

Ejercicios del tema 1

Matrices y Sistemas de Ecuaciones

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.
E.T.S.I. de Telecomunicación.

Ej. 1 — Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

- a) $A + B$. c) CB y $C^T B$. e) ABC . g) A^2 , B^2 y C^2 .
b) AC . d) $(2A + B)C$. f) $C^T (\frac{1}{2}B - A)$.

Ej. 2 — Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, comprueba si es verdadero o falso:

- a) $AB = BA$. c) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.
b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. d) $ABA^{-1} = B$.

Ej. 3 — Mediante matrices elementales, transforma la matriz A en una escalonada equivalente E . Determina las matrices P y Q tales que $PAQ^{-1} = E$ y determina el rango de A .

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$. b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. c) $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ej. 4 — Mediante operaciones elementales, determina el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro a .

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Ej. 5 — Mediante operaciones elementales, determina, si existe, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices.

- a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Ej. 6 — Calcula el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

1. Desarrollando por la cuarta fila.
2. Desarrollando por la fila o columna para la que es necesario calcular menos adjuntos.
3. Desarrollando por la segunda columna realizando antes operaciones elementales de forma que solamente sea necesario calcular un adjunto.

Ej. 7 — Sabiendo que A y B son matrices cuadradas de orden 4 tales que $|A| = 5$ y $|B| = -6$, calcula, si es posible:

- | | | | |
|--------------|-------------------|-----------------|--------------|
| a) $ AB $. | c) $ ABA^T $. | e) $ (AB)^T $. | g) $ 2B $. |
| b) $ B^T $. | d) $ ABA^{-1} $. | f) $ A^{-1} $. | h) $ A^2 $. |

Ej. 8 — Calcula la inversa de las siguientes matrices para aquellos valores del parámetro real a para los que sea posible.

a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$	b) $\begin{pmatrix} a & -1 & -5 \\ 10 & 4 & -1 \\ 4 & 2a & 9 \end{pmatrix}$
--	---

Ej. 9 — Resolver por el método de Gauss y, si es posible, por el método de Cramer, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\}$	b) $\left. \begin{array}{l} x + y - 2z + 3t = -1 \\ -x - 2y - 3z - 4t = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 7t = 1 \\ 2x + 2y + 4z + 6t = 2 \end{array} \right\}$
---	---

Ej. 10 — Clasificar y resolver, donde sea posible, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \end{array} \right\}.$$

Ej. 11 — (Sept. 2011) Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro m y resuélvelo para algún valor de m para el que el sistema sea compatible.

$$\left. \begin{array}{l} mx + mz = 0 \\ my + z = 0 \\ mx + y + mz = m \\ mx + my + mz = 0 \end{array} \right\}$$

Ej. 12 — Tres amigos, Pedro, Luis y Pablo, deciden asociarse para montar una empresa, necesitando para ello un capital de 15.000€. Como no todos disponen del mismo dinero deciden invertir de la siguiente manera: Pedro aporta el triple de lo que ponen Luis y Pablo juntos, y por cada 20€ que aporta Luis, Pablo aporta 30€. ¿Cuánto capital aportó cada uno de ellos?

Ej. 13 — Una fábrica de dispositivos eléctricos fabrica tres tipos de componentes a partir de cobre y estaño:

- Dispositivo A: Necesita 8 unidades de cobre y ninguna de estaño.
- Dispositivo B: Necesita 6 unidades de cobre y 2 de estaño.
- Dispositivo C: Necesita 7 unidades de cobre y 1 de estaño.

En un momento dado se disponen de 100 unidades de cobre y 12 de estaño,

1. ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se pueden fabricar usando todo el material disponible?
2. Sabiendo que el precio de producción del dispositivo A es de 2€, el de B es de 7€ y el de C es de 5€, ¿Hay alguna combinación que cueste 60€ consumiendo todo el material?
3. ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de euros que se pueden invertir para tener producción de componentes con la condición de invertir todo el material de cobre y estaño?