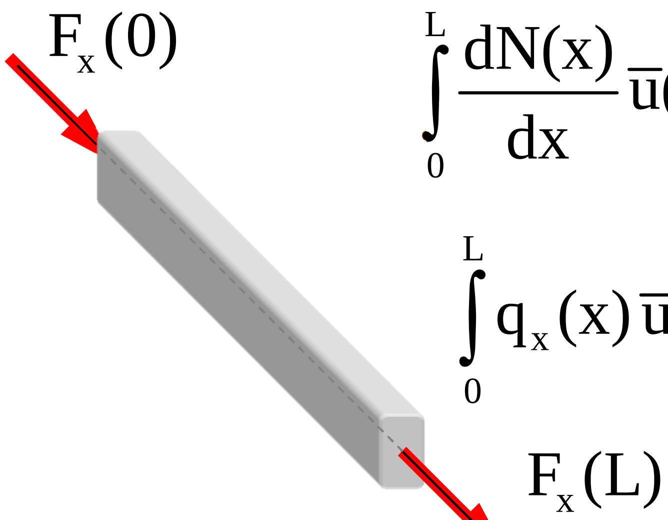
$$\sum F_x = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_0^L q_x(x) f(x)\,dx \quad \forall \quad f(x)$$

Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx} f(x)\,dx = N(x) f(x)\Big]_0^L - \int_0^L N(x)\frac{d\,f(x)}{dx}\,dx$$



$$\int_0^L \frac{dN(x)}{dx}\bar{u}(x)\,dx = N(L)\,\bar{u}(L) - N(0)\,\bar{u}(0) - \int_0^L \frac{N(x)\,\bar{N}(x)}{EA}\,dx$$

$$\int_0^L q_x(x)\,\bar{u}(x)\,dx + F(L)\,\bar{u}(L) + F(0)\,\bar{u}(0) = \int_0^L \frac{N(x)\,\bar{N}(x)}{EA}\,dx$$

Trabajo VIRTUAL externo

$$\int_0^L q_x(x)\,\bar{u}(x)\,dx + F(L)\,\bar{u}(L) + F(0)\,\bar{u}(0) = \int_0^L \frac{N(x)\,\bar{N}(x)}{EA}\,dx$$

Trabajo VIRTUAL interno

Trabajo VIRTUAL externno

$$\int_0^L q_x(x)\,\bar{u}(x)\,dx + F(L)\,\bar{u}(L) + F(0)\,\bar{u}(0) = \int_0^L \frac{N(x)\,\bar{N}(x)}{EA}\,dx$$

Trabajo VIRTUAL interno

Principio de reciprocidad

$$= \int_0^L \bar{q}_x(x)\,u(x)\,dx + \bar{F}(L)\,u(L) + \bar{F}(0)\,u(0)$$

Trabajo VIRTUAL externo

$$\int_0^L q_x(x)\,\overline{u}(x)\,dx + F(L)\,\overline{u}(L) + F(0)\,\overline{u}(0) = \int_0^L \frac{N(x)\,\overline{N}(x)}{EA}\,dx$$

Trabajo VIRTUAL interno

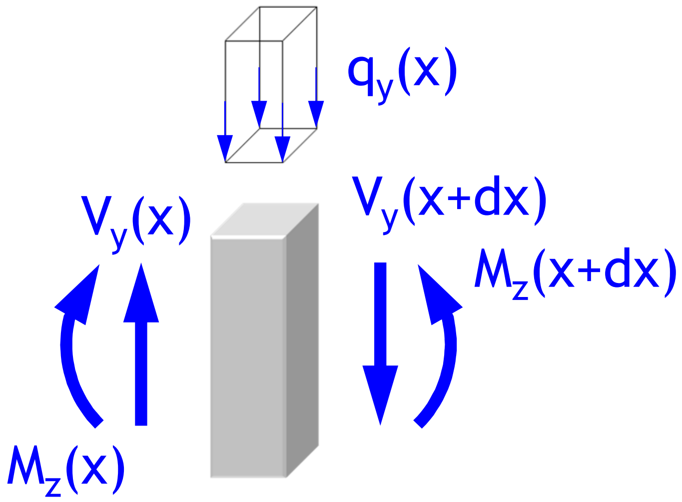
$=$ Principio de reciprocidad

$$\int_0^L \overline{q}_x(x)\,u(x)\,dx + \overline{F}(L)\,u(L) + \overline{F}(0)\,u(0)$$

Y, EN GENERAL

$$\int_0^L q_x^{I}(x)\,u^{II}(x)\,dx + F^{I}(L)\,u^{II}(L) + F^{I}(0)\,u^{II}(0) = \int_0^L \frac{N^{I}(x)\,N^{II}(x)}{EA}\,dx$$

Con la única condición
de que uno de los estados sea un estado en equilibrio
y el otro un estado compatible

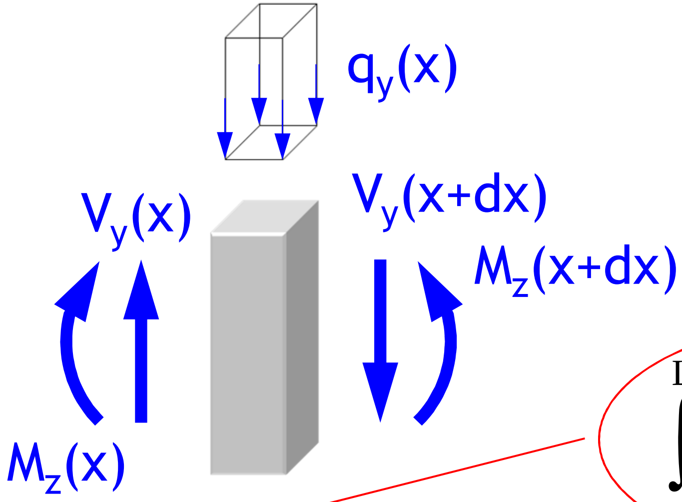


$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{d\,V_y(x)}{dx} = -q_y(x)$$

$$\sum M_z = 0$$

$$\frac{d\,M_z(x)}{dx} = V_y(x)$$



$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{d\,V_y(x)}{dx} = -q_y(x)$$

$$\int_0^L \frac{d\,V_y(x)}{dx} f(x)\,dx = -\int_0^L q_y(x)\, f(x)\,dx \quad \forall \quad f(x)$$

Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{d\,V_y(x)}{dx} f(x)\,dx = V_y(x)\, f(x)\Big]_0^L - \underbrace{\int_0^L V_y(x) \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx}$$

$$\int_0^L V_y(x) \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx = \underbrace{\int_0^L \frac{d\,M_z(x)}{dx} \frac{d\,f(x)}{dx}\,dx}$$

$$\frac{d\,M_z(x)}{dx} = V_y(x)$$

Integrando por partes

Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{d\,M_z(x)}{dx}\frac{d\,f(x)}{dx}dx = M_z(x)\frac{d\,f(x)}{dx}\Bigg]_0^L - \int_0^L M_z(x)\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}dx$$

Finalmente la expresión inicial

$$\int_0^L \frac{d\,V_y(x)}{dx}\,f(x)\,dx = -\int_0^L q_y(x)\,f(x)\,dx$$

queda como

$$-\int_0^L q_y(x)\,f(x)\,dx = V_y(x)\,f(x)\Big]_0^L - M_z(x)\frac{d\,f(x)}{dx}\Bigg]_0^L + \int_0^L M_z(x)\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}dx$$

Si tomamos como función *f(x)*
el campo de desplazamientos transversales compatible
con las deformaciones producidas por un flector/cortane CUALQUIERA

$$f(x) = \overline{y}_x(x) \Rightarrow \frac{d\,f(x)}{dx} = \overline{\theta}_z(x) \Rightarrow \frac{d^2\,f(x)}{dx^2} = \frac{\overline{M}_z}{EI_z}$$

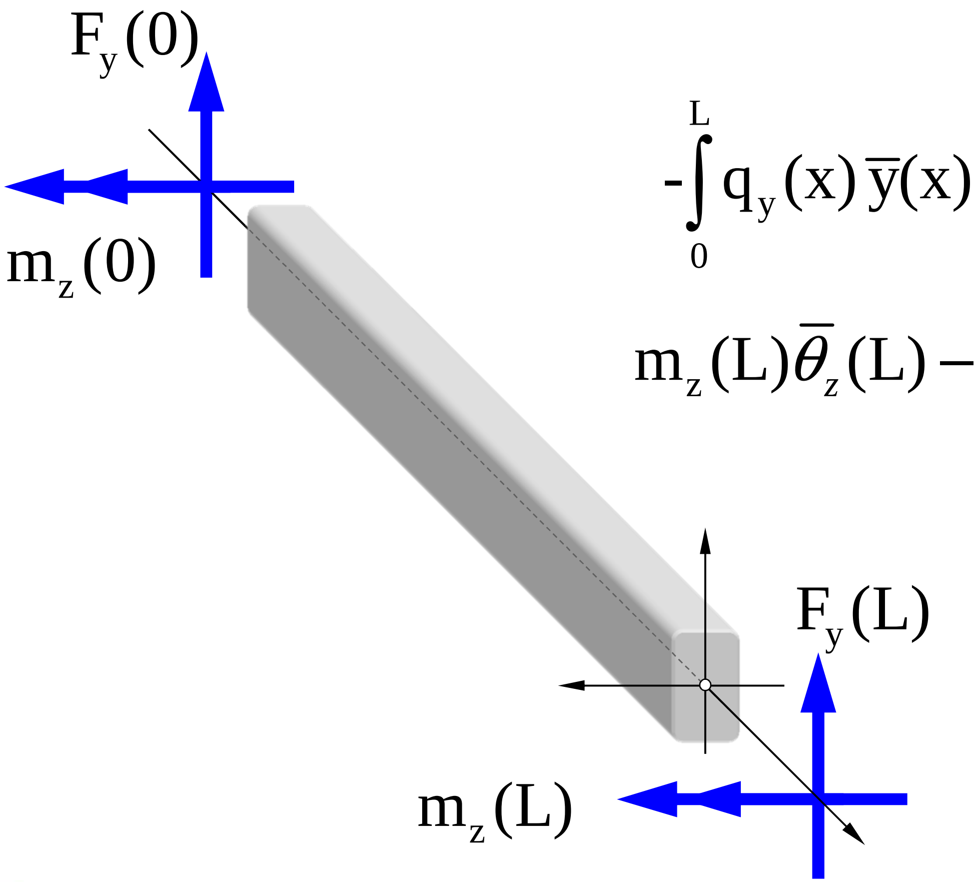
$$-\int_0^L q_y(x)\,f(x)\,dx = V_y(x)\,f(x)\Big]_0^L - M_z(x)\frac{d\,f(x)}{dx}\Big]_0^L + \int_0^L M_z(x)\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}dx$$

$$-\int_0^L q_y(x)\,\overline{y}(x)\,dx = V_y(L)\,\overline{y}(L) - V_y(0)\,\overline{y}(0) - M_z(L)\overline{\theta}_z(L)$$

$$+M_z(0)\overline{\theta}_z(0) + \int_0^L \frac{M_z(x)\,\overline{M}_z(x)}{EI_z}dx$$

$$-\int_0^L q_y(x)\,\bar{y}(x)\,dx = V_y(L)\,\bar{y}(L) - V_y(0)\,\bar{y}(0) - M_z(L)\bar{\theta}_z(L) + $$

$$+ M_z(0)\bar{\theta}_z(0) + \int_0^L \frac{M_z(x)\,\bar{M}_z(x)}{EI_z}\,dx$$



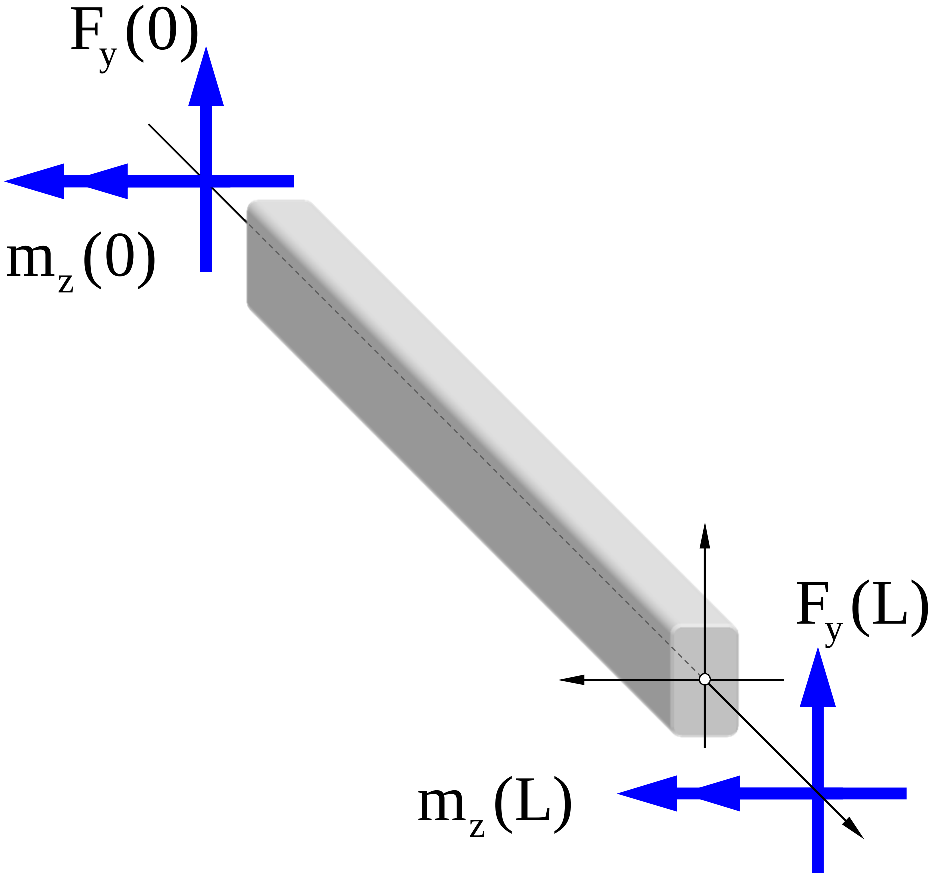
$$-\int_0^L q_y(x)\,\bar{y}(x)\,dx = -F_y(L)\,\bar{y}(L) - F_y(0)\,\bar{y}(0) - $$

$$m_z(L)\bar{\theta}_z(L) - m_z(0)\bar{\theta}_z(0) + \int_0^L \frac{M_z(x)\,\bar{M}_z(x)}{EI_z}\,dx$$

$$-\int_0^L q_y(x)\,\bar{y}(x)\,dx + F_y(L)\,\bar{y}(L) + F_y(0)\,\bar{y}(0) + m_z(L)\bar{\theta}_z(L) + m_z(0)\bar{\theta}_z(0) = \int_0^L \frac{M_z(x)\,\bar{M}_z(x)}{EI_z}\,dx =$$

T. reciprocidad

$$= -\int_0^L \bar{q}_y(x)\,y(x)\,dx + \bar{F}_y(L)\,y(L) + \bar{F}_y(0)\,y(0) + \bar{m}_z(L)\theta_z(L) + \bar{m}_z(0)\theta_z(0)$$



EN GENERAL, CONSIDERANDO TODOS LOS ESFUERZOS POSIBLES

Trabajo VIRTUAL externo

$$\sum_{barras}\left(\int_0^L q_x^I(x)\,u^{II}(x)\,dx - \int_0^L q_y^I(x)\,y^{II}(x)\,dx + \int_0^L q_z^I(x)\,z^{II}(x)\,dx\right) +$$

$$+\sum_{nudos}\left(F_x^I u_x^{II} + F_y^I u_y^{II} + F_z^I u_z^{II} + m_x^I\,\theta_x^{II} + m_y^I\,\theta_y^{II} + m_z^I\,\theta_z^{II}\right) =$$

$$= \sum_{barras}\left(\int_0^L \frac{N^I(x)\,N^{II}(x)}{EA}dx + \int_0^L \frac{M_y^I(x)\,M_y^{II}(x)}{EI_y}dx + \int_0^L \frac{M_z^I(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}dx + \int_0^L \frac{M_x^I(x)\,M_x^{II}(x)}{GJ}dx\right)$$

Trabajo VIRTUAL interno

EN GENERAL, CONSIDERANDO TODOS LOS ESFUERZOS POSIBLES

Trabajo VIRTUAL externo

$$\sum_{\text{barras}} \left(\int_0^L \vec{q}^{\,I}(x)\,\vec{\delta}^{\,II}(x)\,dx \right) + \sum_{\text{nudos}} \left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II} + \vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II} \right) =$$

Trabajo VIRTUAL interno

$$= \sum_{\text{barras}} \left(\int_0^L \frac{N^I(x)\,N^{II}(x)}{EA}dx + \int_0^L \frac{M_y^I(x)\,M_y^{II}(x)}{EI_y}dx + \int_0^L \frac{M_z^I(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}dx + \int_0^L \frac{M_x^I(x)\,M_x^{II}(x)}{GJ}dx \right)$$

EN GENERAL, CONSIDERANDO TODOS LOS ESFUERZOS POSIBLES

Trabajo VIRTUAL externo

$$\sum_{barras}\left(\int_0^L \vec{q}^{\,I}(x)\vec{\delta}^{\,II}(x)\,dx\right)+\sum_{nudos}\left(\vec{F}^I\vec{u}^{\,II}+\vec{m}^I\,\vec{\theta}^{\,II}\right)=$$

¿VIRTUAL?

El estado de desplazamientos -II- no es el provocado por el estado de cargas -I-

$$=\sum_{barras}\left(\int_0^L \frac{N^I(x)\,N^{II}(x)}{EA}dx+\int_0^L \frac{M_y^I(x)\,M_y^{II}(x)}{EI_y}dx+\int_0^L \frac{M_z^I(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}dx+\int_0^L \frac{M_x^I(x)\,M_x^{II}(x)}{GJ}dx\right)$$

Trabajo VIRTUAL interno

EN GENERAL, CONSIDERANDO TODOS LOS ESFUERZOS POSIBLES

Trabajo VIRTUAL externo

$$\sum_{\text{barras}}\left(\int_0^L \vec{q}^{\,I}(x)\,\vec{\delta}^{\,II}(x)\,dx\right)+\sum_{\text{nudos}}\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=$$

¿VIRTUAL? El estado de desplazamientos -II- no es el provocado por el estado de cargas -I-

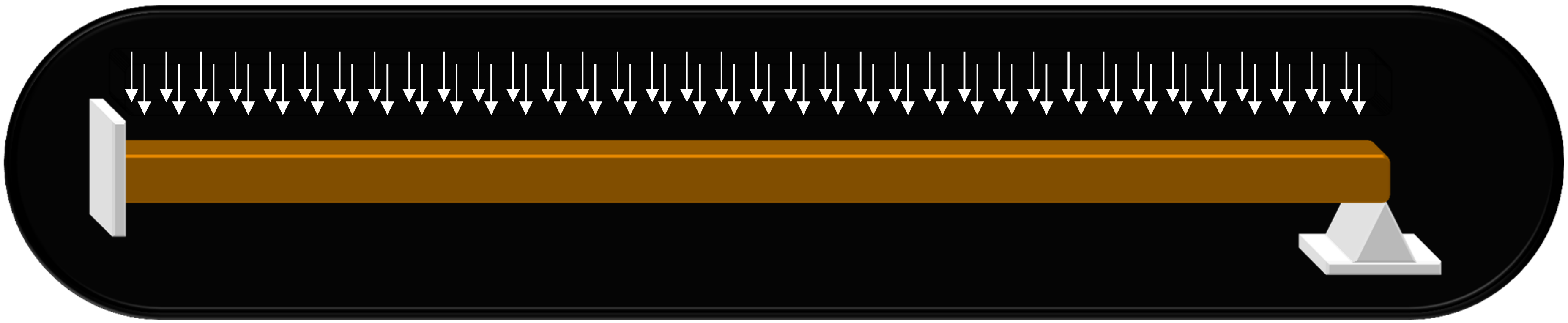
El estado de desplazamientos -II- es un estado COMPATIBLE CON LOS VÍNCULOS

El estado de cargas -I- es un estado DE EQUILIBRIO

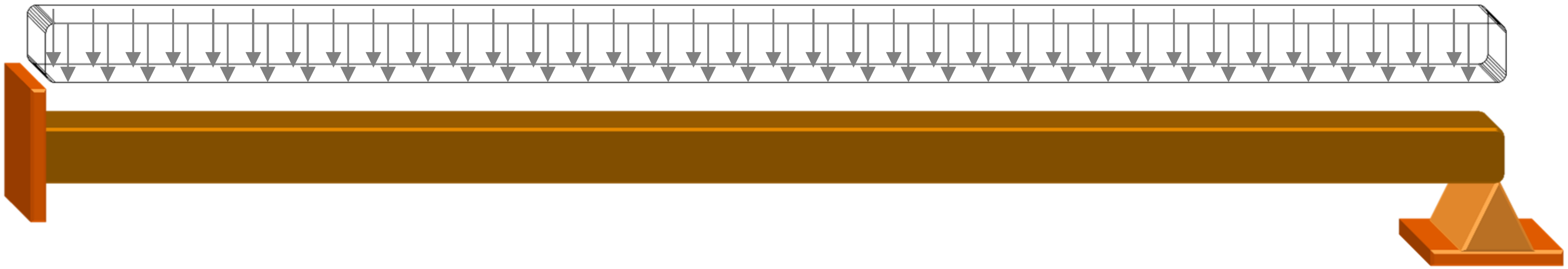
$$=\sum_{\text{barras}}\left(\int_0^L \frac{N^{I}(x)\,N^{II}(x)}{EA}dx+\int_0^L \frac{M_y^{I}(x)\,M_y^{II}(x)}{EI_y}dx+\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}dx+\int_0^L \frac{M_x^{I}(x)\,M_x^{II}(x)}{GJ}dx\right)$$

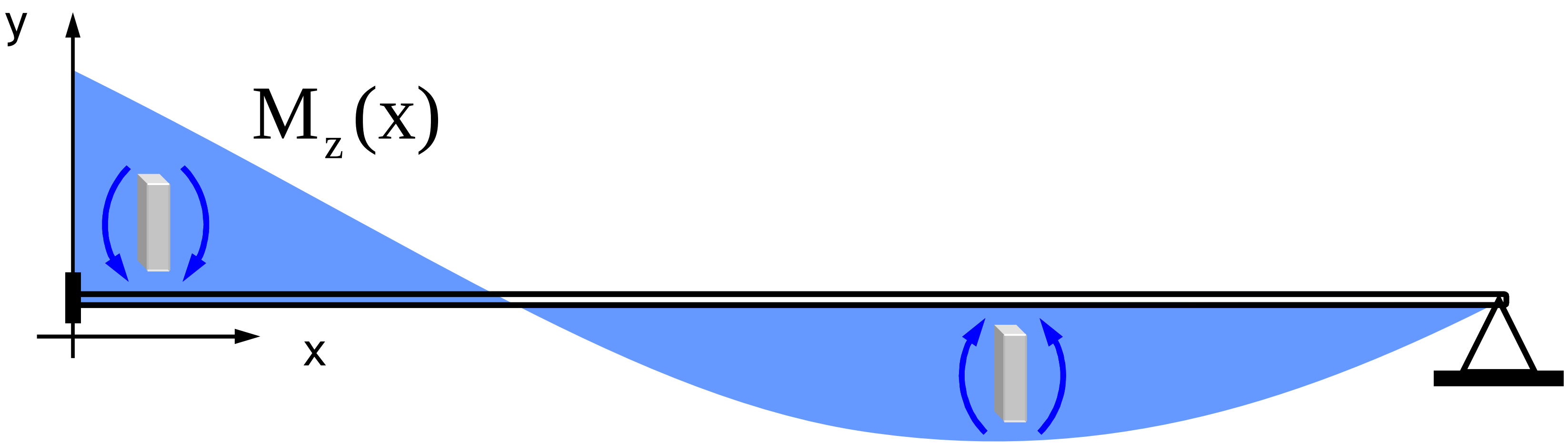
Trabajo VIRTUAL interno

Aplicación del TTV al cálculo de desplazamientos

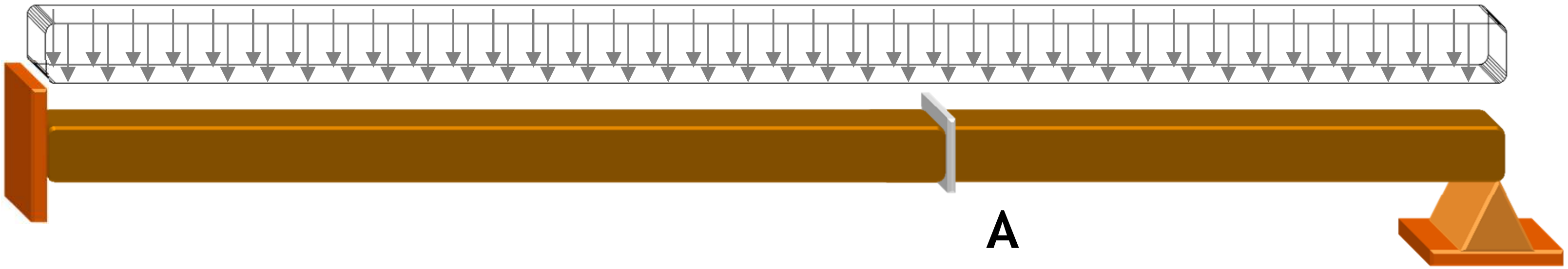


Supongamos conocidos los esfuerzos de este problema

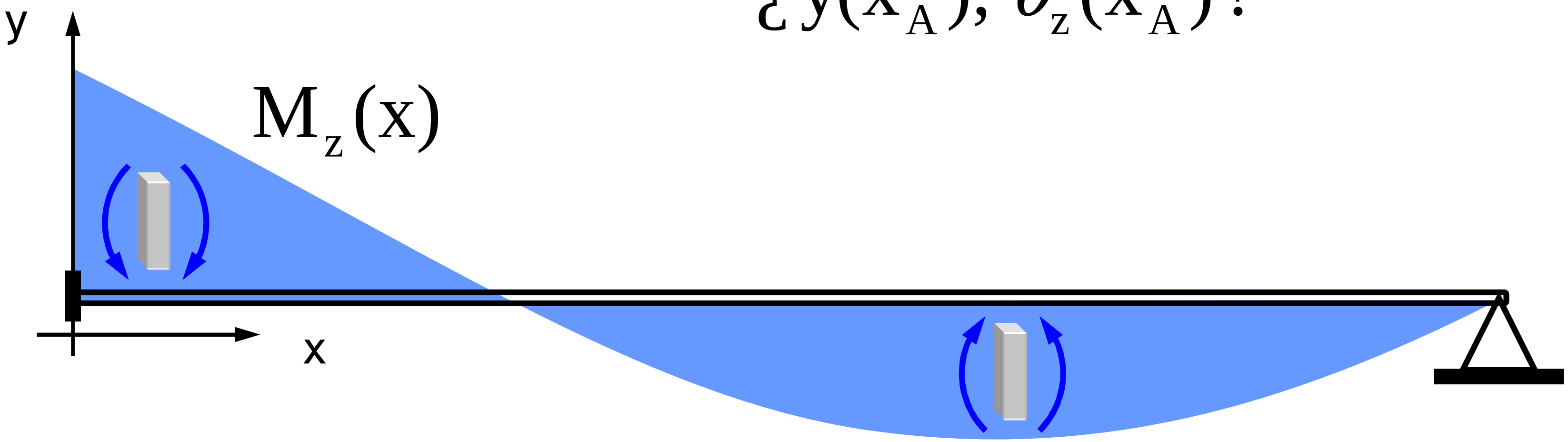




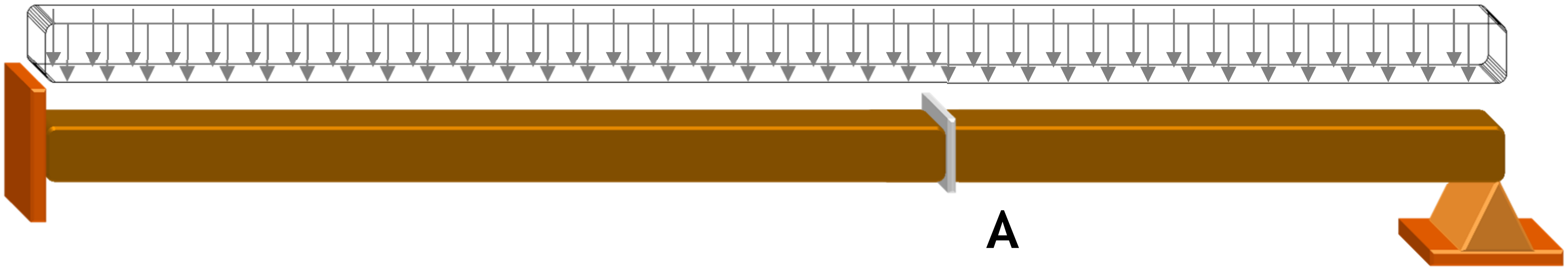
Supongamos conocidos los esfuerzos de este problema



$$¿\, y(x_A),\ \theta_z(x_A)\, ?$$



Supongamos conocidos los esfuerzos de este problema



$$¿\, y(x_A),\ \theta_z(x_A)\, ?$$

Opción 1

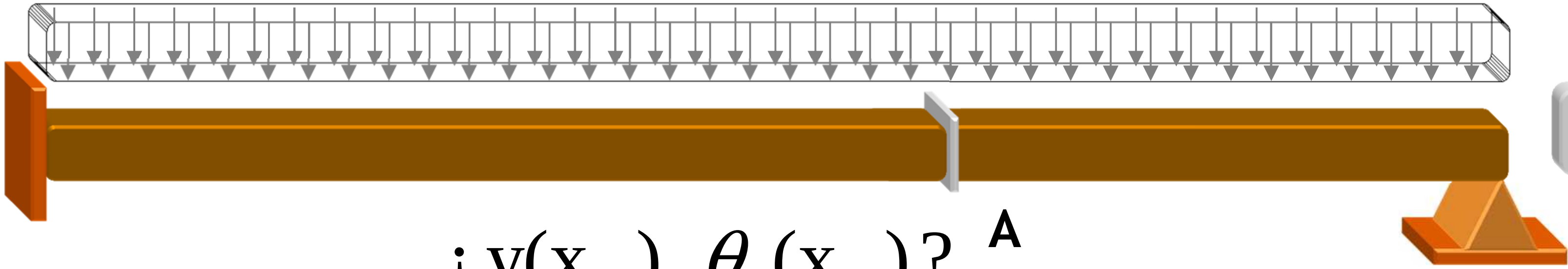
Ecuación de la elástica

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

Opción 2

Métodos energéticos

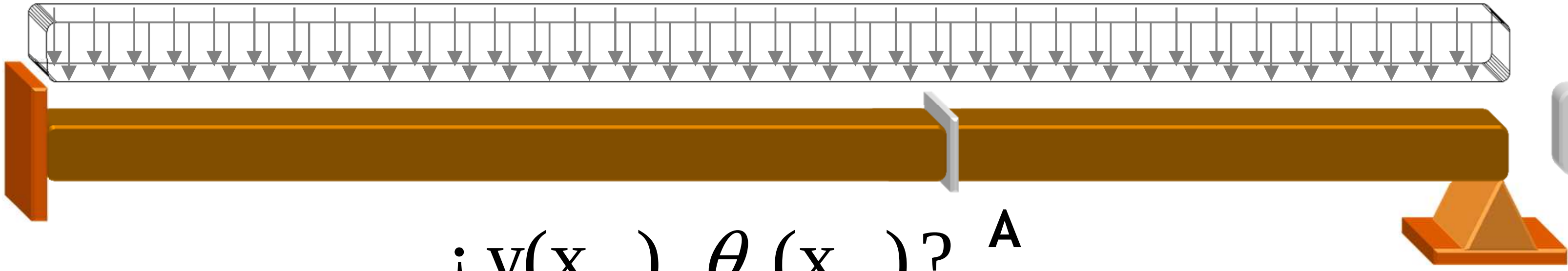
$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II} + \vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right) = \int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$



$$¿\, y(x_A),\ \theta_z(x_A)\, ?$$

Estado II

Aplicación del TTV CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

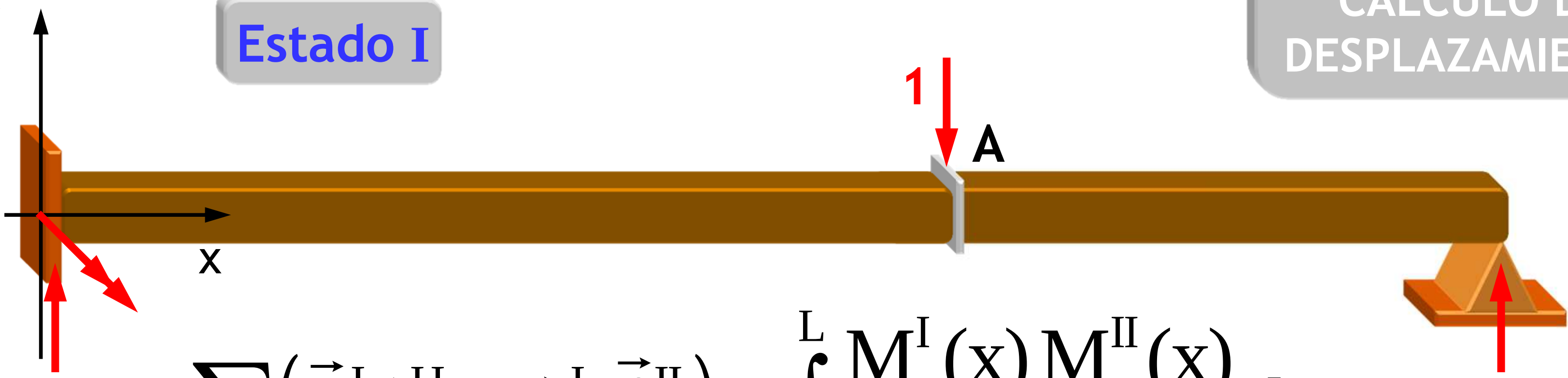


Estado II

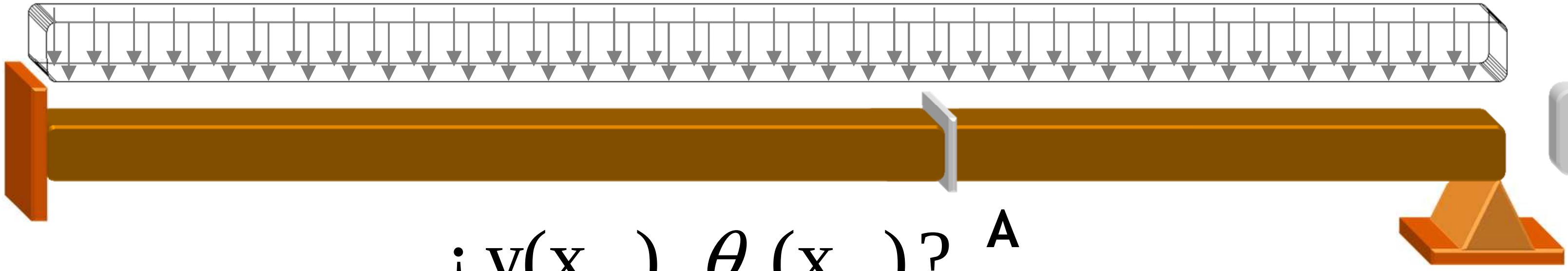
$$¿\,y(x_A),\ \theta_z(x_A)\,?$$

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I



$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=\int_{0}^{L}\frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

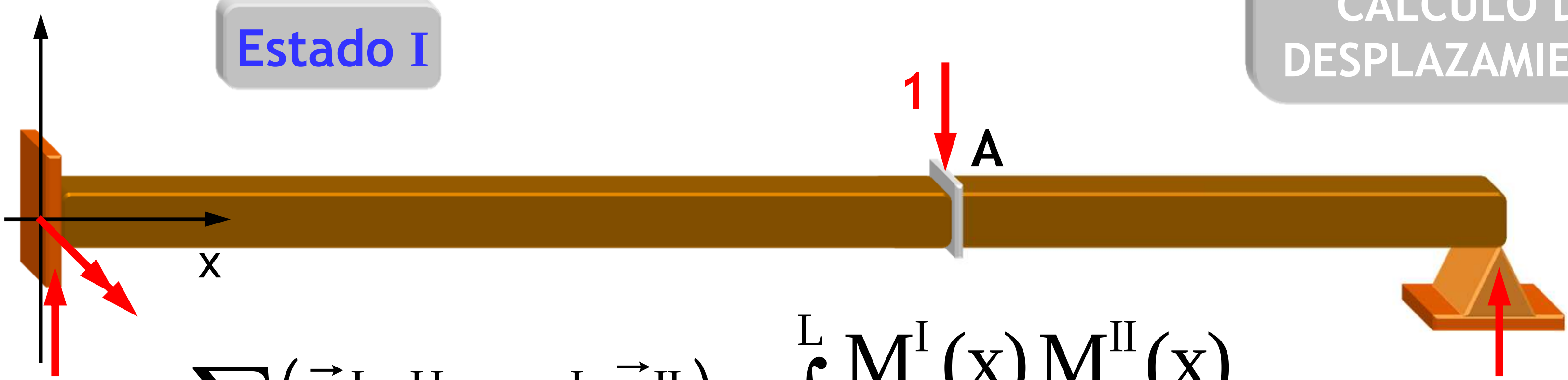


Estado II

$$¿\, y(x_A),\ \theta_z(x_A)\, ?$$

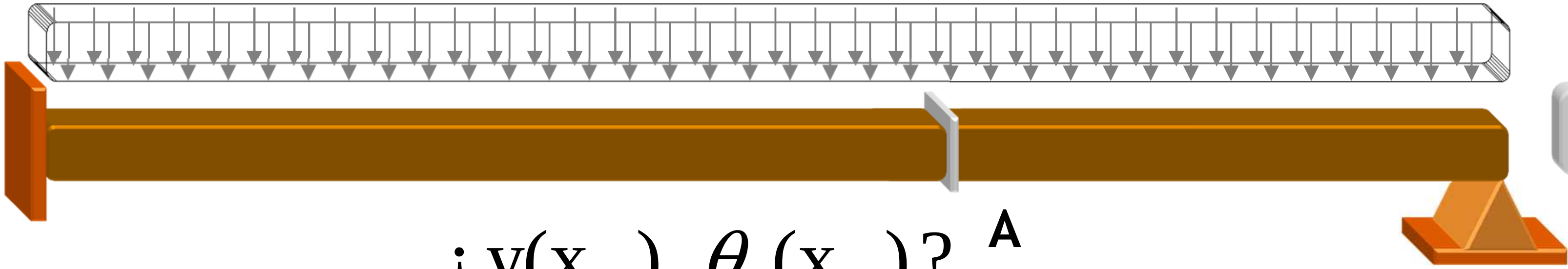
Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I



$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

$$\sum_i R_i\cdot 0-1\,y(x_A)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

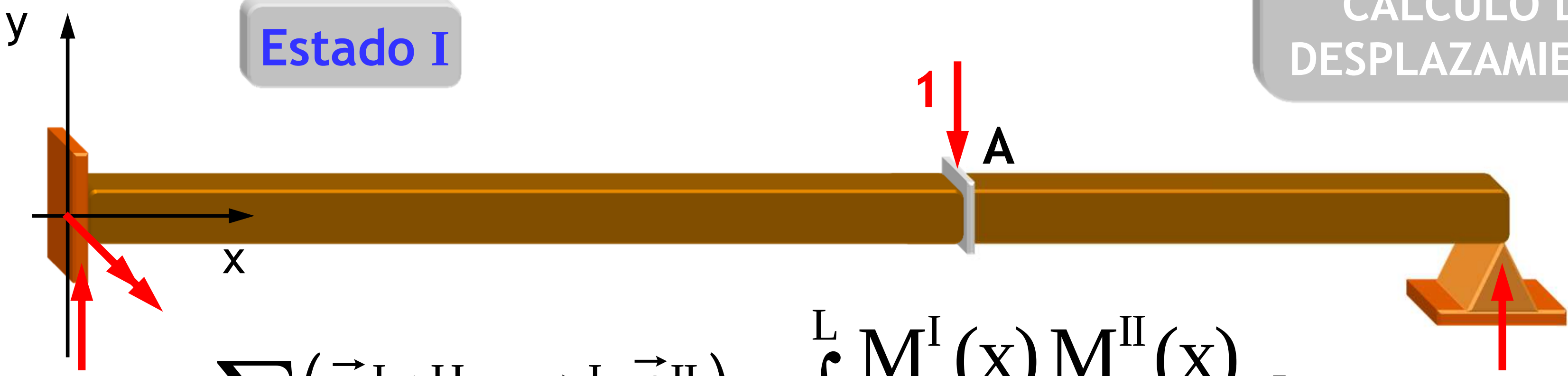


Estado II

$$¿\, y(x_A),\ \theta_z(x_A)\, ?$$

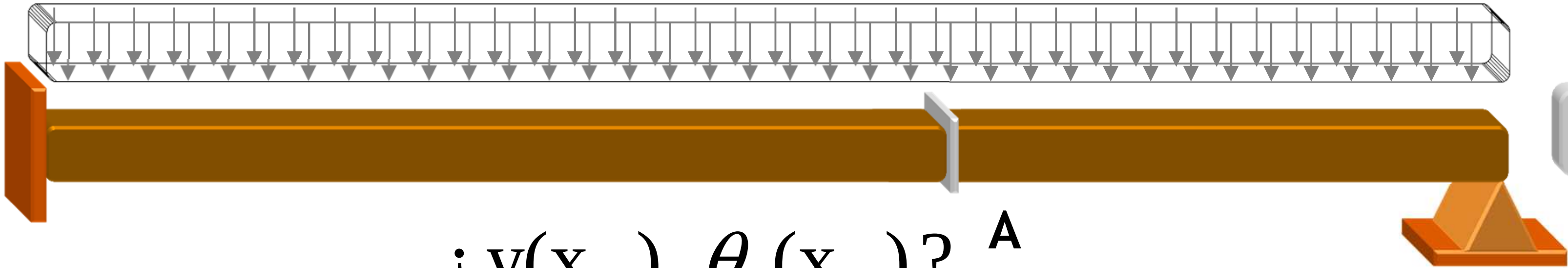
Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I



$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

$$\sum_i \cancel{R_i}\cdot 0-1y(x_A)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

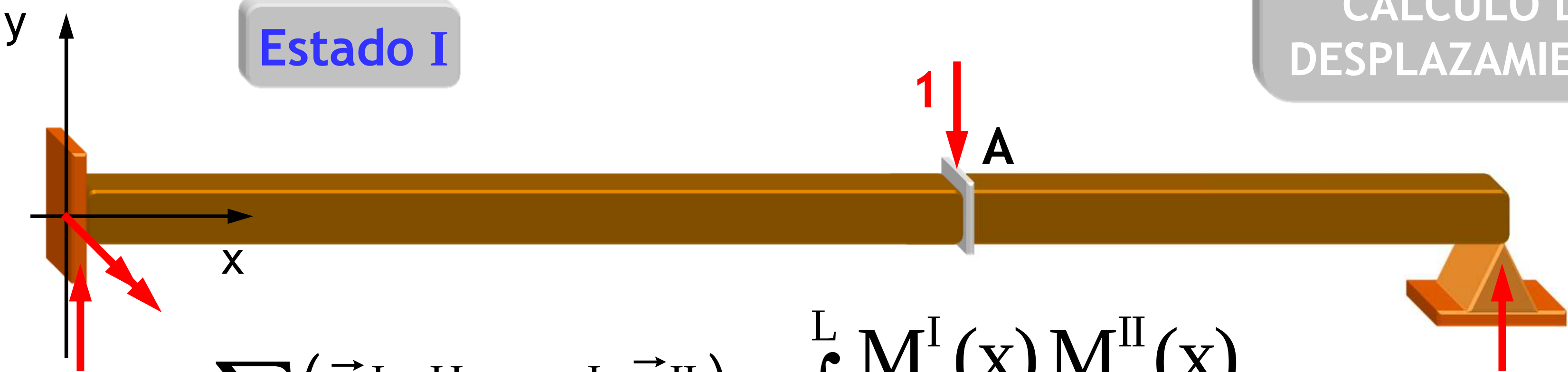


Estado II

$$¿\, y(x_A),\ \theta_z(x_A)\, ?$$

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I

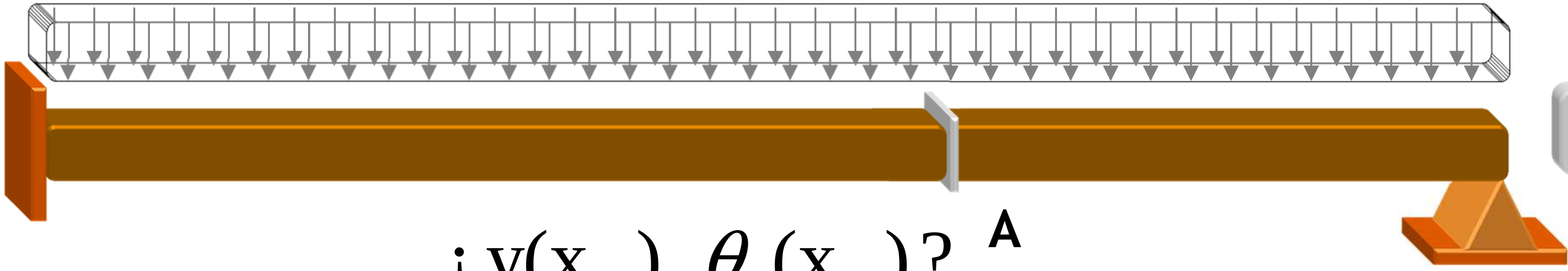


$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

$$-1y(x_A)=\int_0^L \frac{\overset{?}{M_z^{I}(x)}\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

¿Resolución de problema hiperestático?

Open Course Ware

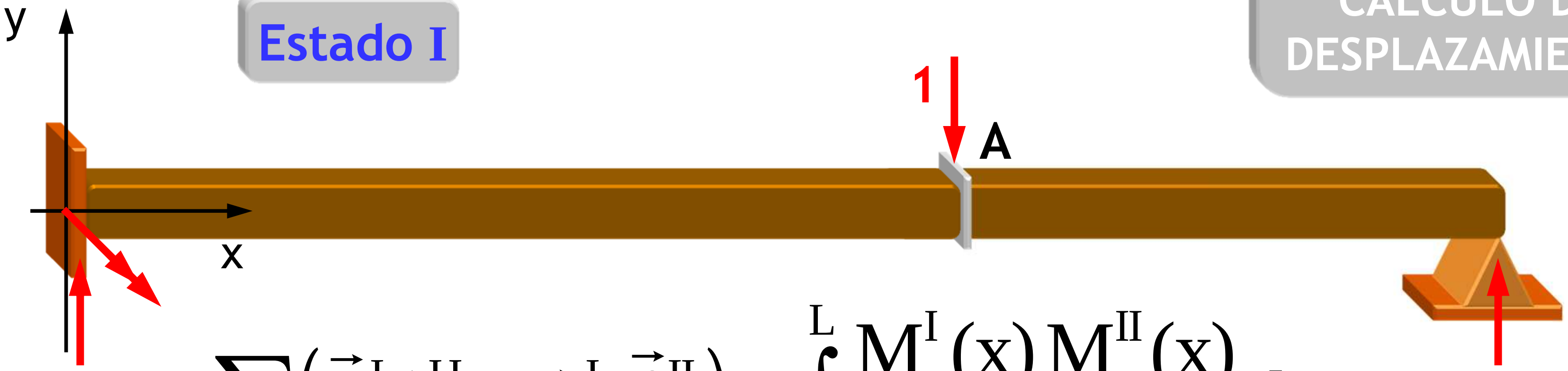


Estado II

$$¿\, y(x_A),\ \theta_z(x_A)\,?$$

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I



$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

?

$$-1\,y(x_A)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

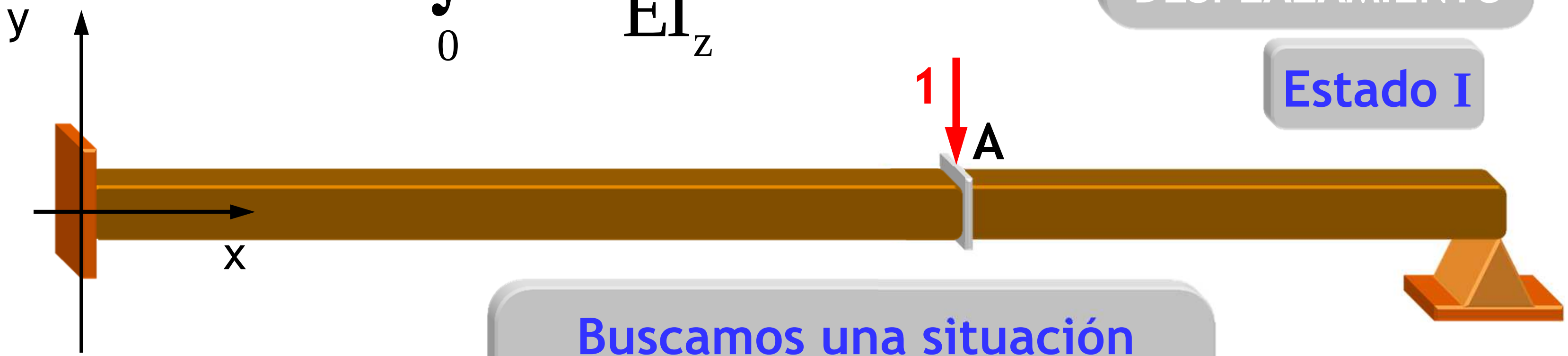
¿Re... e... problem... ático?

NO !!!

$$-1y(x_A) = \int_0^L \frac{M_z^I(x)\, M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I

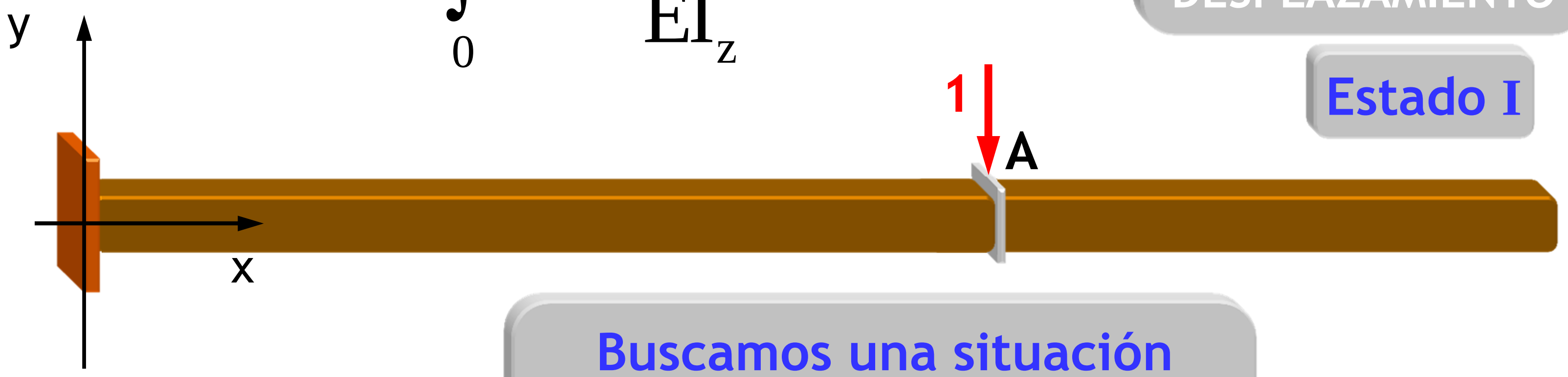


Buscamos una situación de equilibrio contenida en el sistema hiperestático

$$-1y(x_A)=\int_0^L \frac{M_z^I(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}dx$$

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I

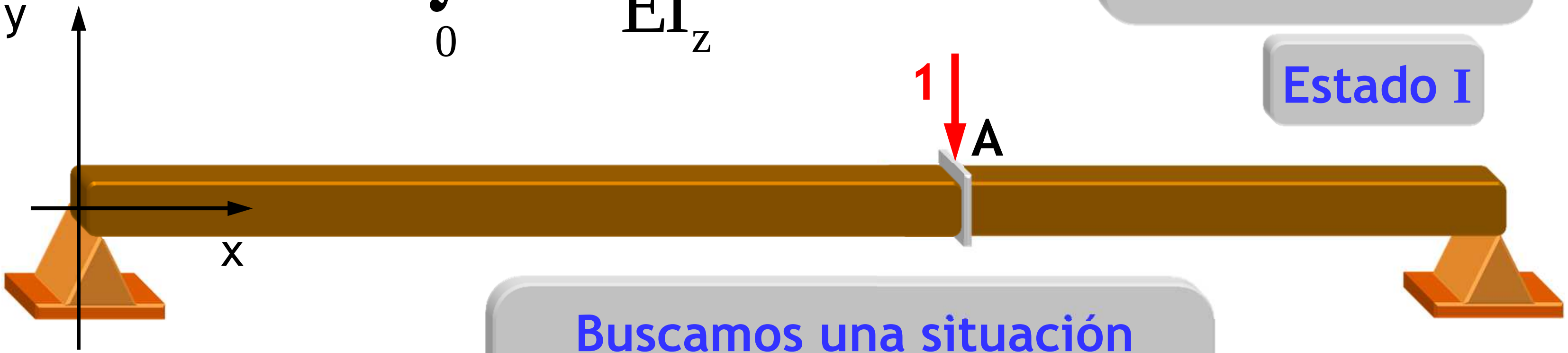


Buscamos una situación de equilibrio contenida en el sistema hiperestático

Aplicación del TTV CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

$$-1y(x_A) = \int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\, M_z^{II}(x)}{EI_z}\, dx$$

Estado I

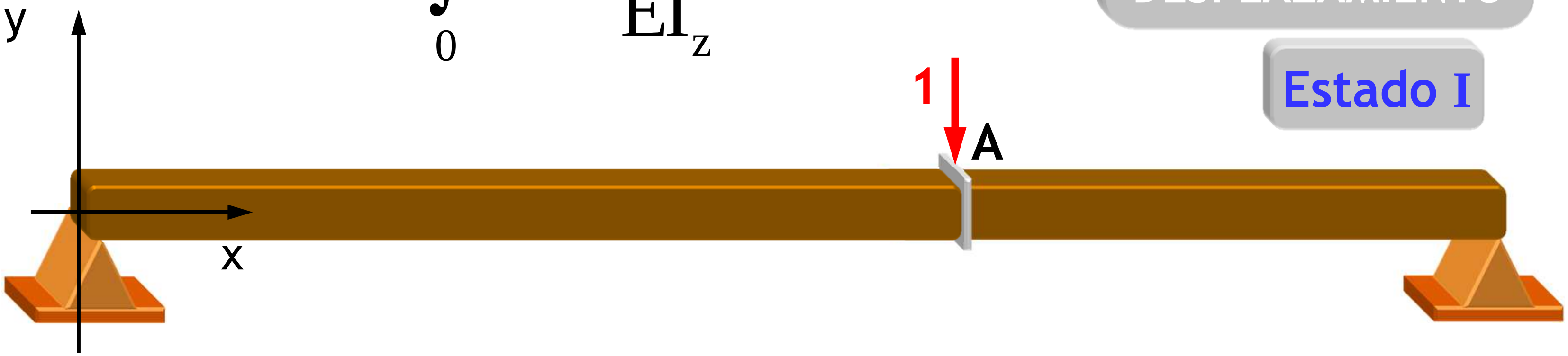


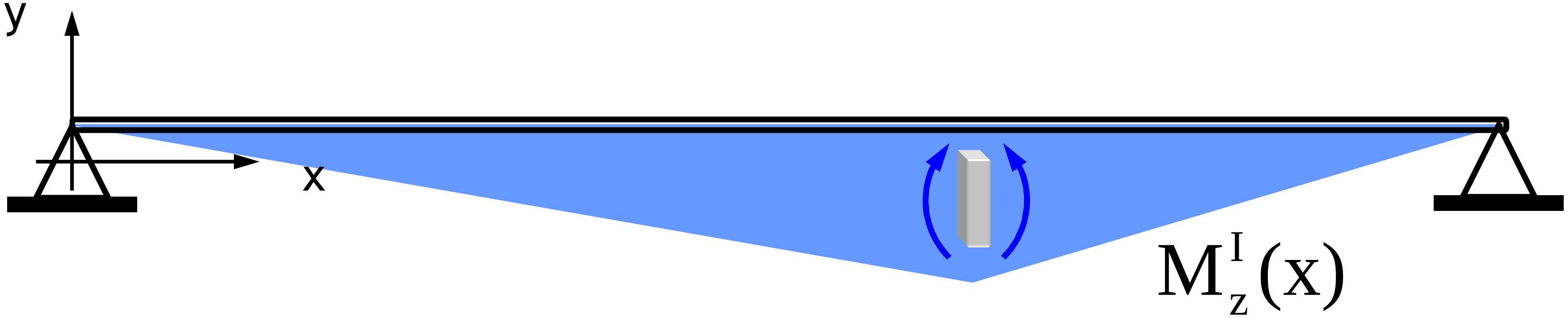
Buscamos una situación de equilibrio contenida en el sistema hiperestático

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I

$$-1y(x_A) = \int_0^L \frac{M_z^I(x)\, M_z^{II}(x)}{EI_z}\, dx$$

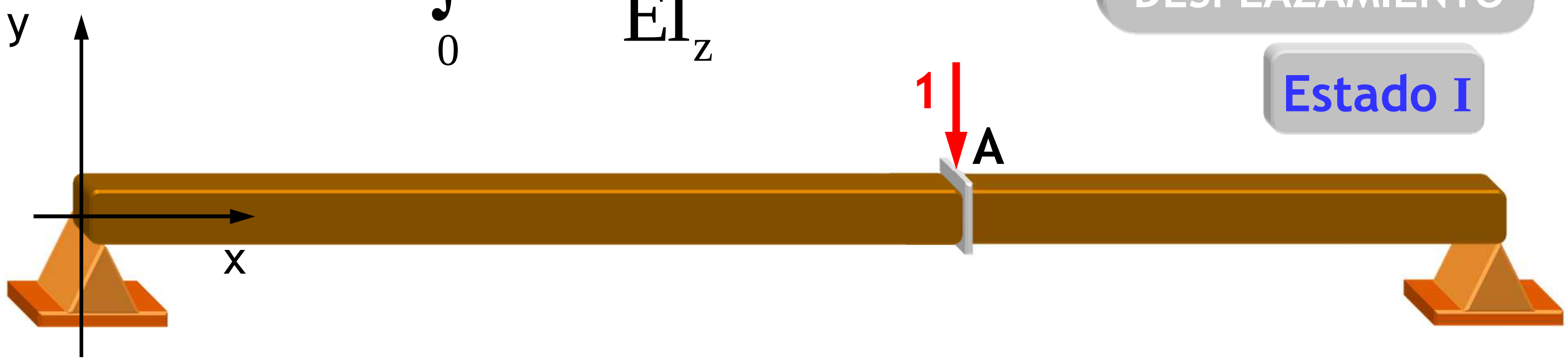


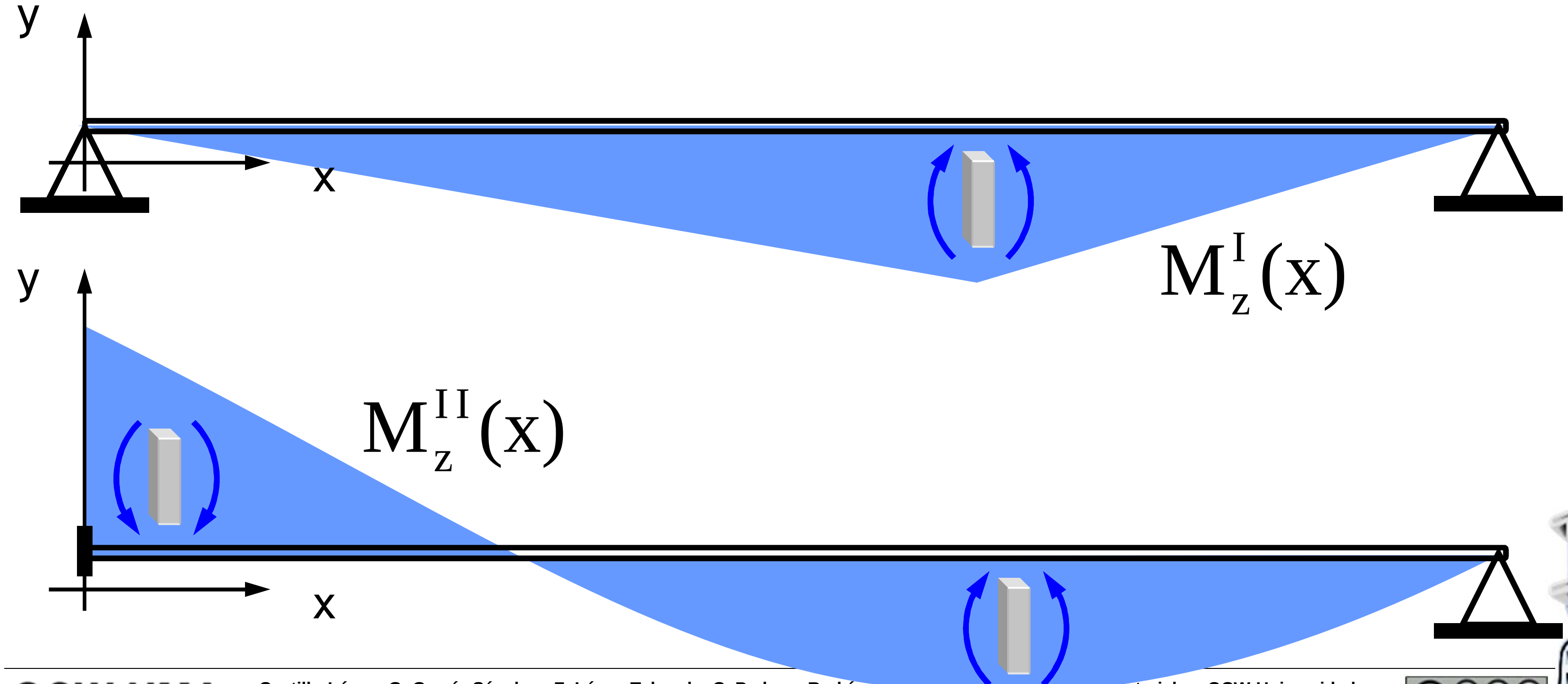


$$-1y(x_A) = \int_0^L \frac{M_z^I(x)\, M_z^{II}(x)}{EI_z}\, dx$$

Aplicación del TTV CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTO

Estado I

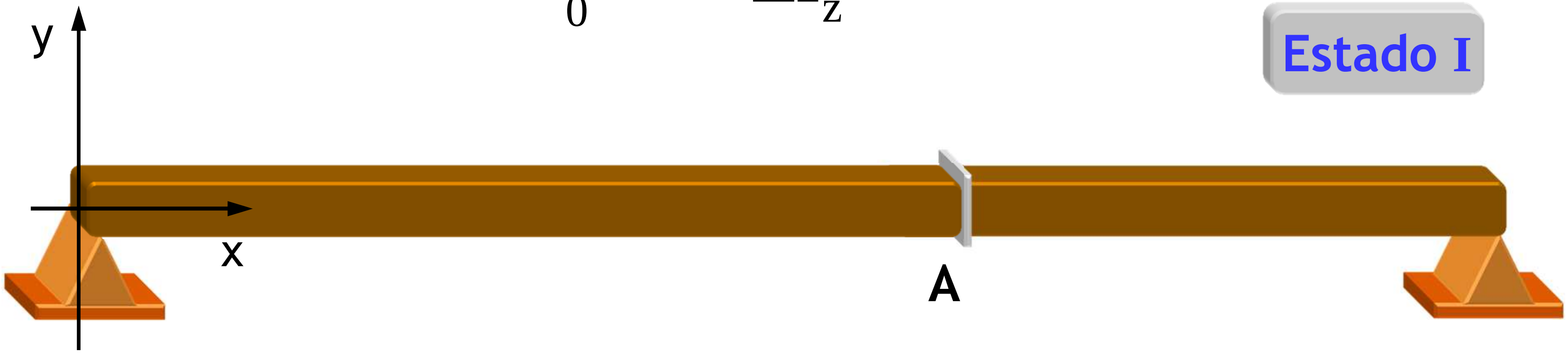




$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=\int_{0}^{L}\frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}dx$$

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE GIRO

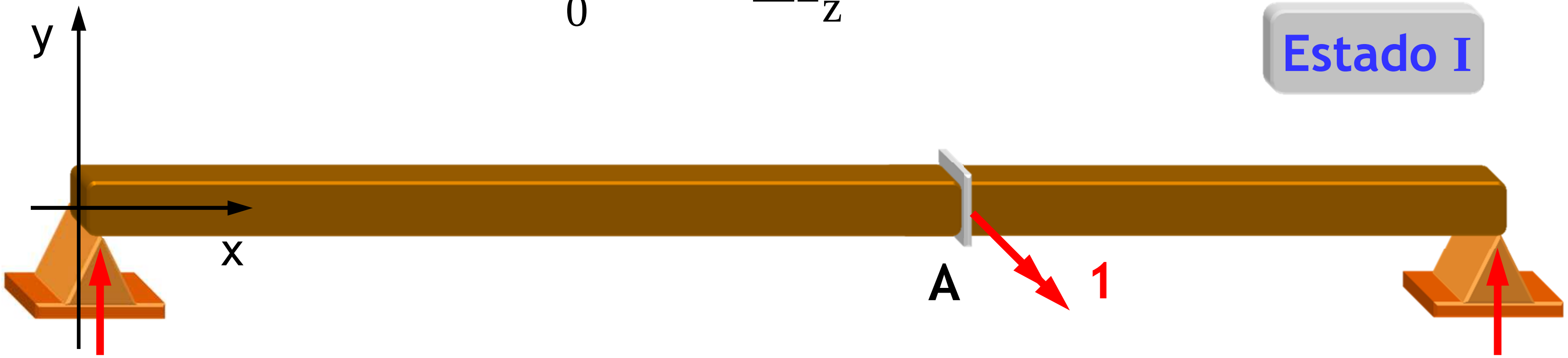
Estado I



$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\,\vec{\theta}^{II}\right)=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

Aplicación del TTV
CÁLCULO DE GIRO

Estado I

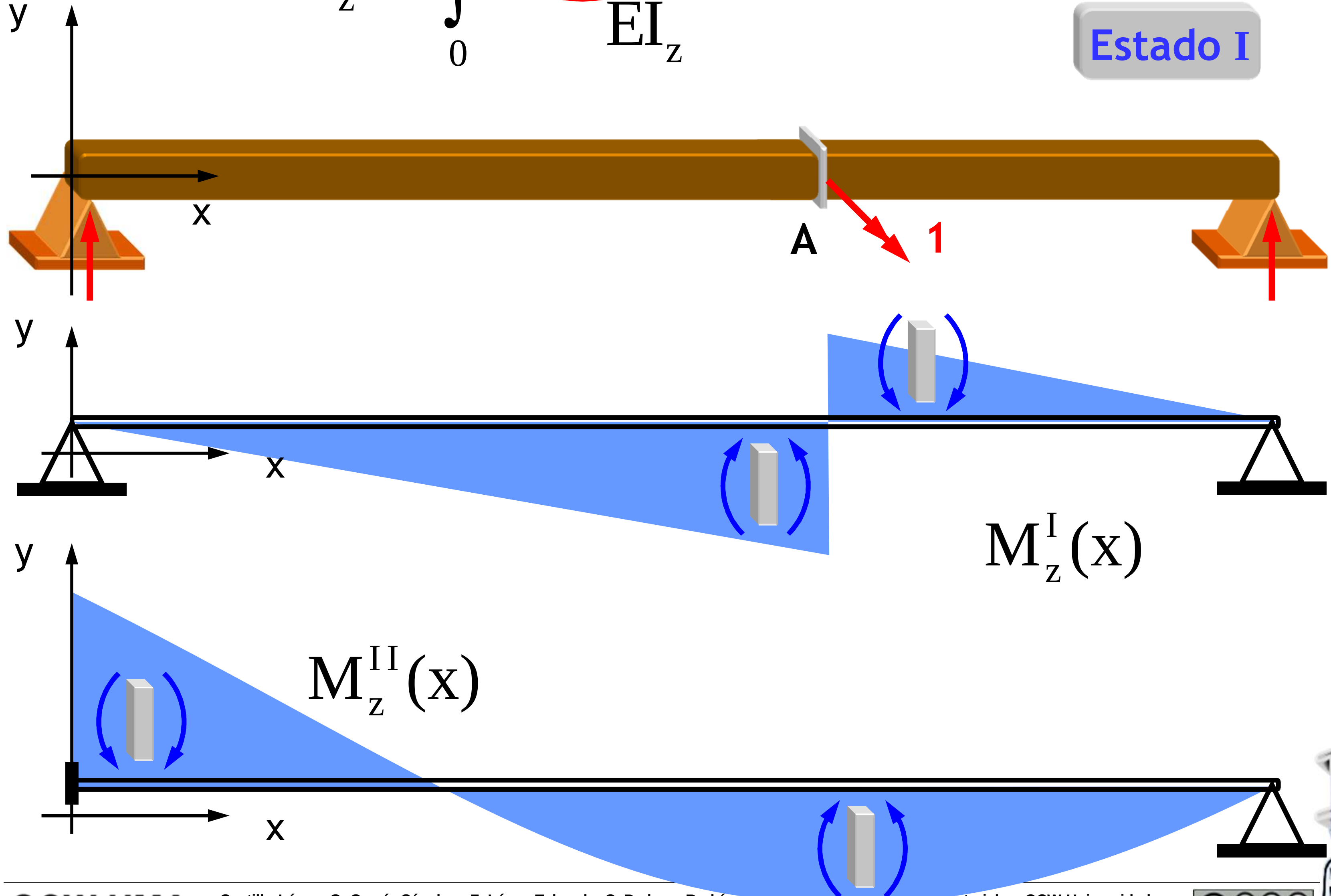


$$1\,\theta_z^{II}=\int_0^L \frac{M_z^{I}(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

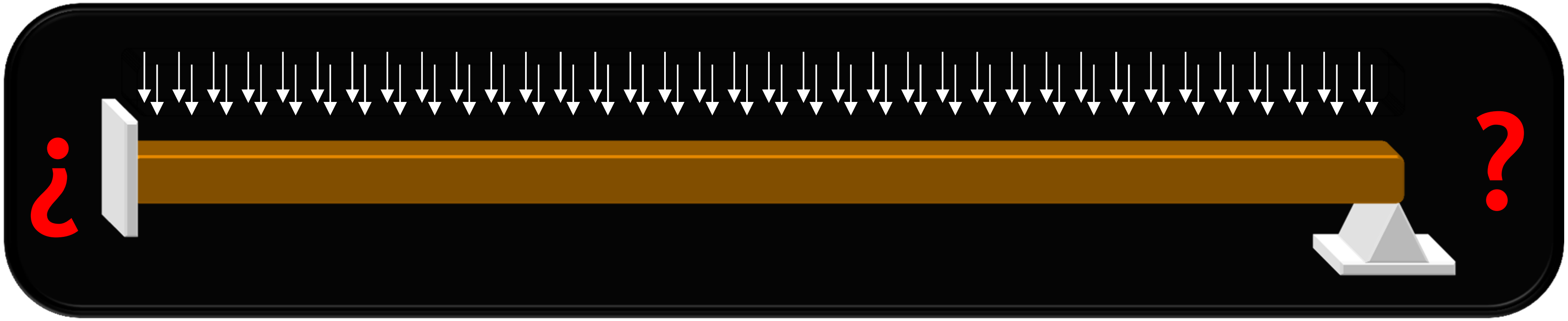
Aplicación del TTV
CÁLCULO DE GIRO

Estado I

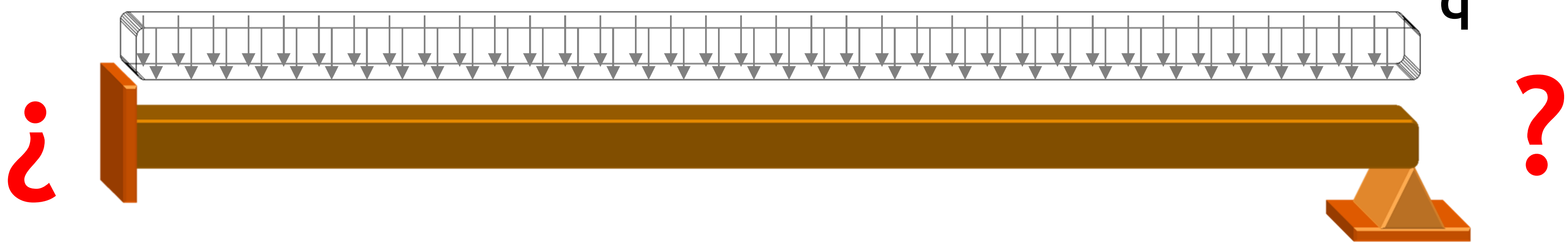
$$1\,\theta_z^{II} = \int_0^L \frac{M_z^I(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$



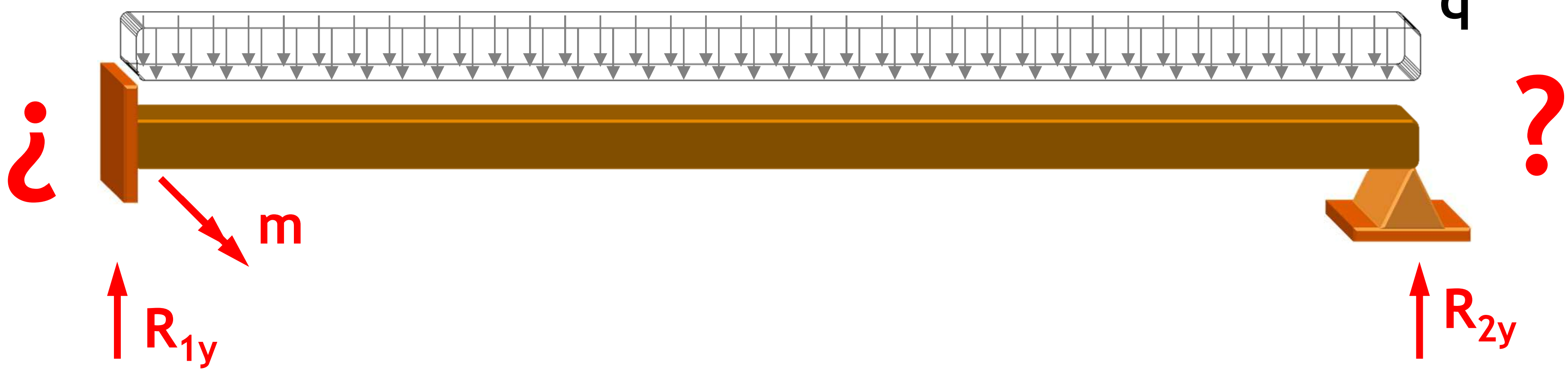
Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas



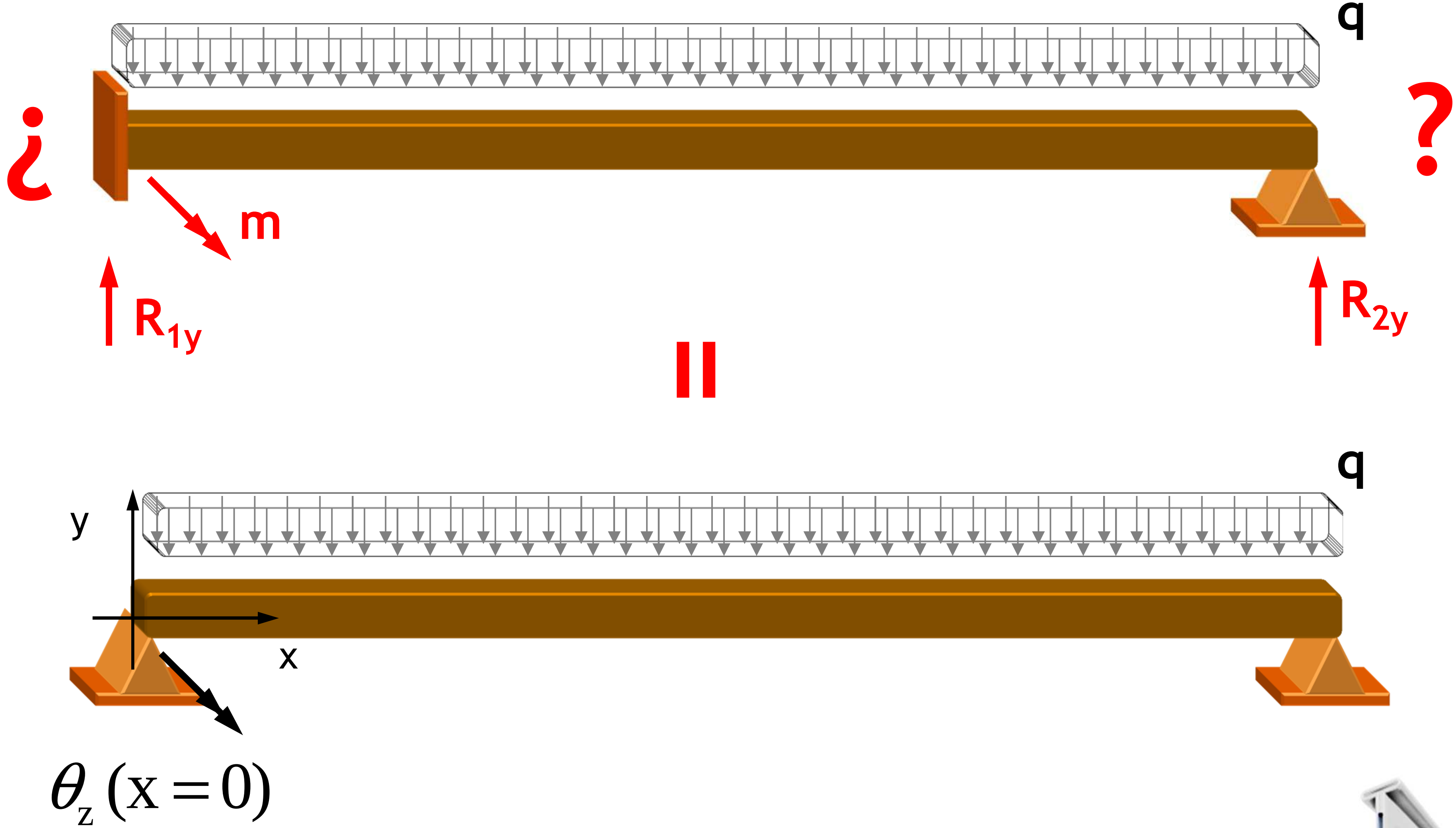
Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas



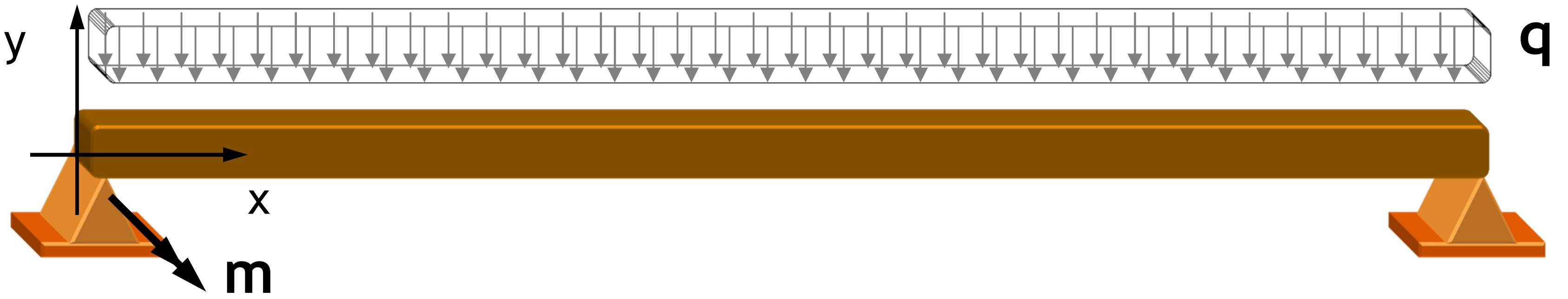
Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas



Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas

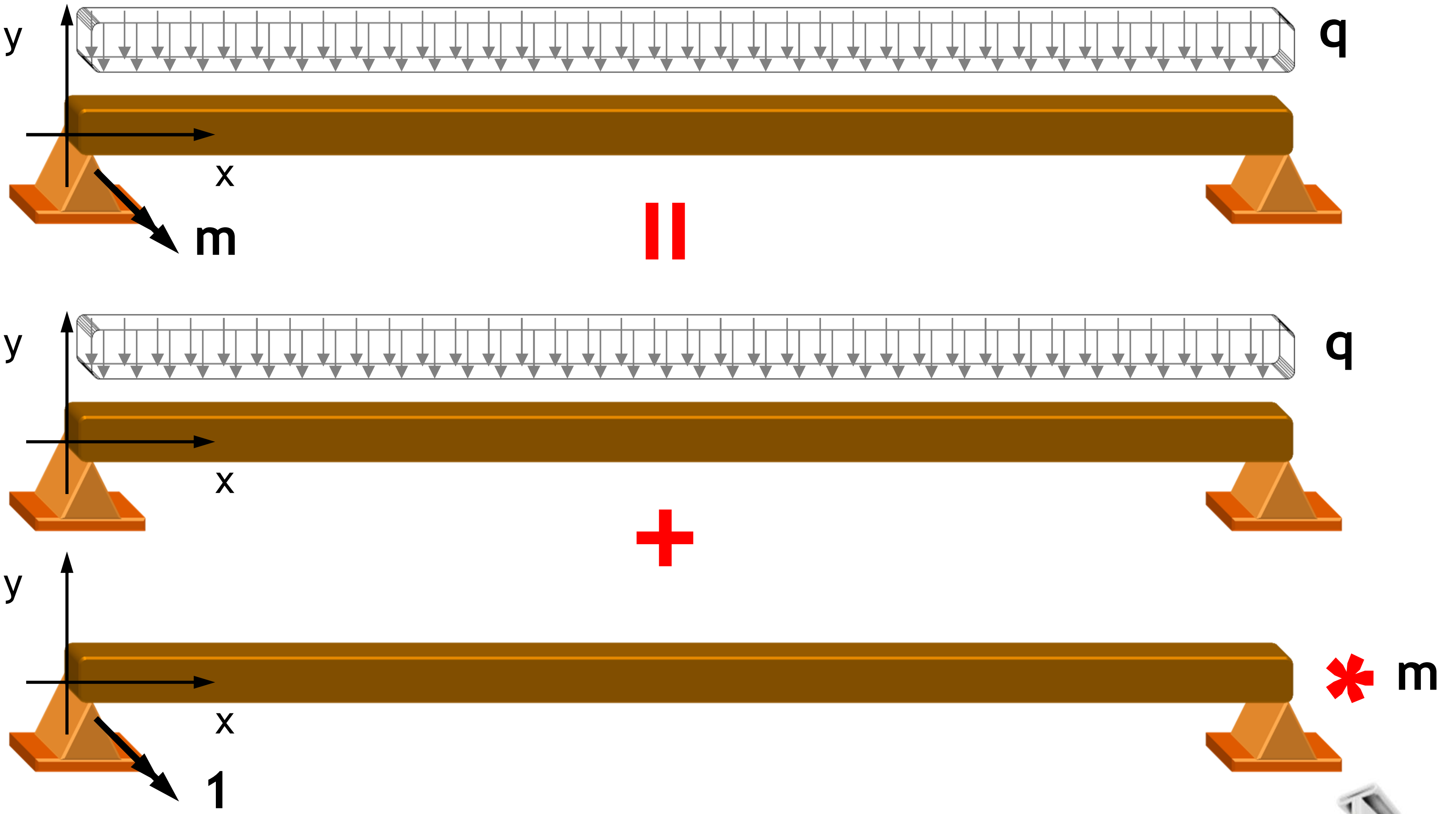


Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas



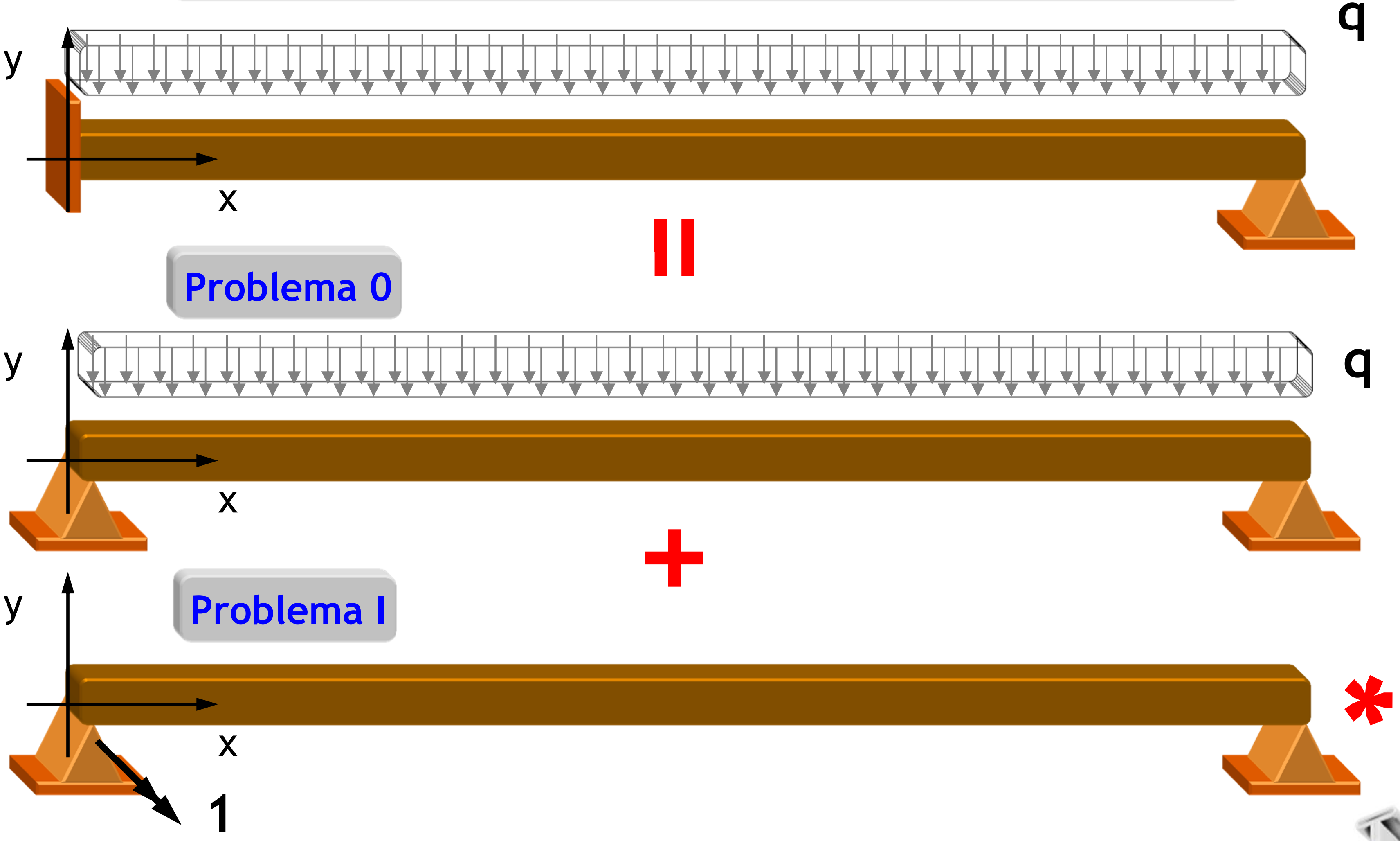
Open Course Ware

Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas

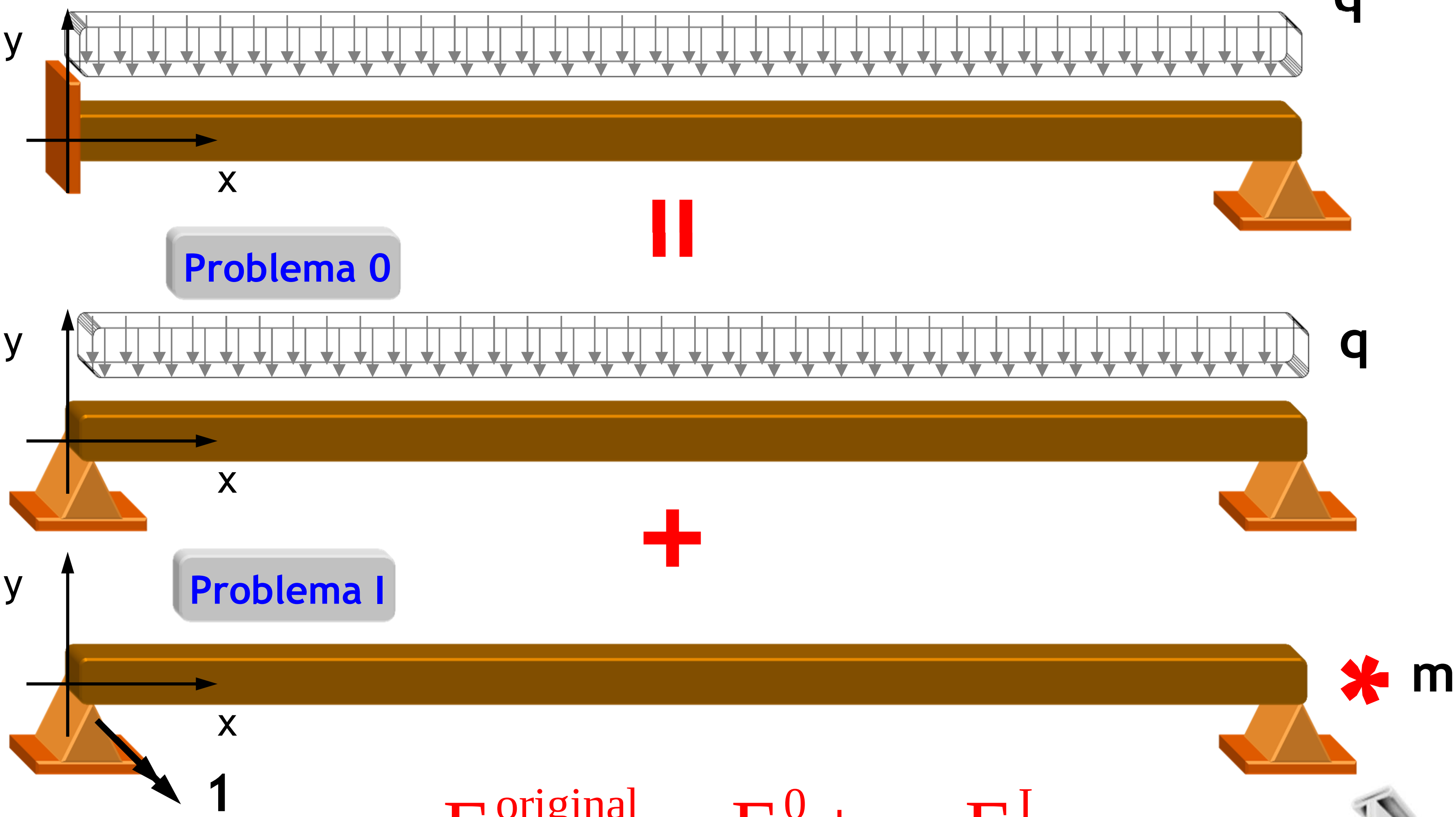


Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas

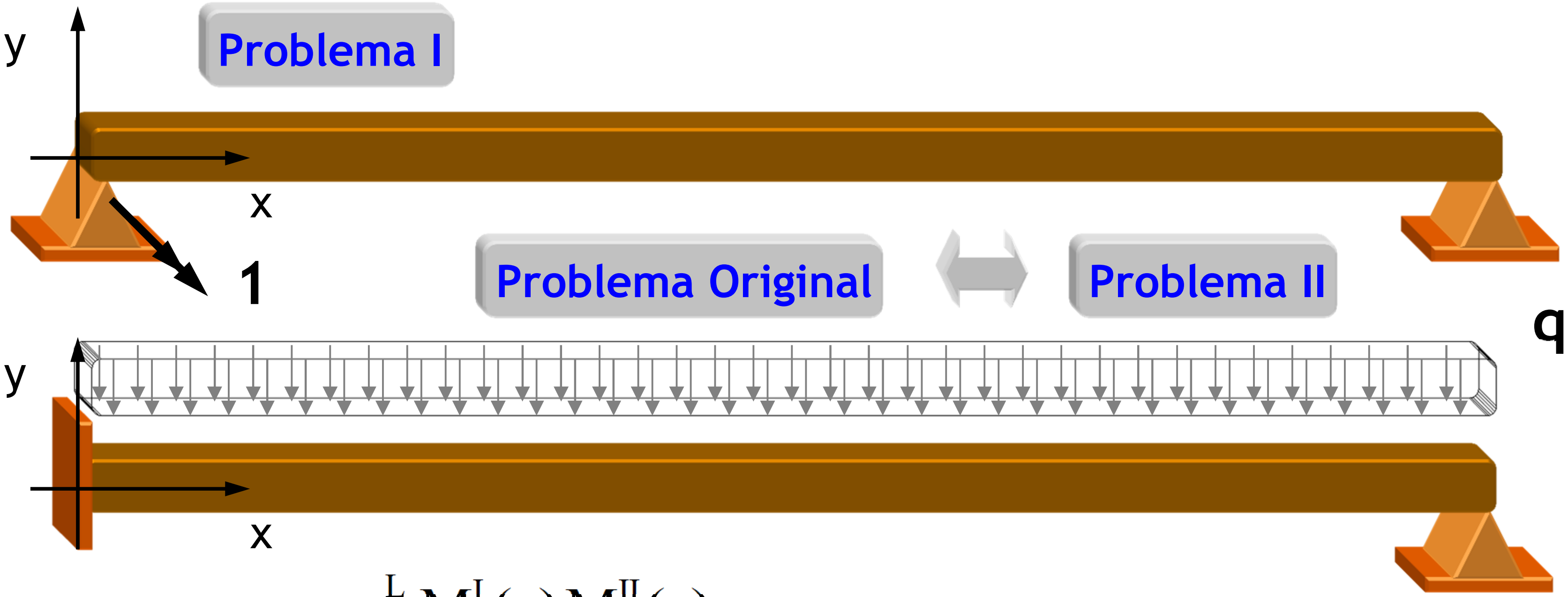


Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas



$$E^{original} = E^{0} + m\,E^{I}$$

Aplicación del TTV al cálculo de incógnitas hiperestáticas

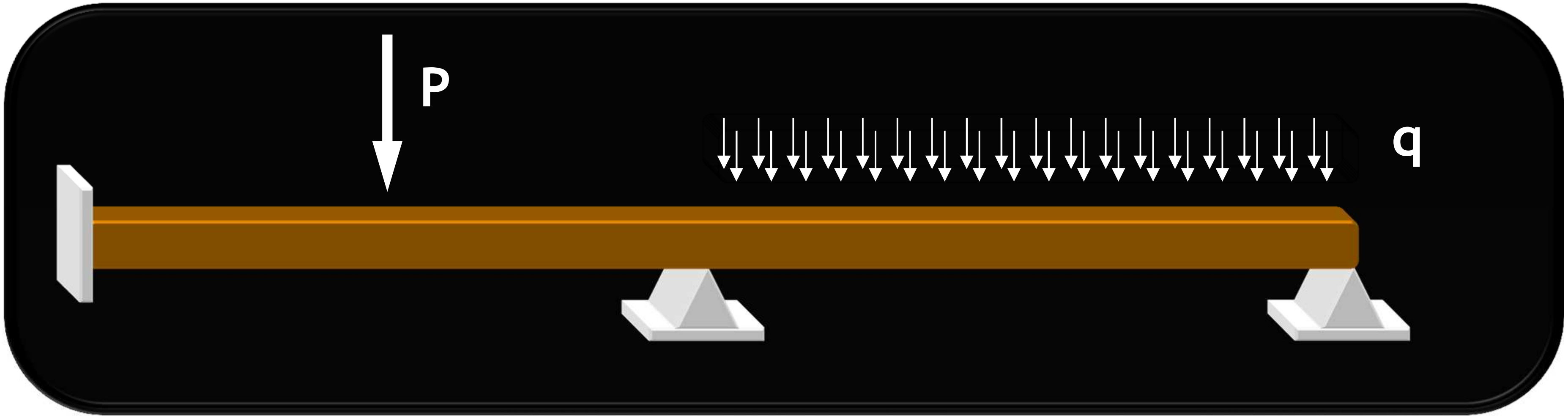


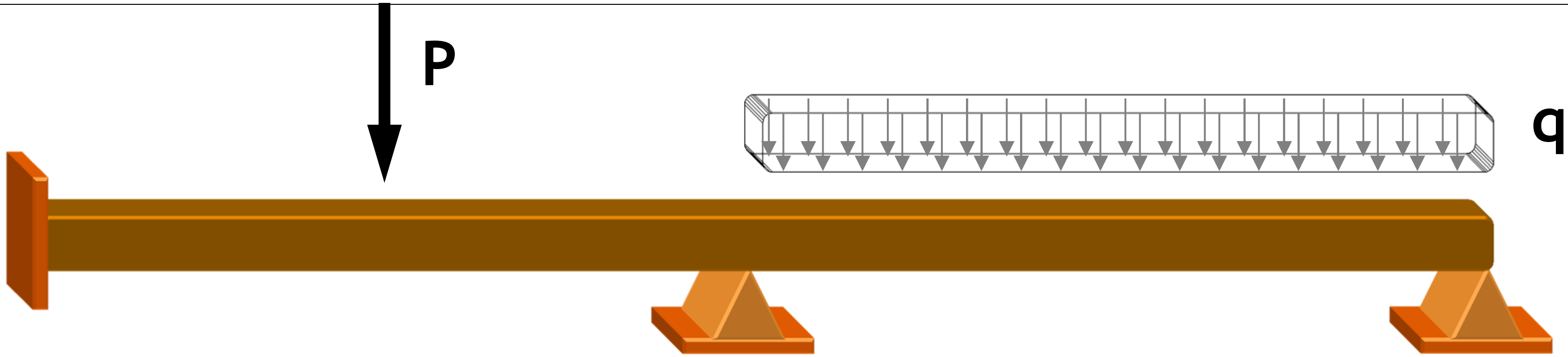
$$\sum\left(\vec{F}^{I}\vec{u}^{II}+\vec{m}^{I}\vec{\theta}^{II}\right)=\int_0^L \frac{M_z^I(x)\,M_z^{II}(x)}{EI_z}\,dx$$

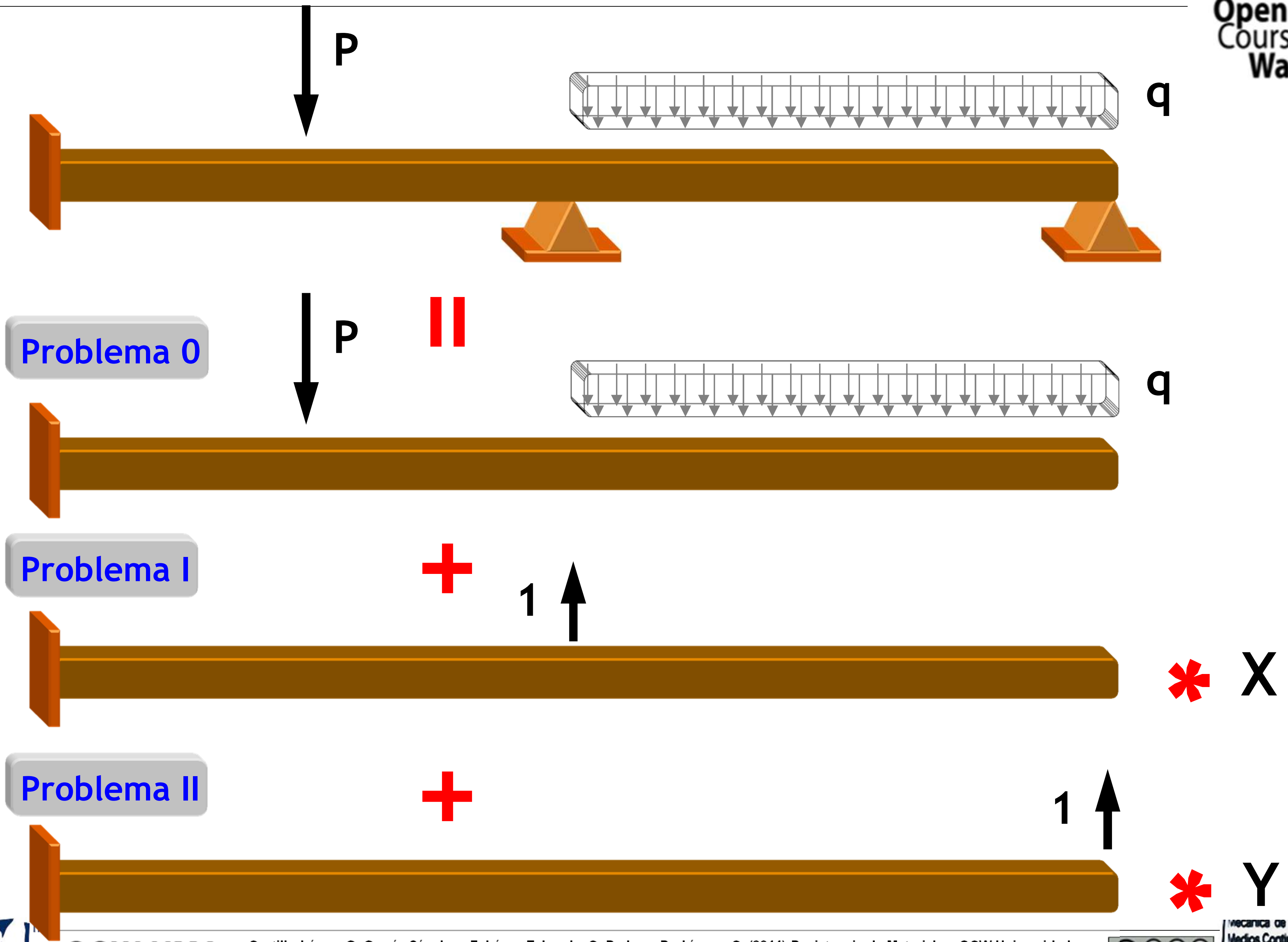
$$1\theta_z^{original}=\int_0^L \frac{M_z^I(x)\left(M_z^0(x)+m\,M_z^I(x)\right)}{EI_z}\,dx$$

$$\int_0^L \frac{M_z^I(x)\,M_z^0(x)}{EI_z}\,dx+m\int_0^L \frac{\left(M_z^I(x)\right)^2}{EI_z}\,dx=0$$

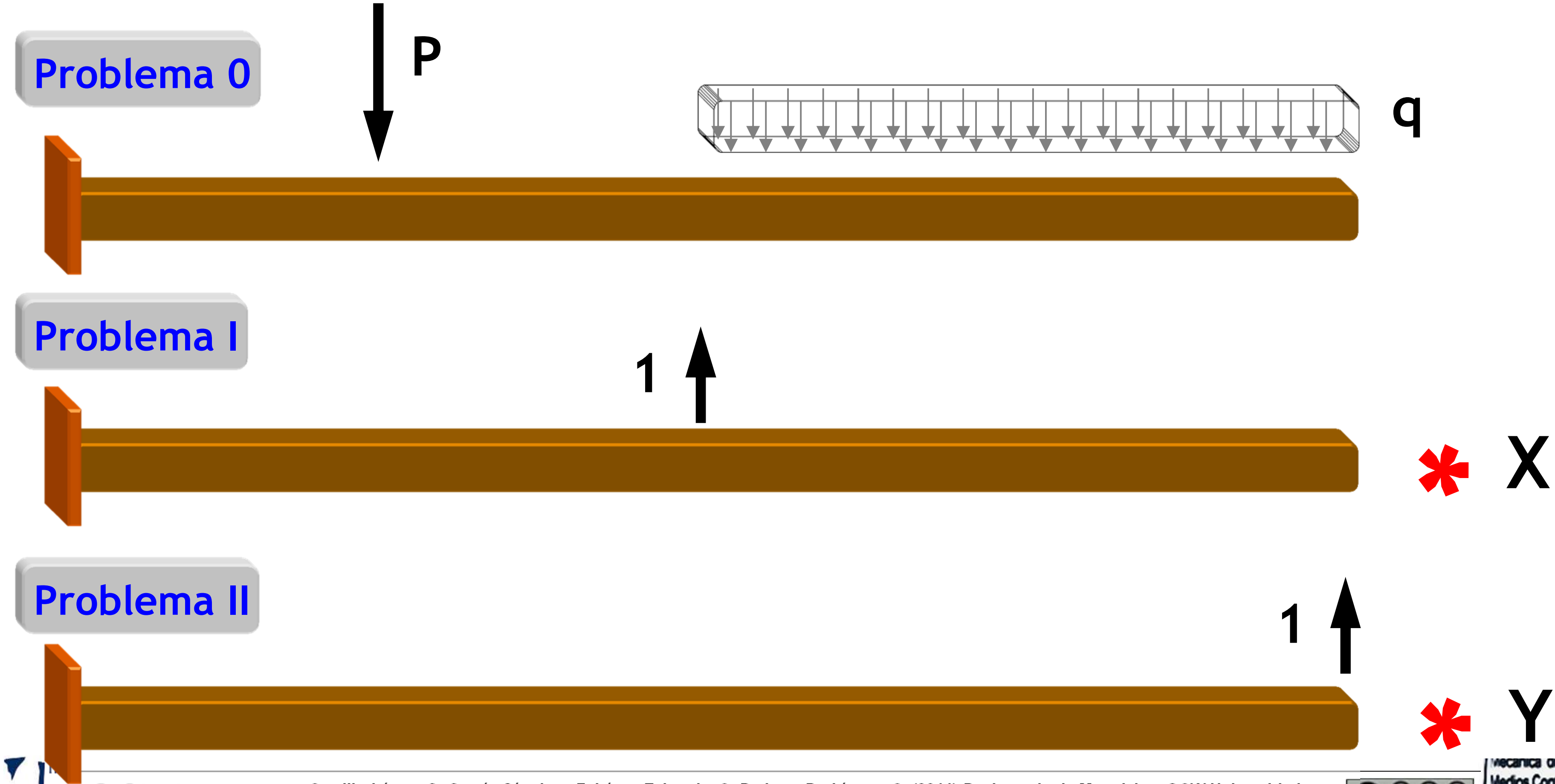
Otro ejemplo




P
q


P
q
P
=
q
Problema 0
+
1
Problema I
* X
+
1
Problema II
* Y

$$E^{\text{original}} = E^{0} + X\,E^{I} + Y\,E^{II}$$



$$E^{original} = E^{0} + X\ E^{I} + Y\ E^{II}$$

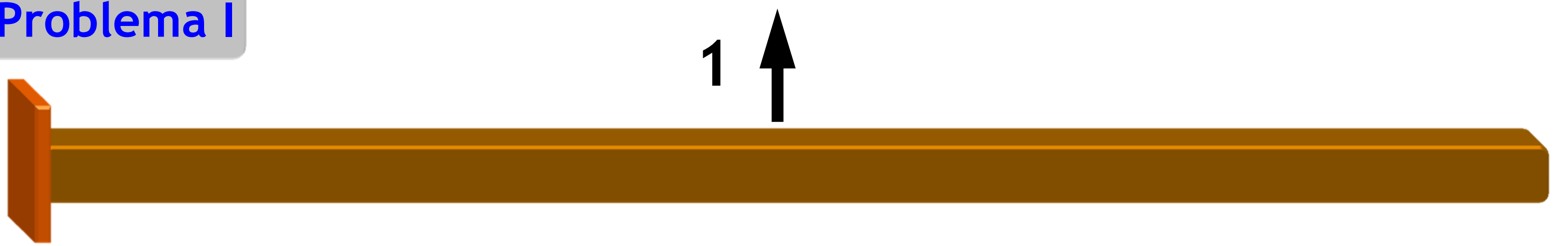
TTV I/Original

$$0 = \int_0^L \frac{M_z^I(x)\left(M_z^0(x) + X\,M_z^I(x) + Y\,M_z^{II}(x)\right)}{EI_z}dx$$

TTV II/Original

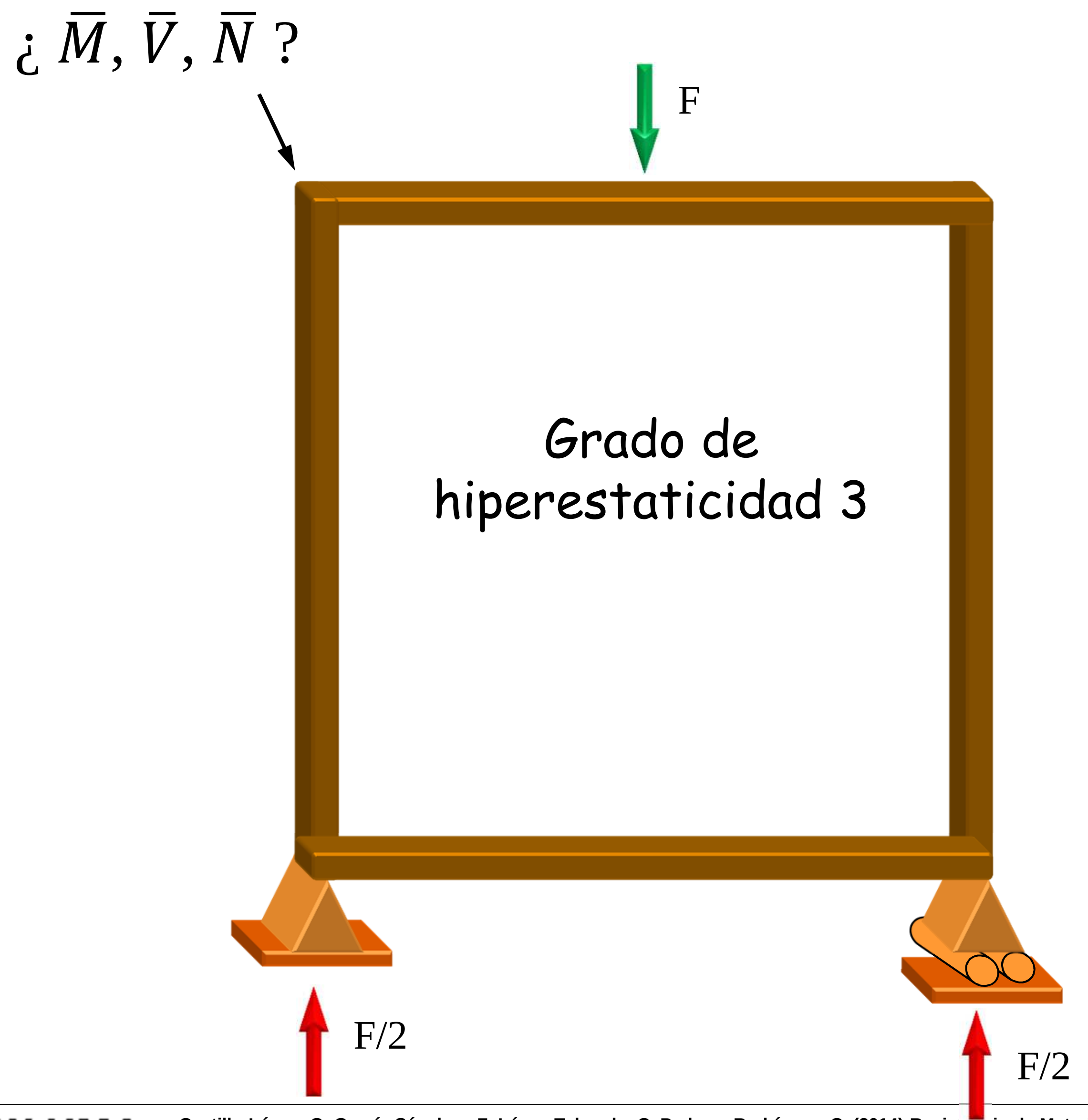
$$0 = \int_0^L \frac{M_z^{II}(x)\left(M_z^0(x) + X\,M_z^I(x) + Y\,M_z^{II}(x)\right)}{EI_z}dx$$

Problema I

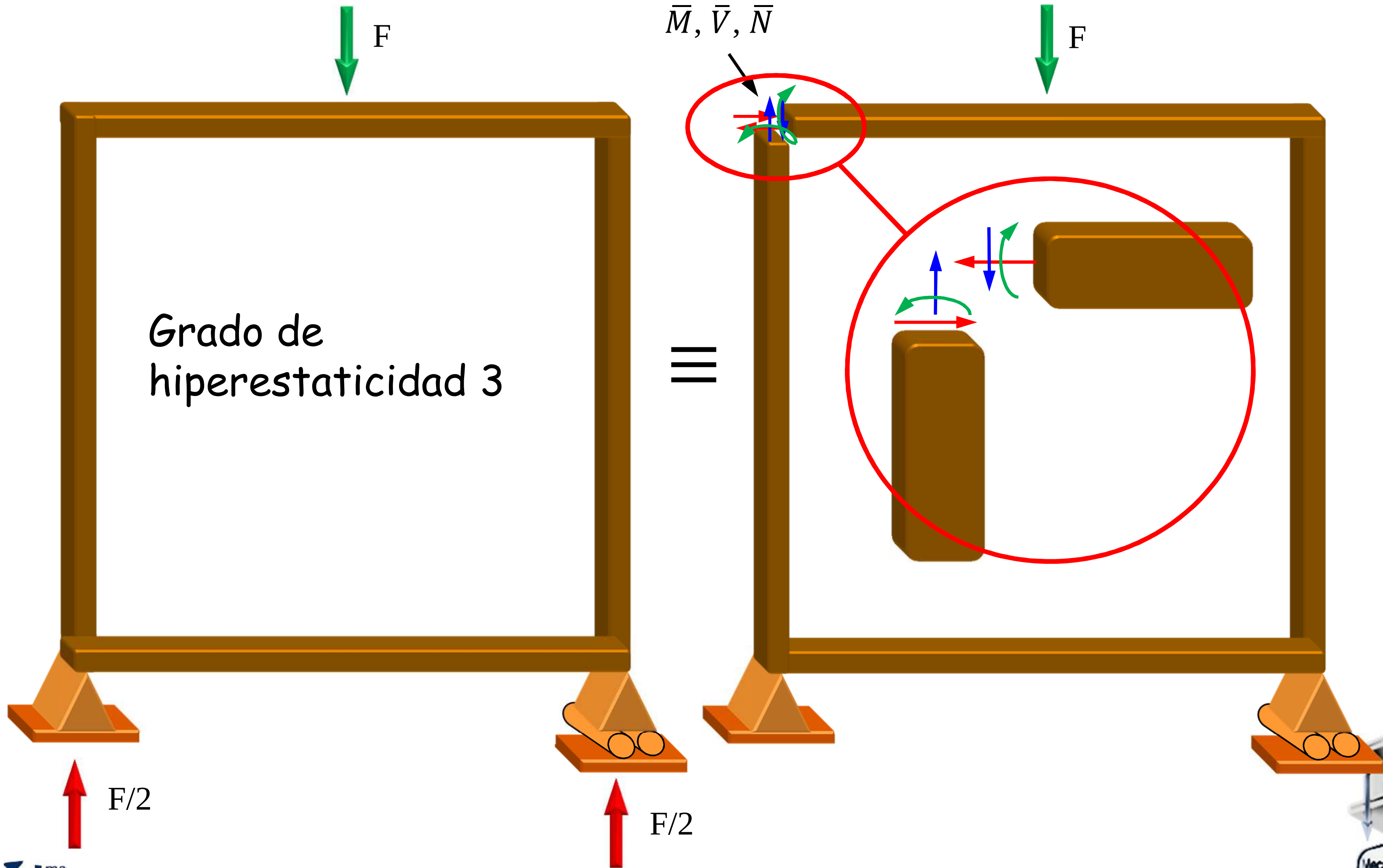


Problema II

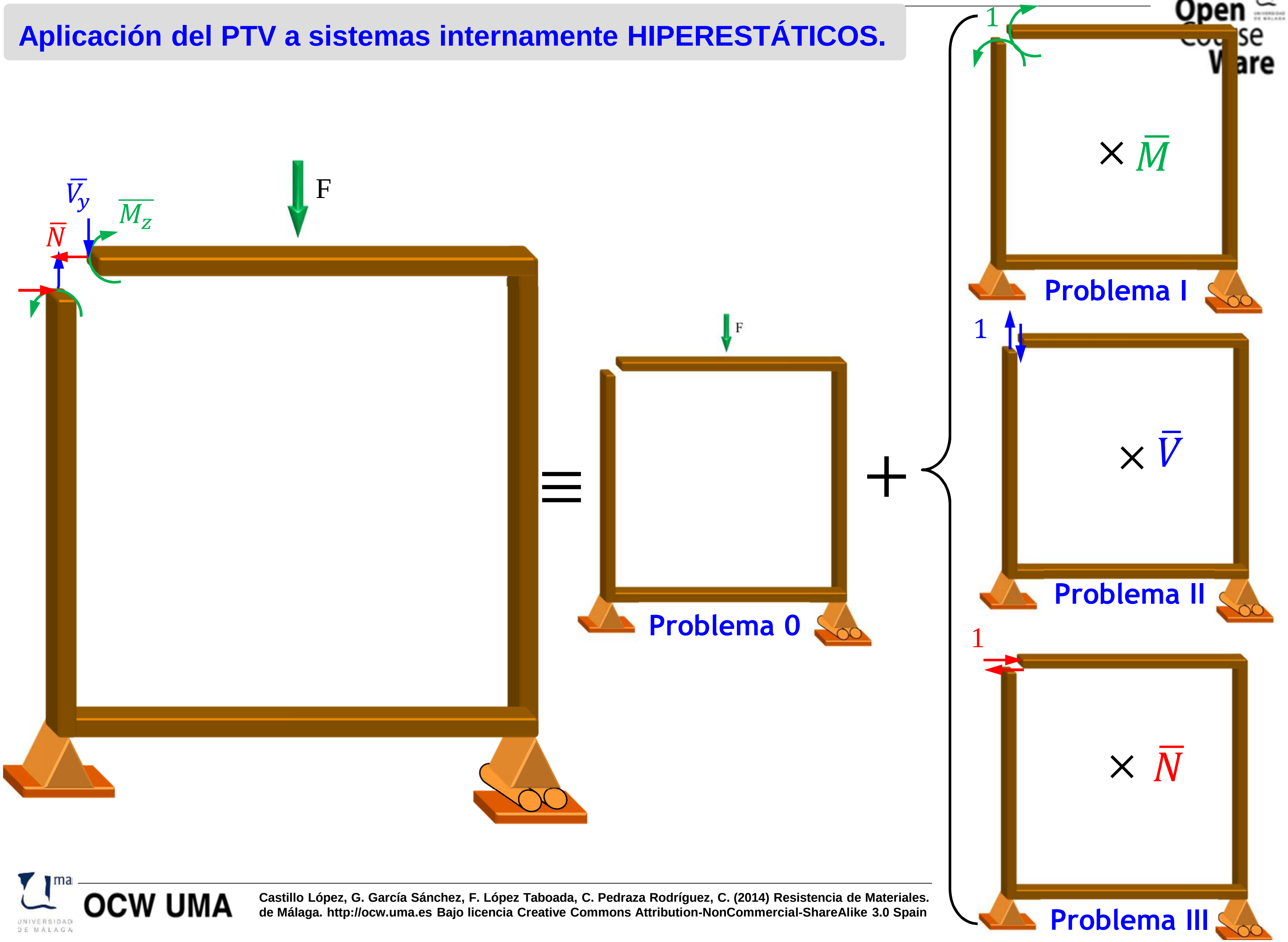
Aplicación del PTV a sistemas internamente HIPERESTÁTICOS.



Aplicación del PTV a sistemas internamente HIPERESTÁTICOS.



Aplicación del PTV a sistemas internamente HIPERESTÁTICOS.



Aplicación del PTV a sistemas internamente HIPERESTÁTICOS.

TTV I/Original

$$0 = \sum_b \left(\int_0^{L_b} \frac{M_z^I(x)[M_z^0(x) + \bar{M} M_z^I(x) + \bar{V} M_z^{II}(x) + \bar{N} M_z^{III}(x)]}{EI_b} dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^{L_b} \frac{N_z^I(x)[N_z^0(x) + \bar{M} N_z^I(x) + \bar{V} N_z^{II}(x) + \bar{N} N_z^{III}(x)]}{EA_b} dx \right)$$

TTV II/Original

$$0 = \sum_b \left(\int_0^{L_b} \frac{M_z^{II}(x)[M_z^0(x) + \bar{M} M_z^I(x) + \bar{V} M_z^{II}(x) + \bar{N} M_z^{III}(x)]}{EI_b} dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^{L_b} \frac{N_z^{II}(x)[N_z^0(x) + \bar{M} N_z^I(x) + \bar{V} N_z^{II}(x) + \bar{N} N_z^{III}(x)]}{EA_b} dx \right)$$

TTV III/Original

$$0 = \sum_b \left(\int_0^{L_b} \frac{M_z^{III}(x)[M_z^0(x) + \bar{M} M_z^I(x) + \bar{V} M_z^{II}(x) + \bar{N} M_z^{III}(x)]}{EI_b} dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^{L_b} \frac{N_z^{III}(x)[N_z^0(x) + \bar{M} N_z^I(x) + \bar{V} N_z^{II}(x) + \bar{N} N_z^{III}(x)]}{EI_b} dx \right)$$