

FLEXIÓN DESVIADA¹**1. ASPECTOS TEÓRICOS****1.1. De los momentos de segundo orden y los ejes principales de inercia**

Sea una sección plana de área A , como la de la figura 1, definido cualquier pareja de ejes perpendiculares en la sección, p. ej. s y t o y y z , se definen los momentos de inercia y el producto de inercia (en general, los momentos de segundo orden), respecto de esos ejes, en la forma que se indica en las expresiones (1).

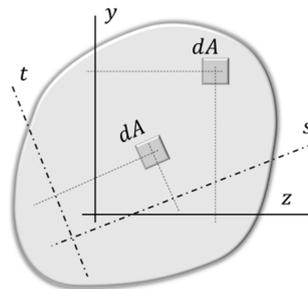


Figura 1. Esquema de sección plana genérica con dos sistemas de referencia distintos

$$I_s = \int_A t^2 dA ; I_t = \int_A s^2 dA ; I_z = \int_A y^2 dA ; I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_{st} = \int_A st dA ; I_{yz} = \int_A yz dA$$
(1)

Donde

- I_s , I_t , I_y , e I_z son, respectivamente los momentos de inercia respecto de los ejes s , t , y y z representados en la figura 1.
- I_{st} e I_{yz} son, respectivamente los productos de inercia respecto de los mismos ejes.
- Las integrales se extienden a toda el área de la sección A .

Si se consideran los infinitos sistemas de referencia posibles en la sección de la figura 1, con un origen de referencia en común; no es difícil demostrar que los valores de los infinitos momentos de segundo orden obtenidos definen un lugar geométrico en un plano en el que representásemos, en abscisas, los momentos de inercia y, en ordenadas, los productos de inercia.

Dicho lugar geométrico es una circunferencia, análoga a la circunferencia de Möhr definida en elasticidad plana, y con idéntica relación que allí para obtener resultados (momentos y productos de inercia en el caso que nos ocupa) frente a cambios de sistema de referencia, ver figura 2.

¹ Dependiendo de los textos, también se pueden encontrar otras denominaciones: esviada, disimétrica, no simétrica, sesgada...

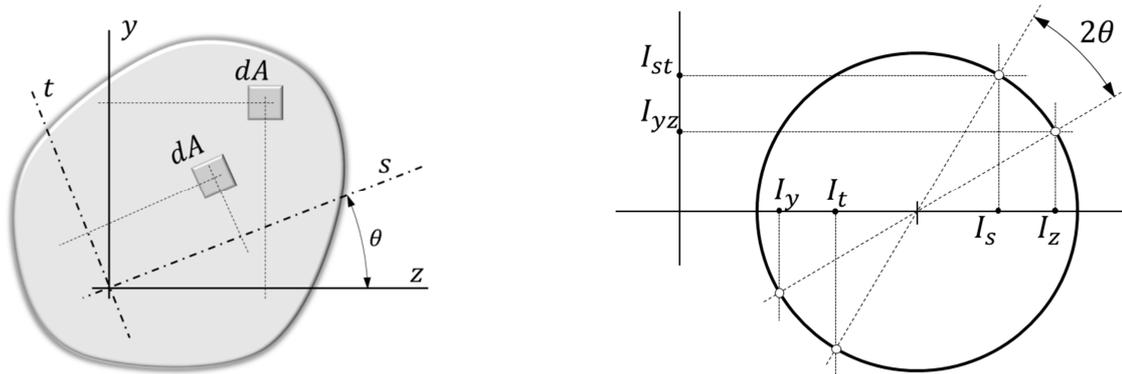


Figura 2. Relación entre el giro del sistema de referencia y el cambio en los momentos de segundo orden.

Observando la figura 2 es evidente que existen unos ejes para los cuales el producto de inercia se anula, dichos ejes reciben el nombre de ejes principales de inercia. En ese sistema de referencia los momentos de inercia adquieren valores máximo y mínimo.

1.2. Del fenómeno de la flexión desviada

Decimos que una barra prismática se encuentra sometida a flexión desviada si ésta es producida por una carga que actúa en un plano que no contiene a los ejes principales de inercia de la sección de la barra.

Desde el punto de vista de la deformación, la característica de este tipo de flexión es que los desplazamientos relativos, que tienen lugar en la barra, se producirán en direcciones diferentes de la dirección de la carga. Este hecho habrá de quedar suficientemente demostrado tras el siguiente razonamiento teórico.

Supónganse, por ejemplo, los voladizos de la figura 3 sometidos a peso propio. El esquema de cálculo para los cuatro casos representados en la figura 3 sería el mismo: el representado en la figura 4, pero sólo para el cálculo de las reacciones. Sin embargo no es así ni para el cálculo de desplazamientos ni para el de tensiones.

Experimentalmente^I se puede poner de manifiesto, sin excesiva dificultad, que la deformación de los casos representados en la figura 3 pueden mostrar una diferencia significativa: en la deformación de los casos (a) y (b) la elástica^{II} se mantiene en el plano x, y ; en los casos (c) y (d) la elástica sale fuera de ese plano.

^I Al final del documento encontrará unos videos que muestran las deformadas, calculadas numéricamente, para alguno de estos casos

^{II} Línea definida por la posición de los centros de gravedad de las secciones rectas de la barra deformada.

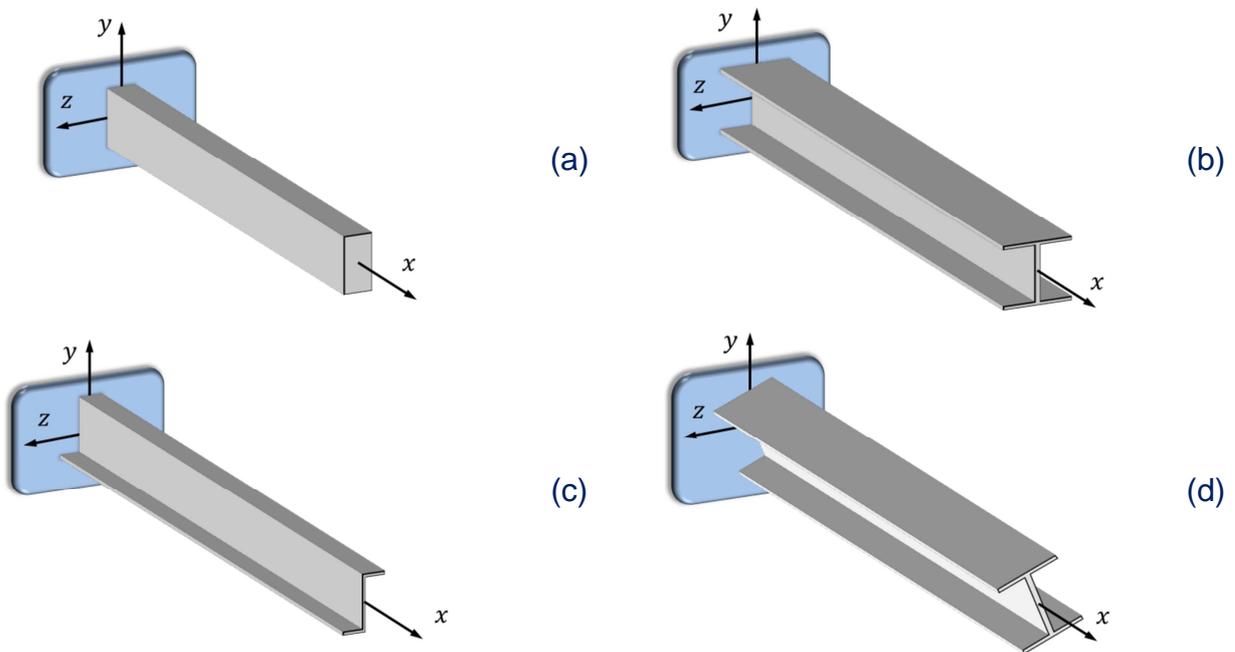


Figura 3.- Voladizos formados por barra de diferente sección recta.

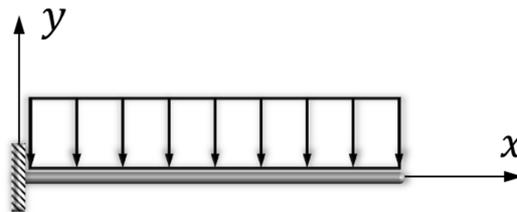


Figura 4.- Modelo de viga en voladizo sometida a carga uniforme.

En otras palabras, en los casos (a) y (b) el desplazamiento del centro de gravedad de cada sección tendría únicamente componente y , mientras que en los casos (c) y (d) tendría componentes y y z .

El motivo de esta diferencia está en la situación relativa de la línea de acción de la carga y los ejes principales de inercia de la sección. Veámoslo.

Cuando, en flexión plana, se obtiene la ley de Navier (2) (considerando tensiones de tracción positivas) se deduce que, en este tipo de flexión, el eje de giro de cada sección de la barra (línea neutra¹) coincide con la línea de acción del momento, en el caso indicado el eje de giro sería la línea $y = 0$ que es la línea de acción del momento M_z .

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_z(x)} y \quad (2)$$

En (2) se considera un sistema de referencia como los representados en la figura 3, $\sigma_x(x, y)$ son las tensiones normales en la sección recta de la barra, se ha considerado que sólo actúa el momento M_z e $I_z(x)$ es la inercia de la sección respecto del eje z . Los esfuerzos se consideran positivos cuando tienen los sentidos representados en la figura 5.

¹ Lugar geométrico de los puntos de la sección definidos por $\sigma_x(x, y) = 0$

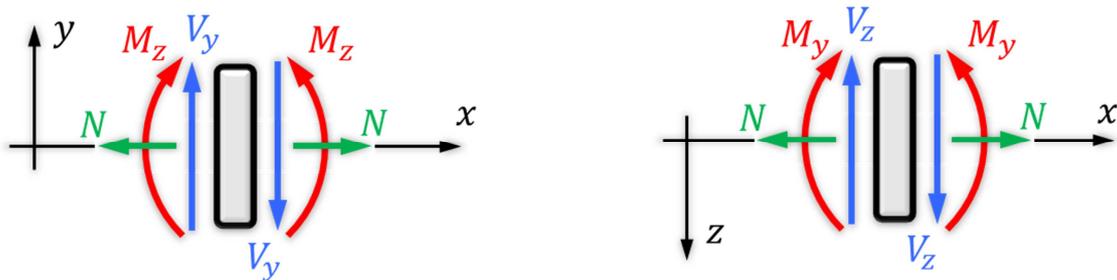


Figura 5. Sentidos positivos de los esfuerzos en la rebanada (sección).

A partir de la ley de Navier, y siempre asumiendo la hipótesis de flexión plana, se deduce la ecuación de la deformada, o elástica, que aparece en (3).

$$y(x) = C_1 + C_2x + \int \left(\int \frac{M_z(x)}{E I_z(x)} dx \right) dx \quad (3)$$

En consecuencia, según las expresiones (2) y (3), una carga que actuara perpendicularmente al eje de mínima inercia daría lugar a las máximas tensiones y, consecuentemente, a los máximos desplazamientos y, al contrario, si la carga estuviese aplicada perpendicularmente al eje de mayor inercia obtendríamos las mínimas tensiones y, también, los desplazamientos relativos mínimos. Resulta obvio que en este razonamiento estaríamos considerando la misma carga.

Expresemos ahora la ley de Navier (2), en un sistema de referencia distinto del y z, p. ej. un sistema s t como el que aparece en la figura 6.

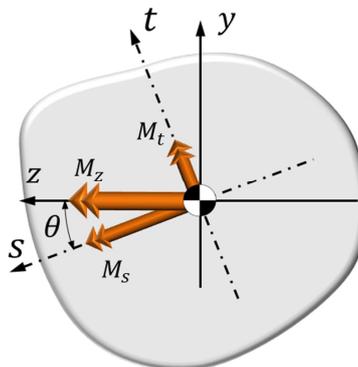


Figura 6. Sentidos positivos de los sistemas de referencia siendo x el eje que sale de la sección.

Para ello, partimos de la relación entre tensiones normales y curvatura (4) obtenida en flexión plana para llegar a la ley de Navier.

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E}{\rho(x)} y. \quad (4)$$

Consideramos la expresión de la coordenada y en el nuevo sistema s t:

$$y = t \cos\theta - s \sen\theta. \quad (5)$$

Consideramos, igualmente, la definición de los momentos respecto de los nuevos ejes:

$$M_s = \int_A \sigma_x(s, t) t \, dA ; M_t = \int_A \sigma_x(s, t) s \, dA. \quad (6)$$

Operamos en la siguiente forma: introducimos (5) en (4) para obtener (7):

$$\sigma_x(s, t) = -\frac{E}{\rho(x)} (t \cos\theta - s \sin\theta) := K_1 t + K_2 s \quad (7)$$

donde se ha considerado que E , $\rho(x)$ y θ son constantes en la sección.

Introducimos ahora (7) en las expresiones de los momentos (6) y obtenemos:

$$M_s = - \int_A (K_1 t + K_2 s) t \, dA ; M_t = \int_A (K_1 t + K_2 s) s \, dA. \quad (8)$$

Desarrollando las expresiones en (8):

$$\begin{aligned} M_s &= -K_1 \int_A t^2 \, dA - K_2 \int_A s t \, dA = -K_1 I_s - K_2 I_{st} \\ M_t &= K_1 \int_A s t \, dA + K_2 \int_A s^2 \, dA = K_1 I_{st} + K_2 I_t \end{aligned} \quad (9)$$

(9) puede ser escrita en forma matricial en la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} M_s \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_s & -I_{st} \\ I_{st} & I_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Calculamos, a partir de (10), los valores de K_1 y K_2 como función de M_s , M_t , I_s , I_t y I_{st} para sustituirlos en (7),

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} M_s & -I_{st} \\ M_t & I_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -I_s & -I_{st} \\ I_{st} & I_t \end{vmatrix}} = \frac{M_s I_t + M_t I_{st}}{I_{st}^2 - I_s I_t}; \quad K_2 = \frac{\begin{vmatrix} -I_s & M_s \\ I_{st} & M_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -I_s & -I_{st} \\ I_{st} & I_t \end{vmatrix}} = -\frac{M_t I_s + M_s I_{st}}{I_{st}^2 - I_s I_t}. \quad (11)$$

Con lo que, finalmente, la expresión de las tensiones normales en los nuevos ejes s t quedan:

$$\sigma_x(s, t) = \frac{M_t I_s + M_s I_{st}}{I_s I_t - I_{st}^2} s - \frac{M_s I_t + M_t I_{st}}{I_s I_t - I_{st}^2} t, \quad (12)$$

donde se puede apreciar que aparecen los productos de inercia.

La expresión (12), para el cálculo de las tensiones normales cuando un flector solicita la sección, es más genérica que la expresión (2) por cuanto sirve para cualquier sistema de referencia definido en la sección, no sólo para aquél en el que uno de los ejes del sistema coincide con la línea de acción del momento como era el caso de la expresión (2).

Dicho lo anterior, la expresión (2) habría de estar contenida en la (12) y si quisiéramos obtenerla a partir de ella (camino inverso del que acabamos de hacer) parecería que habría de ser suficiente si impusiéramos que el eje s coincida con el z , el t con el y , y que los momentos tomen los valores siguientes: $M_t := 0$, $M_s := M_z$. En estas condiciones la expresión (12) quedaría:

$$\sigma_x(y, z) = M_z \left(\frac{I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z - \frac{I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} y \right) \quad (13)$$

Vemos que la expresión obtenida (13) sólo coincidirá formalmente con la ley de Navier (2), si y sólo si, $I_{yz} = 0$, i. e., cuando los ejes y y z sean ejes principales de inercia. En tal caso:

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_z}{I_z} y \quad (14)$$

Pero además, de la expresión (13) se deduce otro resultado interesante: la línea neutra, i.e., los puntos de la sección donde las tensiones normales son nulas, por tanto el eje respecto del que la sección gira durante la deformación de la barra, no coincide con la línea de acción del momento. Veámoslo.

En la expresión (13) se ha considerado que el momento actúa según el eje z . Pero la línea neutra estará definida por:

$$0 = \sigma_x(y, z) \Rightarrow \frac{I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z = \frac{I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} y \Rightarrow y = \frac{I_{yz}}{I_y} z \quad (15)$$

Una vez más esta línea coincidirá con el eje z , i. e. $y = 0$, si y sólo si, el producto de inercia es nulo, es decir, si los ejes y y z son los ejes principales de inercia, en otro caso, el momento actúa según una línea y la sección gira respecto de un eje que no coincide con ella lo que significa que el giro provoca que la línea de centros de gravedad salga del plano de la carga definiendo pues un caso de flexión desviada.

En base a lo anteriormente expuesto, estamos en condiciones de justificar las observaciones experimentales indicadas arriba, según las cuales, para los casos (a) y (b) de la figura 3 se producen desplazamientos en el plano xy y en los casos (c) y (d) fuera de ese plano.

En los casos (a) y (b), véase figura 6, la carga tiene lugar perpendicularmente a uno de los ejes principales (indicados en línea de eje en la figura) de las secciones: el eje z , que es principal en ambos casos.

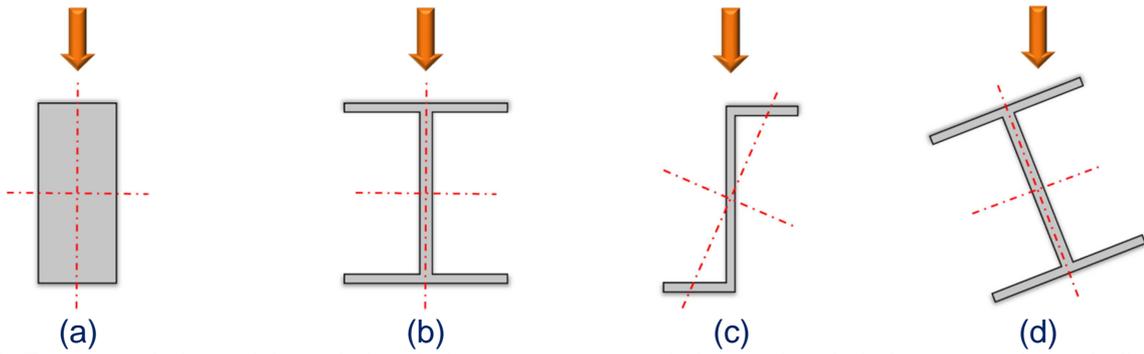


Figura 6. Esquema de la posición relativa de la carga respecto de la sección de la barra para los voladizos esquematizados en la figura 3. En línea de eje se indican los ejes principales de inercia de cada sección.

En tales casos, el eje neutro de la sección es, véanse expresiones (2) o (12), el propio eje principal perpendicular a la carga, es decir, cada sección de la barra gira en torno a ese eje y la línea que une los centros de gravedad se deforma en el mismo plano que contiene a la carga (el xy en el caso de la figura 3)

En tales casos, el eje neutro de la sección es, véanse expresiones (2) o (12), el propio eje principal perpendicular a la carga, es decir, cada sección de la barra gira en torno a ese eje y la línea que une los centros de gravedad se deforma en el mismo plano que contiene a la carga (el xy en el caso de la figura 3)

En los casos (c) y (d) la carga actúa formando determinado ángulo con esos ejes. Tomemos, sin pérdida de generalidad, el caso (d) como referencia, figura 7.

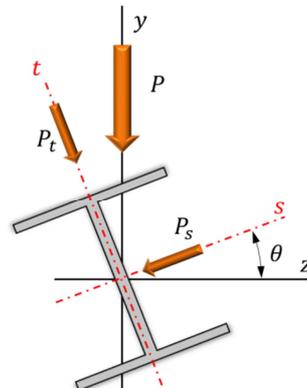


Figura 7. Descomposición de la carga en los ejes principales de inercia de la sección

Descomponiendo la carga, P , en ambos ejes, $P_t = P \cos\theta$ y $P_s = P \sin\theta$, resulta evidente, que la barra está cargada, con cargas de diferente magnitud, respecto de cada uno de los ejes principales de inercia. Habida cuenta de la diferencia entre las inercias respecto de esos ejes, que puede ser muy considerable, la tendencia al giro de la sección respecto de cada uno de ellos es diferente.

Dado que las cargas son, en general, diferentes, y la tendencia al giro respecto de cada eje principal también lo es, es claro que encontraremos diferencias en los desplazamientos relativos (δ_s y δ_t en la figura 8) en los planos que contienen a cada eje principal.

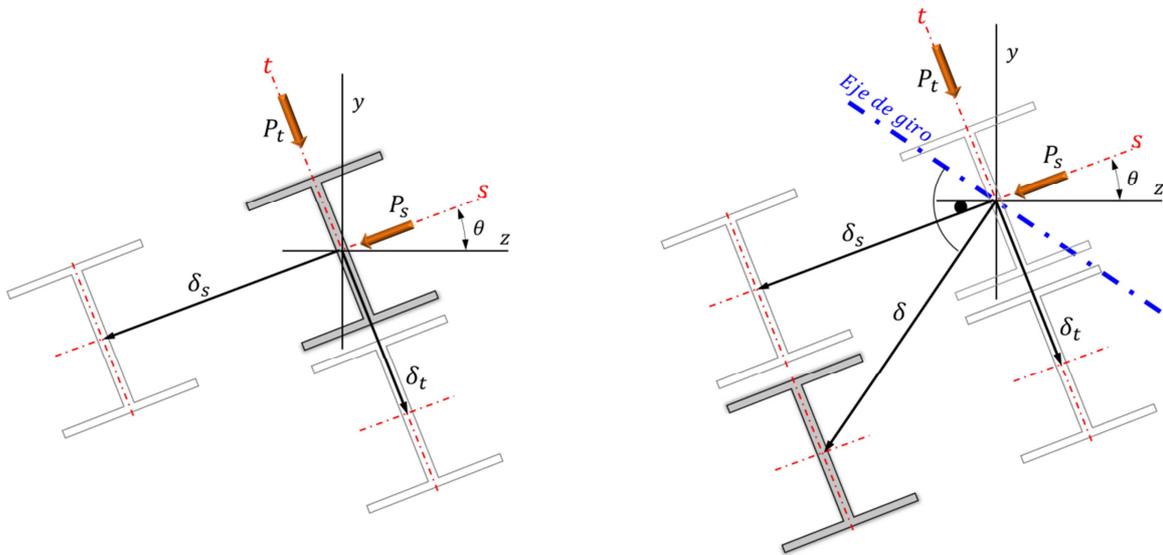


Figura 8. Desplazamiento de la sección en las direcciones de los ejes principales de inercia.

De esta manera, la sección se desplazará una cantidad δ (figura 8) en una dirección, por el momento desconocida, que, de hecho, supone un giro de la sección respecto de un eje cuya posición habremos de determinar. Como ya se ha indicado, este eje de giro es el eje neutro de la flexión y el lugar geométrico de los puntos con tensiones normales nulas, que será la característica que nos servirá para determinar su posición.

De esta manera, la sección se desplazará una cantidad δ (figura 8) en una dirección, por el momento desconocida, que, de hecho, supone un giro de la sección respecto de un eje cuya posición habremos de determinar. Como ya se ha indicado, este eje de giro es el eje neutro de la flexión y el lugar geométrico de los puntos con tensiones normales nulas, que será la característica que nos servirá para determinar su posición.

1.3. De la determinación de tensiones y desplazamientos en flexión desviada.

En el epígrafe anterior acabamos de ver cómo la flexión desviada puede descomponerse en dos casos de flexión plana: los casos de flexión en torno a los ejes s y t de la figura 8, por ejemplo.

En esta idea, absolutamente genérica, nos basaremos para obtener las tensiones y deformadas en base al principio de superposición.

La ley de Navier, para cada uno de los subproblemas en que dividimos el problema representado en la figura 8, puede escribirse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P_t(x) \Rightarrow M_s(x) \Rightarrow \sigma_x(x, t, s) &= -\frac{M_s(x)}{I_s(x)} t \\
 P_s(x) \Rightarrow M_t(x) \Rightarrow \sigma_x(x, t, s) &= \frac{M_t(x)}{I_t(x)} s
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Donde:

- Se han considerado los signos positivos, para los ejes s y t , indicados en la figura 6.
- Se han denotado por $M_s(x)$ y $M_t(x)$ los momentos provocados, respectivamente, por las cargas $P_t(x)$ y $P_s(x)$ considerando el caso más genérico de que estas cargas pudieran variar con x .
- Se ha tenido en cuenta la posibilidad de que las inercias puedan igualmente variar con la coordenada x .

Por tanto, las tensiones normales totales serán la suma de las que aparecen en (3):

$$\sigma_x(x, t, s) = -\frac{M_s(x)}{I_s(x)}t + \frac{M_t(x)}{I_t(x)}s \quad (4)$$

La determinación de la posición de la línea neutra es inmediata haciendo nulas las tensiones normales en (4). De este modo se obtiene la expresión en (5) cuya representación geométrica puede observarse en la figura 10.

$$\sigma_x(x, t, s) = 0 \Rightarrow t = \frac{I_t(x)}{I_s(x)} \frac{M_t(x)}{M_s(x)} s. \quad (5)$$

Dado que la posición que ocupa el momento flector resultante a que está sometida la sección, que sería la suma vectorial de los fletores $M_t(x)$ y $M_s(x)$, obedece la ecuación (6),

$$t = \frac{M_t(x)}{M_s(x)} s, \quad (6)$$

resulta evidente, comparando las expresiones (5) y (6), que sólo en el caso de que $I_t(x) = I_s(x)$ la línea neutra coincidirá con la línea de acción del flector.

Si observamos la figura 2 derecha, el caso indicado $-I_t(x) = I_s(x)$ es un caso en el que la circunferencia allí representada degenera en un punto. Esto indica que cualquier eje contenido en el plano de la sección es eje principal de inercia y, por tanto, en un caso como ese es imposible que se dé flexión desviada, la flexión, en tal caso, siempre será plana.

Para el cálculo de la deformada puede procederse de la misma forma (véase figura 10). Así, los desplazamientos en ejes y y z , que denotaremos por $y(x)$ y $z(x)$, pueden ser obtenidos a partir de los desplazamientos en los ejes s y t , $\delta_s(x)$ y $\delta_t(x)$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} y(x) &= \delta_t(x) \cos\theta - \delta_s(x) \operatorname{sen}\theta \\ z(x) &= \delta_t(x) \operatorname{sen}\theta + \delta_s(x) \cos\theta \end{aligned} \quad (6)$$

Donde las deformaciones en los ejes s y t pueden calcularse integrando la ecuación diferencial de la elástica en cada uno de estos ejes (7).

$$\delta_t(x) = \int \left(\int \frac{M_s(x)}{E I_s(x)} dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

$$\delta_s(x) = \int \left(\int \frac{M_t(x)}{E I_t(x)} dx \right) dx + C_3 x + C_4$$
(7)

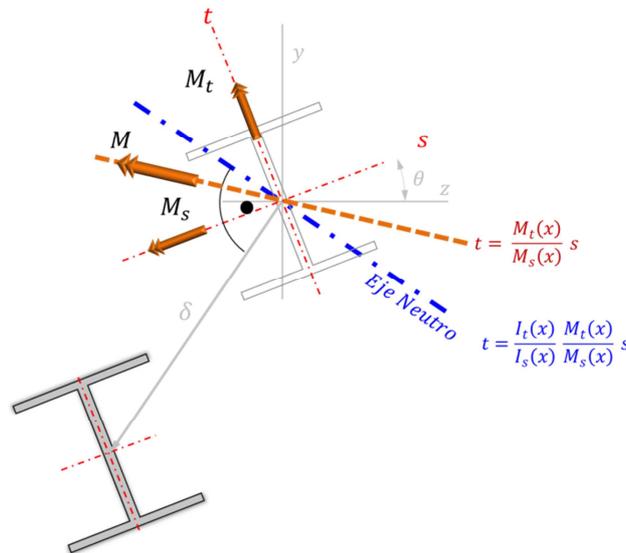


Figura 10. Esquema de la línea de acción que solicita la sección y la posición de la línea neutra para un caso de flexión desviada.

2. REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA.

Para poner de manifiesto el fenómeno de la flexión desviada se realizará una práctica basada en una viga en voladizo con carga puntual en el extremo libre.

Se dispondrá de barras con diferentes secciones que serán cargadas de dos formas distintas: según direcciones principales y según una dirección que forme, con las direcciones principales, un ángulo determinado.

2.1. Objetivo de la práctica

Poner de manifiesto la diferencia de comportamiento de una viga según que la carga actúe o no según direcciones coincidentes con los ejes principales de inercia.

2.2. Descripción de la práctica

Para la realización de la práctica se dispone de (véase figura 11):

- Marco de carga
- Viga en voladizo sujeta al marco. A tal efecto, existen barras de diferentes secciones: sección rectangular maciza, sección de pared delgada en Z, otras.

- Un dispositivo que permite conocer el ángulo entre la línea de acción de la carga (vertical) y los ejes principales de inercia de la sección de la viga empleada.
- Unos dispositivos para la medida de desplazamientos perpendiculares al eje de la barra. Estos dispositivos se denominan *relojes comparadores* y tienen una precisión de 0.01 mm .
- Una estructura auxiliar para facilitar el posicionamiento de los relojes comparadores.
- Un dispositivo para colgar pesas en el extremo libre de la barra.

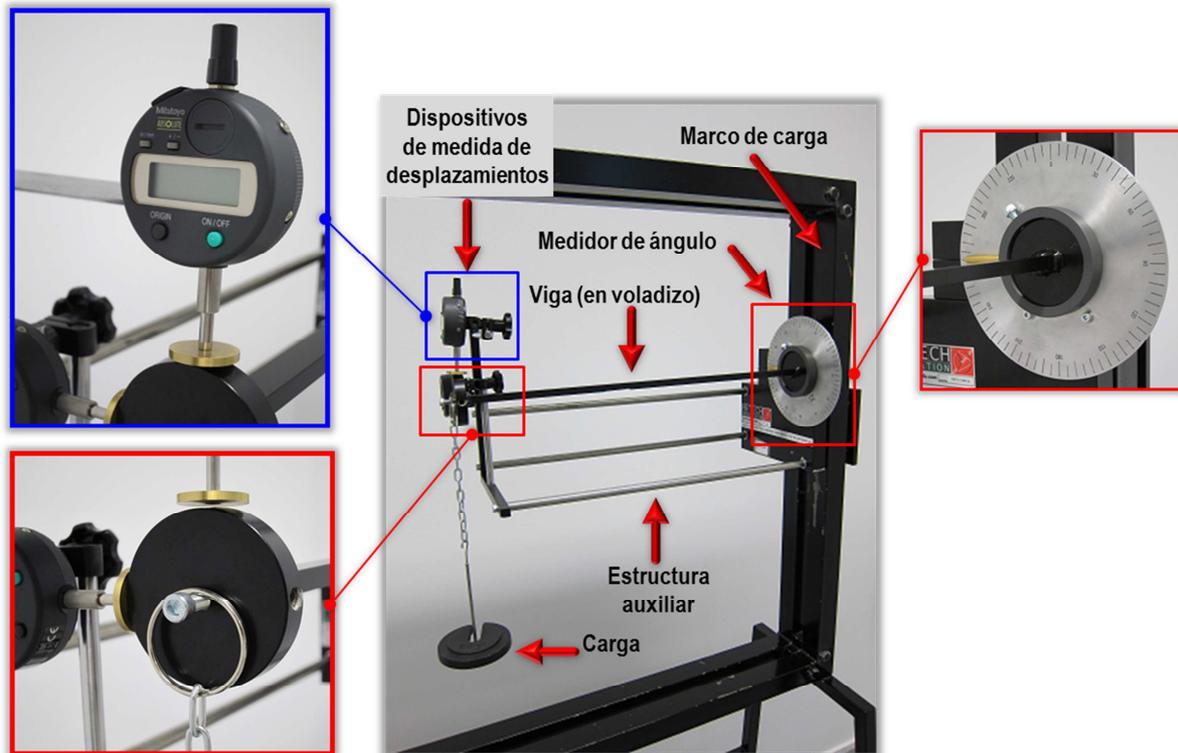


Figura 11. Vista general de la práctica de flexión desviada dispuesta para su realización.

2.3. Desarrollo de la práctica.

Para la sección o secciones escogidas, la práctica consistirá en cargar la viga en el extremo libre, con carga creciente, tomando lecturas de los desplazamientos que se produzcan, para cada carga, en direcciones vertical y horizontal. Si bien las lecturas podrían tomarse en cualquier punto de la viga lo más aconsejable es hacerlo también en el extremo libre donde dichos desplazamientos serán máximos.

La práctica se realizará dos veces con cada perfil. La primera vez cargando en la dirección del eje principal de máxima inercia (es decir perpendicularmente al eje más débil de la sección) y la segunda vez formando un ángulo a escoger con dicho eje.

2.4. Memoria

2.4.1. Estudio teórico

Para el perfil seleccionado en la parte experimental:

- Sabiendo que el material utilizado tiene una tensión de fallo plástico, σ_f , de 260 MPa , determine el valor máximo de la carga aplicable en el extremo del voladizo en cada posición.
- Determine la deflexión (flecha), tanto horizontal como vertical, en el extremo del voladizo, para las posiciones descritas en la parte experimental. Calcule estas deflexiones en función de la carga aplicada en el extremo.
- Represente en una gráfica la evolución de las flechas, horizontal y vertical, en función de la carga aplicada.

2.4.2. Estudio experimental

Una vez realizada la práctica represente en una gráfica la evolución de las flechas, horizontal y vertical, en función de la carga aplicada.

2.4.3. Correlación teórico-experimental

Superponga las gráficas obtenidas tanto experimental como teóricamente.

2.4.4. Conclusiones

A partir de la correlación compare dichos resultados indicando las razones por las que pudieran producirse desviaciones entre ambos estudios.

Exponga las conclusiones que derivan de la realización de la práctica.

ANEXO I: Videos deformada vigas en voladizo sometidas a peso propio

Deformación de una viga, de sección rectangular, en voladizo, bajo carga vertical. Perspectiva.

Deformación de una viga, de sección en Z, en voladizo, bajo carga vertical. Perspectiva.

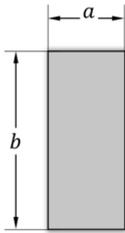
Deformación de una viga, de sección en Z, en voladizo, bajo carga vertical. Vista Superior.

Anexoll: Toma de datos para la realización de la práctica^I

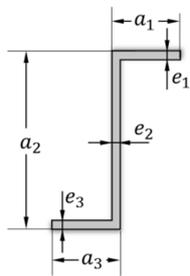
Asegúrese de tomar todos los datos necesarios y rellene la ficha de ensayo.

Propiedades del Material: E= 210 GPa

Propiedades geométricas:



	a	b
Medida 1		
Medida 2		
Medida 3		
MEDIA ^{II}		



	a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
Medida 1						
Medida 2						
Medida 3						
MEDIA						

Longitud del voladizo:

Medida 1	Medida 2	Medida 3	MEDIA

ENSAYO 1: CARGA SEGÚN LA DIRECCIÓN PRINCIPAL MÁXIMA

Carga	Desplazamiento vertical	Desplazamiento horizontal
0		
5 N		
10 N		
15 N		
20 N		
25 N		

^I Las unidades se dejan a elección de la persona (o personas) que realice la práctica.

^{II} Si se desea, se podrán tomar más de tres medidas, pero nunca menos de tres (siempre un número impar de medidas)

Carga	Desplazamiento vertical	Desplazamiento horizontal
30 N		
35 N		
40 N		

ENSAYO 2: CARGA A _____ GRADOS CON LA DIRECCIÓN PRINCIPAL MÁXIMA

Carga	Desplazamiento vertical	Desplazamiento horizontal
0		
5 N		
10 N		
15 N		
20 N		
25 N		
30 N		
35 N		
40 N		