Sistemas de Comunicaciones

Tema 2: Señales aleatorias



Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Málaga

Curso 2012/2013

OCW UMA
Martos Naya, E; Fernández Plazaola, U.; Cañete Corripio, F.J; Luque Nieto, M.A. (2012) Sistemas de Comunicaciones. OCW-Universidad de Málaga, http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonComercial-ShareAlike 3.0 Spain

Tema 2: Señales aleatorias

2.1 Probabilidad

2.2 Variable aleatoria

2.3 Variable aleatoria bidimensional

2.4 Análisis de señales deterministas

2.5 Señales aleatorias

Tema 2: Señales aleatorias

2.1 Probabilidad

Experimento aleatorio
Álgebra de sucesos
Definición de probabilidad
Axiomas
Probabilidad condicionada
Equiprobabilidad
Teorema de la probabilidad total
Teorema de Bayes
Canal binario

2.1 Probabilidad
Experimento aleatorio

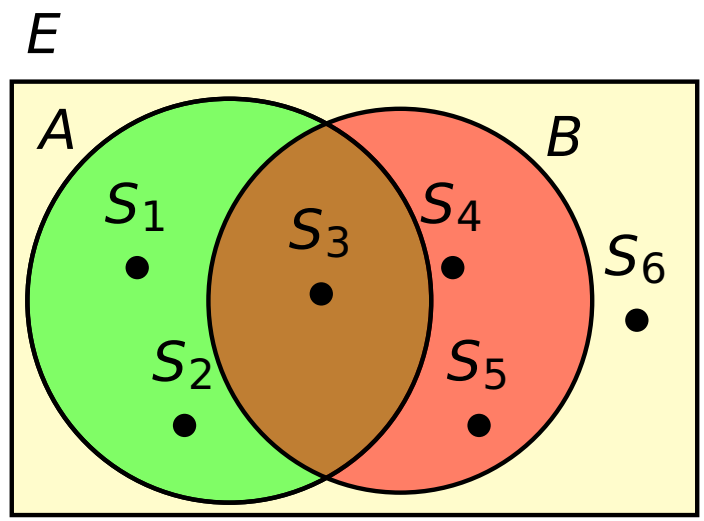
Experimento cuyos posibles resultados son conocidos pero el resultado concreto de cada realización es impredecible.

Ejemplos:

- Lanzar un dado
- Sacar una bola de un bombo
- Medir el nº de llamadas que recibe una central telefónica por minuto
- Transmitir un bit en un canal ruidoso

2.1 Probabilidad
Álgebra de sucesos

- Suceso elemental (S_n)
  Cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio
- Espacio muestral (E)
  Conjunto de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio
- Suceso (A ó B)
  Conjunto de posibles sucesos elementales, subconjunto del espacio muestral



2.1 Probabilidad
Definición de probabilidad

- Frecuencia relativa

$$f_r(A) = \frac{R_A}{R_T}, \qquad \begin{array}{l} R_A \equiv \text{Nº realizaciones en que sucede } A \\ R_T \equiv \text{Nº total de realizaciones del experimento} \end{array}$$

- Probabilidad
  Frecuencia relativa a la que converge la aparición de un suceso en un experimento aleatorio cuando crece el número de realizaciones del experimento

$$\lim_{R_T \to \infty} f_r(A) = \mathrm{P}(A)$$

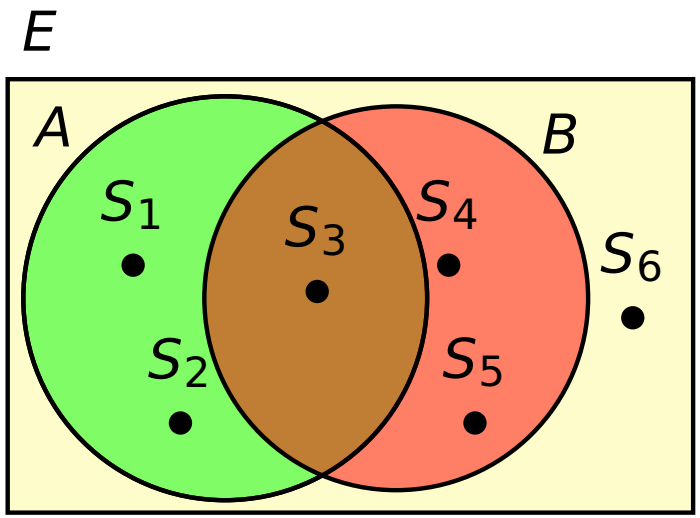
  Ejemplos:
  P('3' al lanzar un dado) $= \frac{1}{6}$
  P('cara' al lanzar la moneda) $= \frac{1}{2}$
  P(nº par al sacar bola de un bombo) $= \frac{1}{2}$

2.1 Probabilidad
Axiomas

1. $\mathrm{P}(A) \geq 0$
2. $\mathrm{P}(E) = 1$
3. $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(A_i), \quad \text{si} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$

De estos axiomas se deduce

1. $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$
2. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
3. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
4. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - P(A \cap B)$



2.1 Probabilidad
Probabilidad condicionada

Probabilidad de A condicionado a B, $\mathrm{P}(A/B)$, es la probabilidad del suceso A sabiendo que se ha producido el suceso B

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \rightarrow \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A/B)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B/A)\mathrm{P}(A)$$

Dos sucesos A y B son independientes si

$$\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A) \text{ ó } \mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$$

es decir, si la ocurrencia de uno no influye en la probabilidad del otro.

Por tanto, si dos sucesos A y B son independientes

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

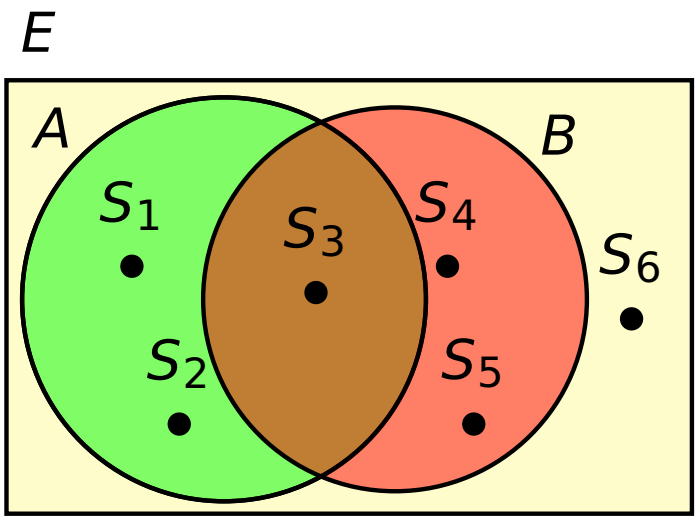
2.1 Probabilidad
Equiprobabilidad

Cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$P(A) = \frac{\text{Nº de sucesos elementales de } A}{\text{Nº de sucesos elementales del espacio muestral}}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\text{Nº de sucesos elementales de } A \cap B}{\text{Nº de sucesos elementales del espacio muestral}}}{\frac{\text{Nº de sucesos elementales de } B}{\text{Nº de sucesos elementales del espacio muestral}}} =$$

$$\frac{\text{Nº de sucesos elementales de } A \cap B}{\text{Nº de sucesos elementales de } B}$$

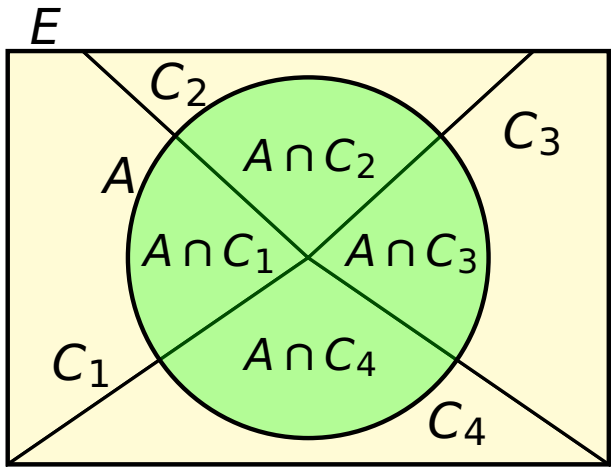


2.1 Probabilidad
Teorema de la probabilidad total

Sea C_i uno de los N sucesos de una partición del espacio muestral E

$$C_i \cap C_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} C_i = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_N = E$$



Cualquier suceso A del espacio muestral E puede expresarse como

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} (A \cap C_i) = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \ldots \cup (A \cap C_n)$$

Por tanto, la probabilidad del suceso A se puede obtener como

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(A/C_i)\mathrm{P}(C_i)$$

2.1 Probabilidad
Teorema de Bayes

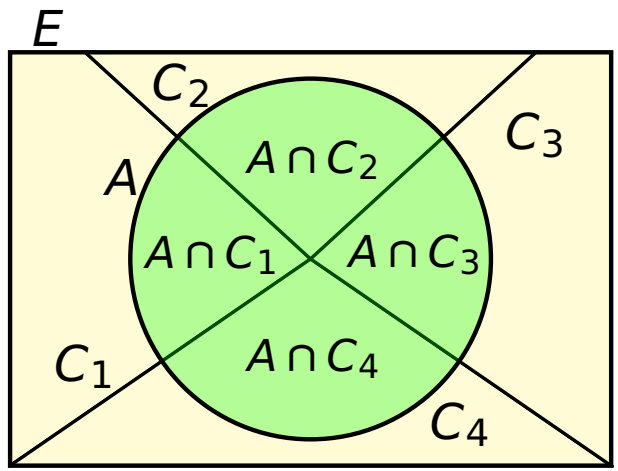
Sea A un suceso y C_j un suceso de una partición del espacio muestral E, la probabilidad de C_j condicionada a A se puede obtener como

$$P(C_j/A) = \frac{P(A \cap C_j)}{P(A)} = \frac{P(A/C_j)P(C_j)}{P(A)}$$

Usando el teorema de la probabilidad total se obtiene

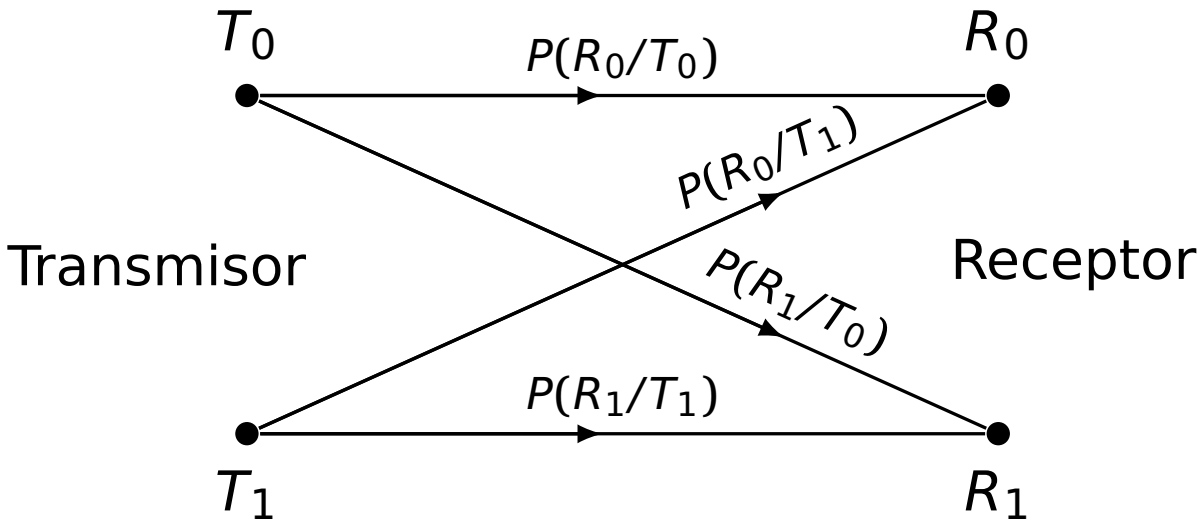
$$P(C_j/A) = \frac{P(A/C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{N} P(A \cap C_i)}$$

$$\boxed{\frac{P(A/C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{N} P(A/C_i)P(C_i)}}$$



2.1 Probabilidad
Canal binario

Modelo de canal caracterizado por las probabilidades del bit recibido (0 ó 1) condicionadas al bit transmitido (0 ó 1)



$$\mathrm{P(error)} = \mathrm{P}((R_1 \cap T_0) \cup \mathrm{P}(R_0 \cap T_1)) = \mathrm{P}(R_1 \cap T_0) + \mathrm{P}(R_0 \cap T_1) =$$

$$\boxed{\mathrm{P}(R_1/T_0)\mathrm{P}(T_0) + \mathrm{P}(R_0/T_1)\mathrm{P}(T_1)}$$

$$\mathrm{P}(T_0/R_1) = \frac{\mathrm{P}(T_0 \cap R_1)}{\mathrm{P}(R_1)} = \boxed{\frac{\mathrm{P}(R_1/T_0)P(T_0)}{\mathrm{P}(R_1/T_0)\mathrm{P}(T_0) + \mathrm{P}(R_1/T_1)\mathrm{P}(T_1)}}$$

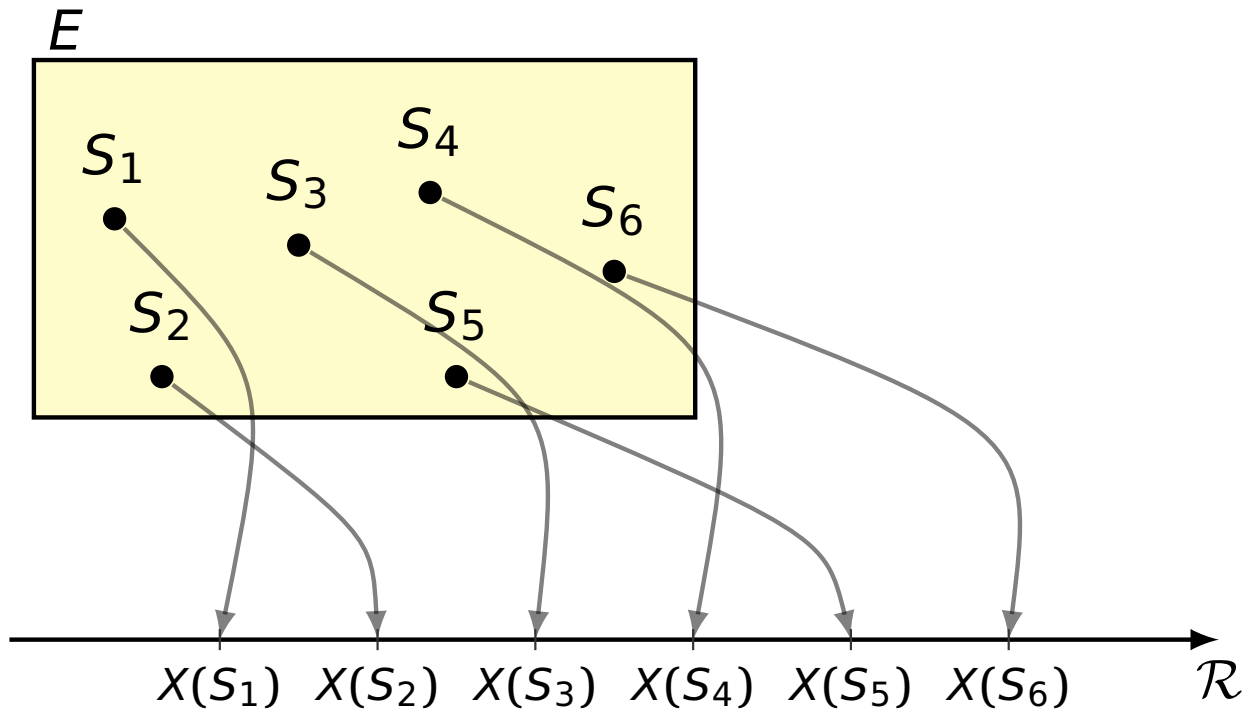
Tema 2: Señales aleatorias

2.2 Variable aleatoria

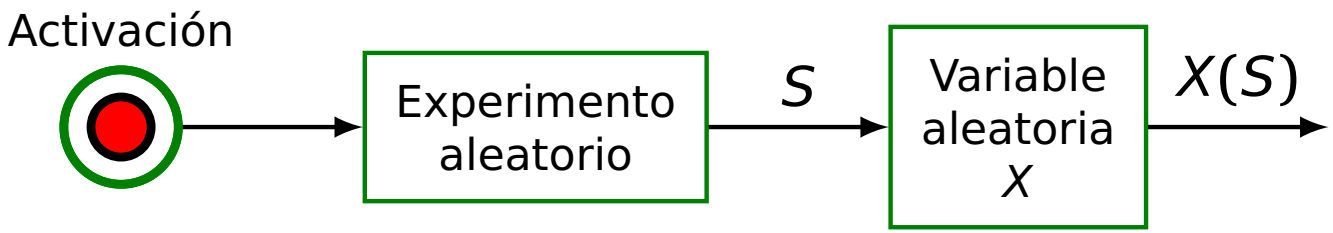
Definición
Histograma
Función densidad de probabilidad
Función de distribución de probabilidad
Clasificación
Momentos
Distribuciones más usadas
Transformación de variable aleatoria

2.2 Variable aleatoria
Definición

Función que asigna un número real a cada posible suceso elemental



Esquema de sistema



2.2 Variable aleatoria
Histograma

- Frecuencia relativa

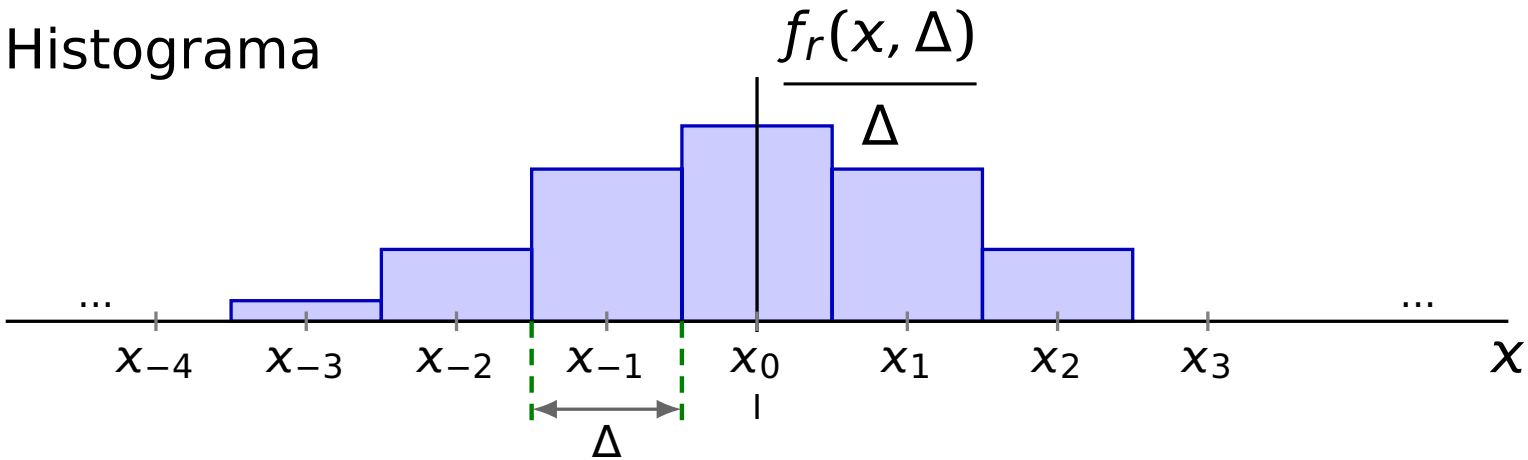
$$f_r(x,\Delta) = \frac{R_{x,\Delta}}{R_T}$$

$R_{x,\Delta} \equiv$ Nº realizaciones en el intervalo $(x-\Delta/2, x+\Delta/2]$

$R_T \equiv$ Nº total de realizaciones del experimento

$$\underset{R_T\to\infty}{f_r(x,\Delta)} = P(x-\Delta/2 < X \leq x+\Delta/2)$$

- Histograma

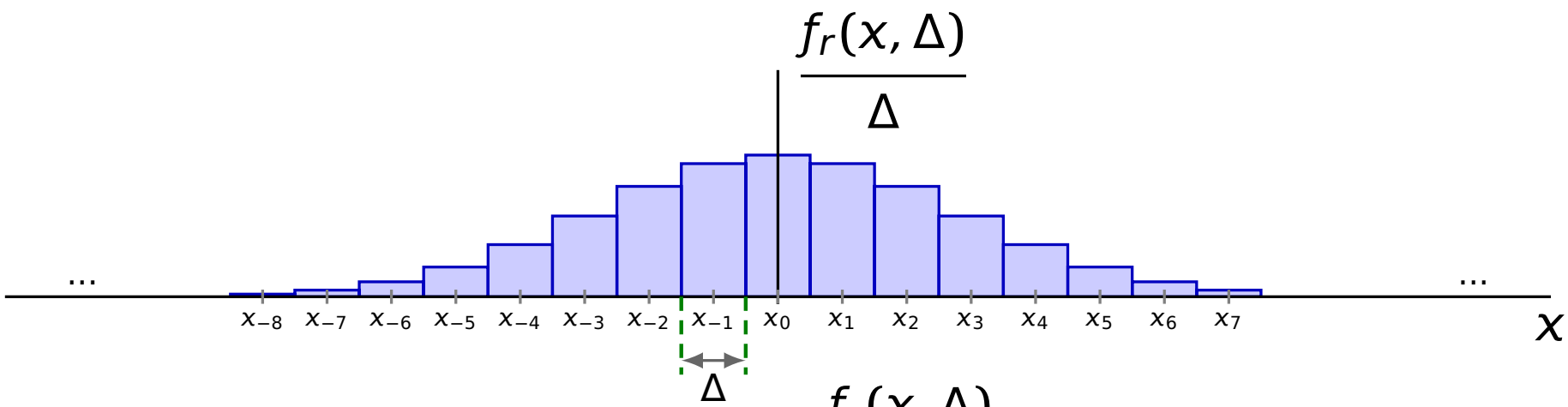


El área de cada barra centrada en x_k representa la frecuencia relativa $f_r(x_k,\Delta)$, y el área total es 1

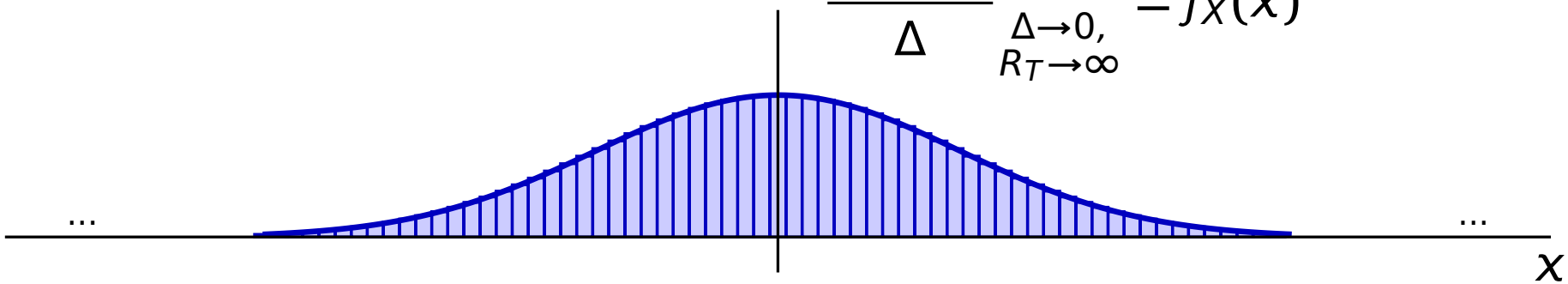
2.2 Variable aleatoria
Función densidad de probabilidad

El histograma, cuando $\Delta \to 0$ y $R_T \to \infty$, tiende a la función densidad de probabilidad

$$\frac{f_r(x,\Delta)}{\Delta} \underset{R_T\to\infty}{\overset{\Delta\to 0,}{=}} f_X(x)$$



$$\frac{f_r(x,\Delta)}{\Delta} \underset{R_T\to\infty}{\overset{\Delta\to 0,}{=}} f_X(x)$$



2.2 Variable aleatoria
Función densidad de probabilidad

Si el espacio muestral tiene un conjunto finito (o infinito numerable) de sucesos elementales la función densidad está formada por deltas

Ejemplo:

$X \equiv$ Lanzar moneda

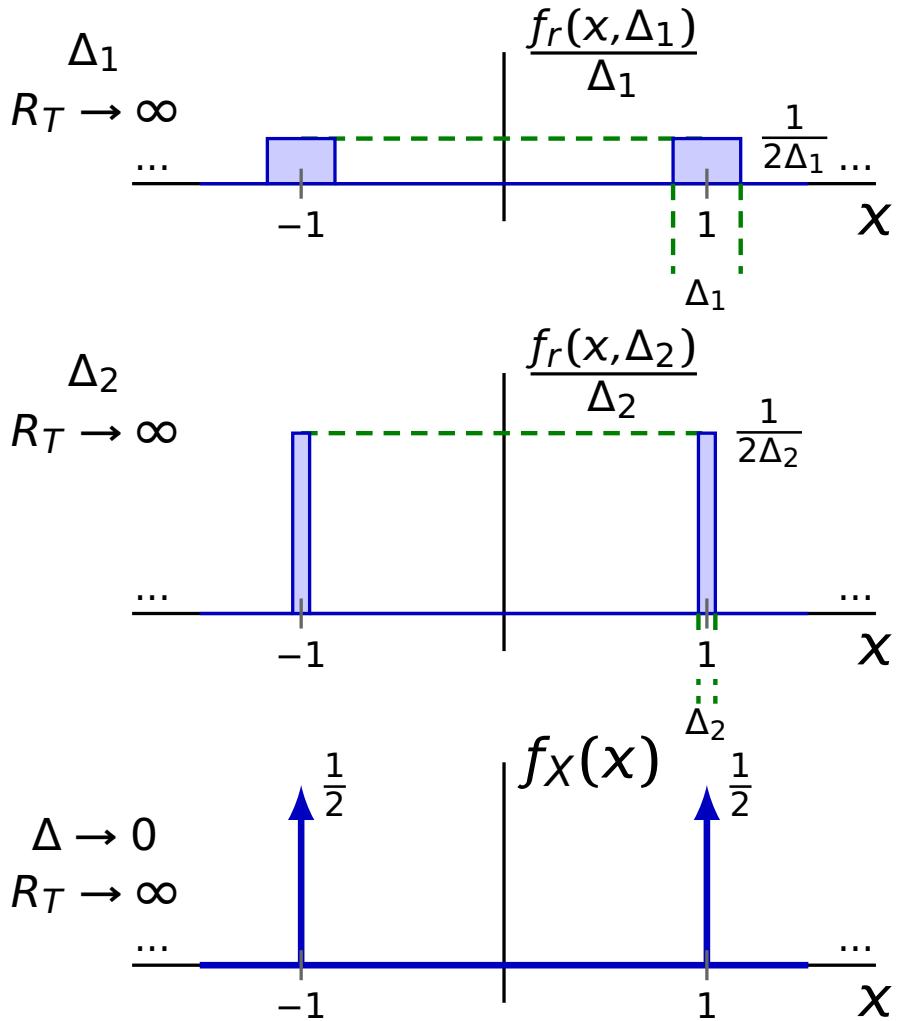
$X(\text{cruz}) = -1$

$X(\text{cara}) = 1$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}(\delta(x+1) + \delta(x-1))$$

En general

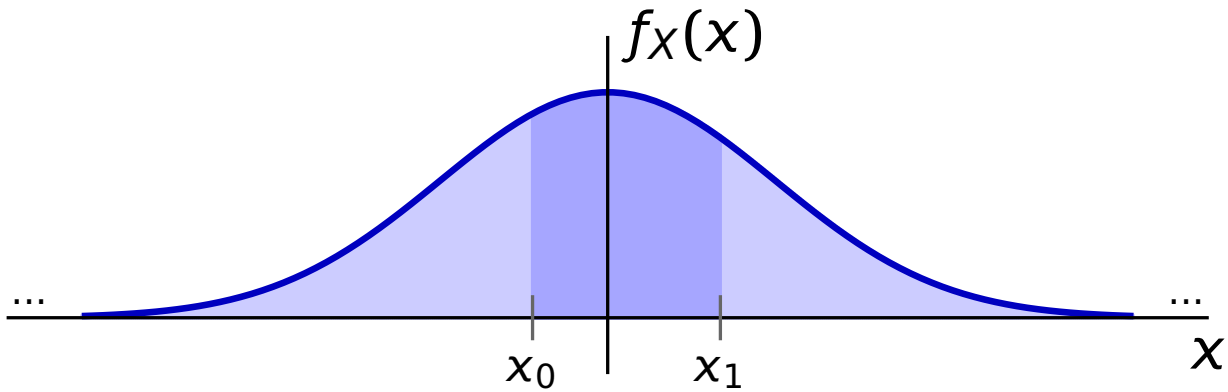
$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X = x_k)\delta(x - x_k)$$



2.2 Variable aleatoria
Función densidad de probabilidad

Propiedades:

1. $\int_{x_0}^{x_1} f_X(x)dx = \mathrm{P}(x_0 < X \leq x_1)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \mathrm{P}(-\infty < X \leq \infty) = 1$
3. $f_X(x) \geq 0, \ \ \forall x$



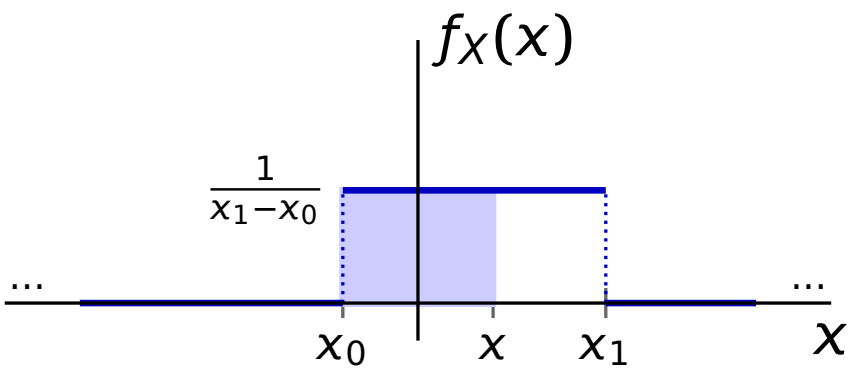
2.2 Variable aleatoria
Función de distribución de probabilidad

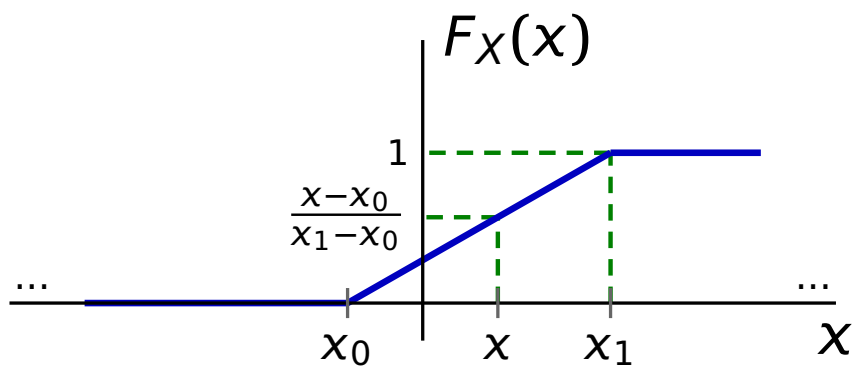
- Función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria X

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

- Propiedades:

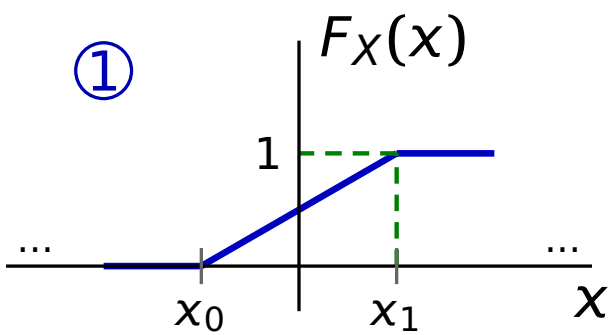
1. $0 \leq F_X(x) \leq 1, \ \forall x$
2. $f_x(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
4. $\mathrm{P}(x_0 < X \leq x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_0)$

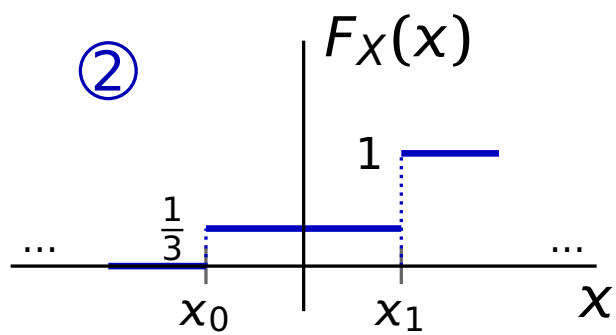


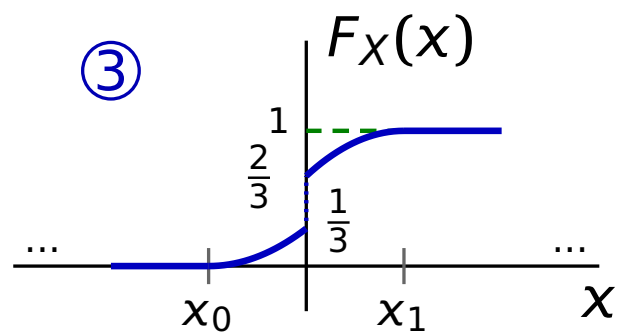


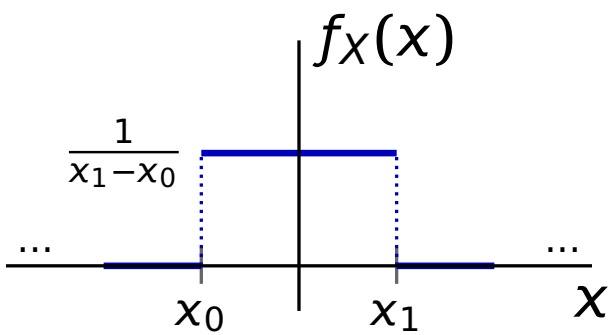
2.2 Variable aleatoria
Clasificación

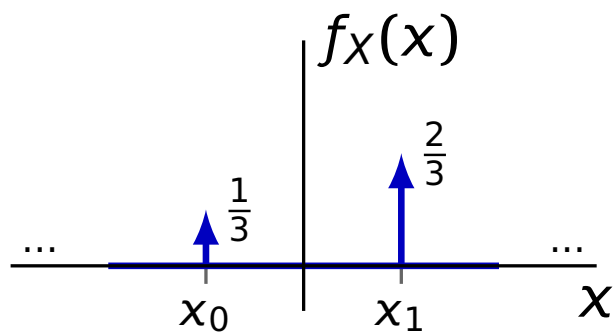
1. Continuas: $F_X(x)$ continua con tramos estrictamente crecientes
2. Discretas: $F_X(x)$ escalonada
3. Mixtas: $F_X(x)$ discontinua con tramos estrictamente crecientes

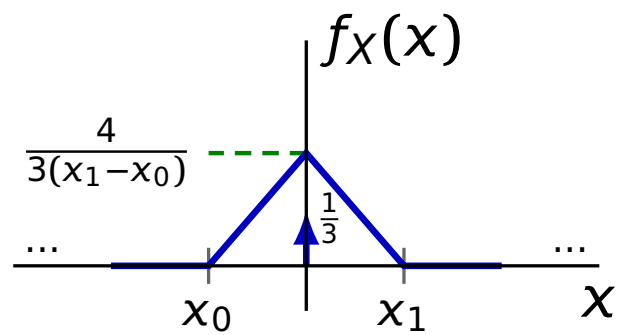












2.2 Variable aleatoria
Momentos

- Promedio de R_T realizaciones

$X \equiv$ Lanzar moneda, $X(\text{cruz}) = x_1 = -1$, $X(\text{cara}) = x_2 = 1$

n	$x^{(n)}$
1	1
2	1
3	-1
4	1
5	1
6	-1
7	1
8	-1
9	-1
10	1

$$\overline{X}_{R_T} = \frac{1}{R_T}\sum_{n=1}^{R_T} x^{(n)} = \frac{1}{10}(1+1-1+1-1+\ldots+1) = \frac{1}{5}$$

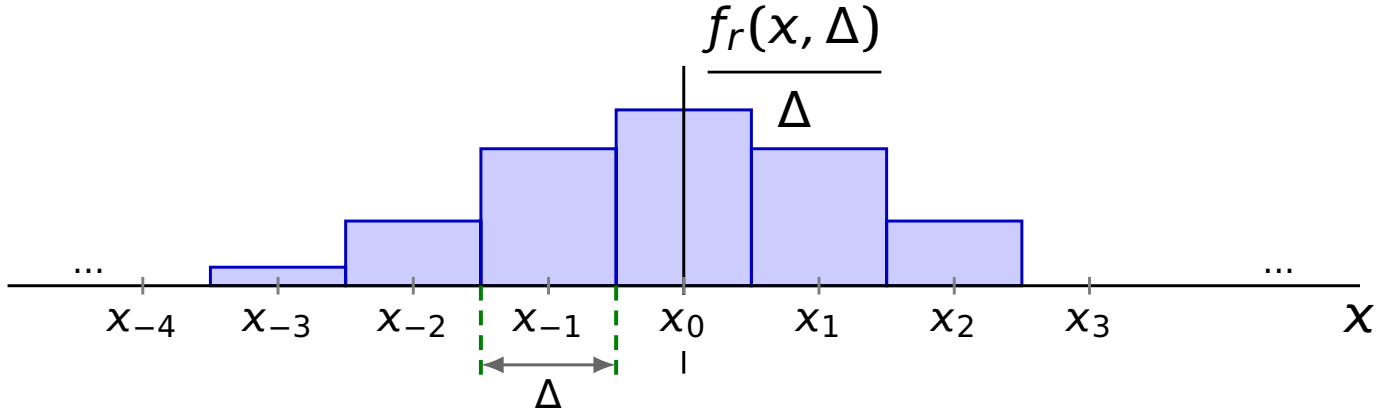
$$\overline{X}_{R_T} = (-1)\cdot\frac{4}{10} + 1\cdot\frac{6}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\overline{X}_{R_T} = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot f_r(x_k)$$

$$\overline{X} = \lim_{R_T\to\infty} \overline{X}_{R_T} = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \mathrm{P}(X = x_k)$$

2.2 Variable aleatoria
Momentos

- Promedio de R_T realizaciones



$$\overline{X}_{R_T} = \ldots + \overbrace{1.01 \cdot \frac{1}{100} + 1.12 \cdot \frac{1}{100} + 1.21 \cdot \frac{1}{100}}^{1<X\leq 1.25} + \ldots$$

$$\approx \ldots + 1.125 \cdot \frac{3}{100} + \ldots$$

$$\overline{X}_{R_T} \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot f_r(x_k,\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \frac{f_r(x_k,\Delta)}{\Delta}\Delta$$

$$\overline{X} = \lim_{\substack{R_T\to\infty \\ \Delta\to 0}} \overline{X}_{R_T} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

2.2 Variable aleatoria
Momentos

- Media

$$\overline{X} = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$\overset{v.d.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(x = x_k)\delta(x - x_k) dx = \sum_{k=1}^{N} x_k \mathrm{P}(X = x_k)$$

- Valor esperado o promedio de una función de una variable aleatoria

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$\overset{v.d.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X = x_k)\delta(x - x_k) dx = \sum_{k=1}^{N} g(x_k)\mathrm{P}(X = x_k)$$

2.2 Variable aleatoria
Momentos

- Momento de orden n

$$\mathrm{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx \overset{v.d.}{=} \sum_{k=1}^{N} x_k^n \mathrm{P}(X = x_k)$$

Media:

$$\overline{X} = \mathrm{E}[X]$$

Valor cuadrático medio:

$$\overline{X^2} = \mathrm{E}[X^2]$$

- Momento central de orden n

$$\mathrm{E}[(X-\overline{X})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{X})^n f_X(x)dx \overset{v.d.}{=} \sum_{k=1}^{N} (x_k-\overline{X})^n \mathrm{P}(X = x_k)$$

Varianza:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}[(X-\overline{X})^2] = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

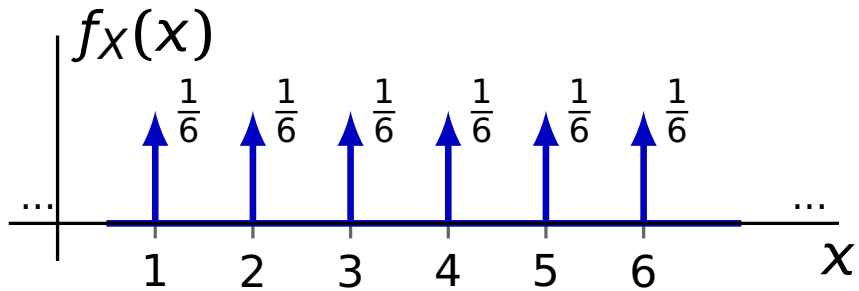
Desviación típica media:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}[(X-\overline{X})^2]}$$

2.2 Variable aleatoria
Momentos

Ejemplo:
$X \equiv$ valor de la cara superior al lanzar un dado

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\delta(x-k)$$



$$\overline{X} = \mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{N} x_k \mathrm{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

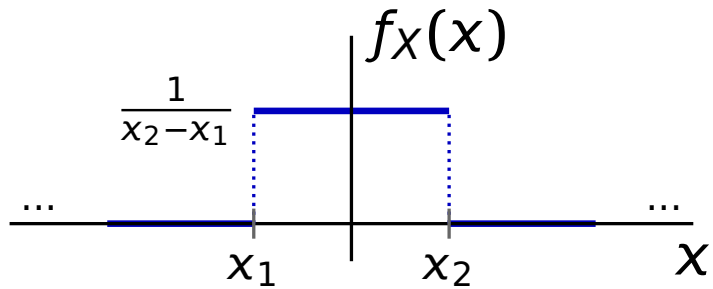
$$\overline{X^2} = \mathrm{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 \mathrm{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{6} k^2\frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15.166$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}[(x-\overline{X})^2] = \sum_{k=1}^{N} (x_k-\overline{X})^2 \mathrm{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{6} (k-3.5)^2\frac{1}{6} = 2.92$$

2.2 Variable aleatoria
Distribuciones más usadas

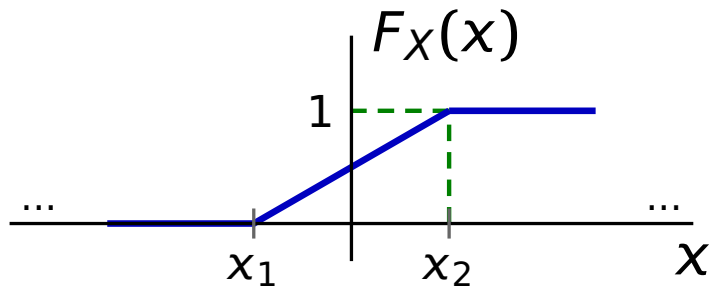
- Uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



$$\overline{X} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{x_1 - x_2} = \frac{x^2}{2(x_1 - x_2)}\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$



$$\sigma_X^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

$$\overline{X^2} = \sigma_X^2 + \overline{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}{3}$$

2.2 Variable aleatoria
Distribuciones más usadas

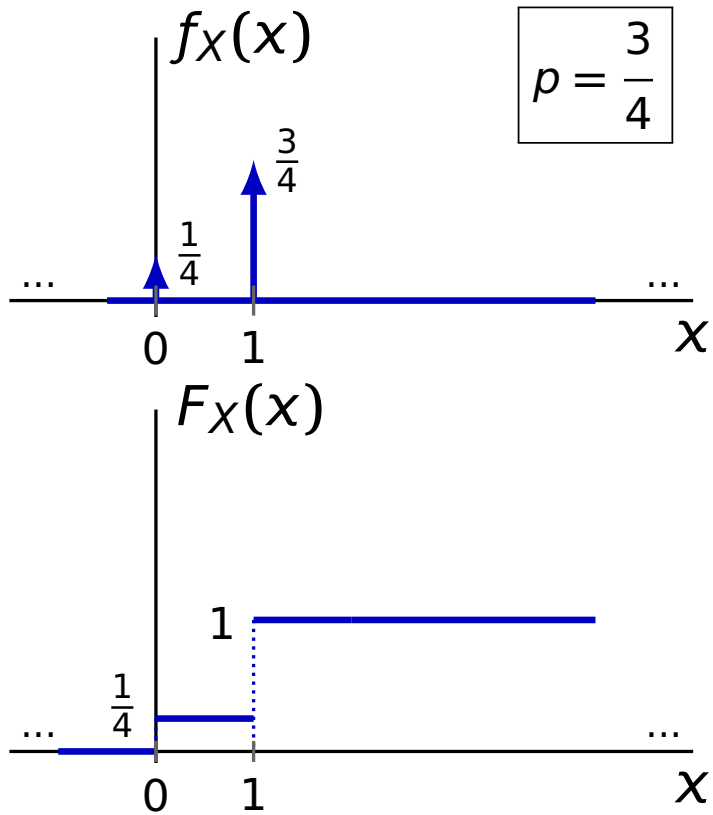
- Bernoulli

$$f_X(x) = (1-p)\delta(x) + p\delta(x-1)$$

$$\overline{X} = p$$

$$\overline{X^2} = p$$

$$\sigma_X^2 = p - p^2 = p(1-p)$$



2.2 Variable aleatoria
Distribuciones más usadas

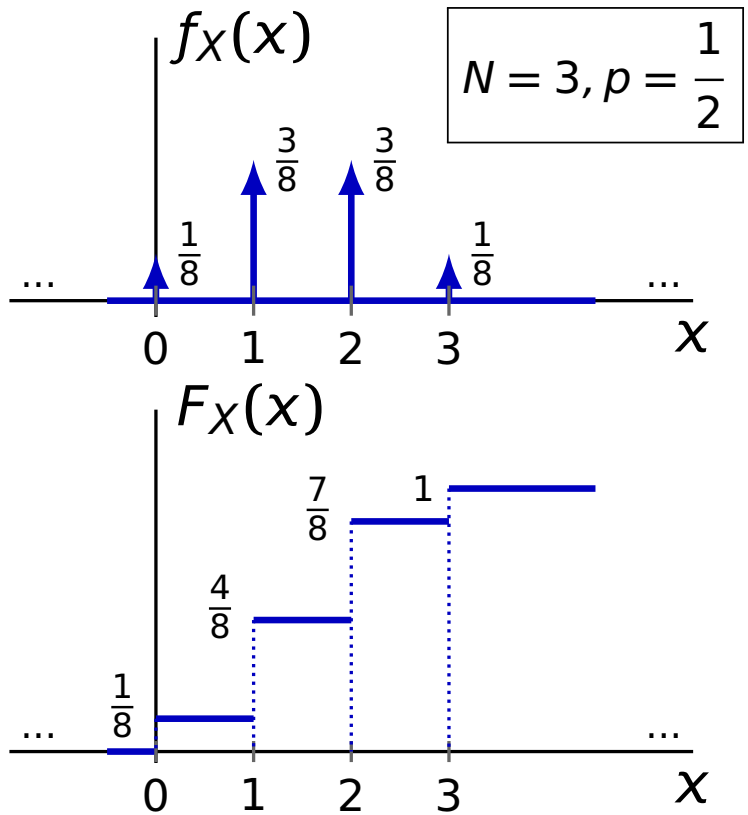
- Binomial

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \delta(x-k)$$

$$\overline{X} = Np$$

$$\sigma_X^2 = (1-p)Np$$

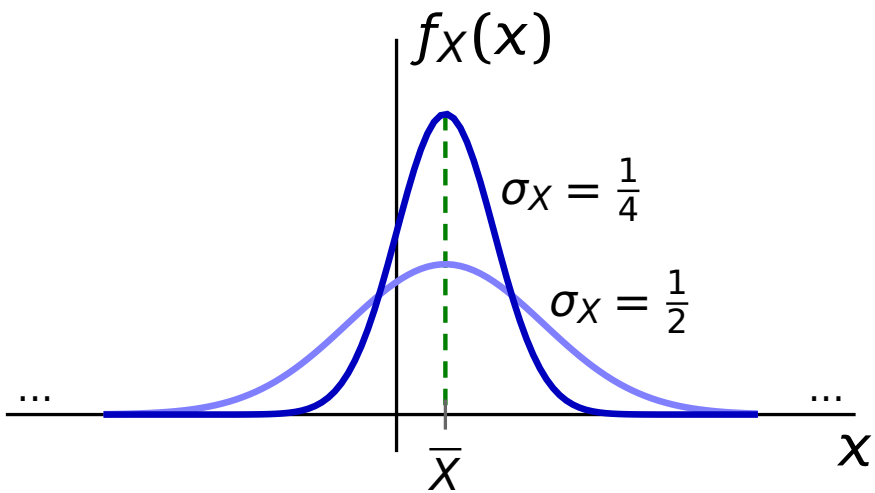
$$\overline{X^2} = \sigma_X^2 + \overline{X}^2 = ((N-1)p+1)Np$$

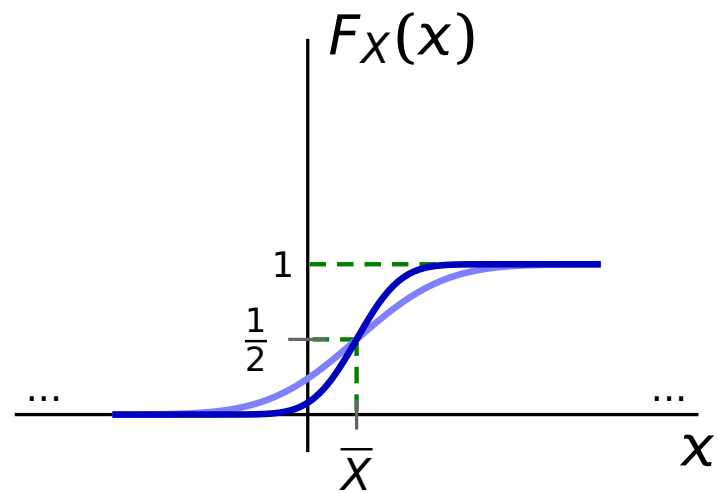


2.2 Variable aleatoria
Distribuciones más usadas

- Gaussiana o normal

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma_X^2}\right) \equiv X \sim \mathcal{N}(\overline{X}, \sigma_X^2)$$





$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\overline{X}}{\sigma_X\sqrt{2}}\right)\right) = 1 - \mathrm{Q}\left(\frac{x-\overline{X}}{\sigma_X}\right)$$

Transformación de variable:

$$Y = g(X) \rightarrow X = g^{-1}(Y), \text{ aunque no siempre existe}$$

Cálculo de la función densidad de probabilidad:

1. Método directo

$$f_Y(y) = \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| f_X(g^{-1}(y))$$

2. Método indirecto

$$\text{a) } F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(g(X) \leq y)$$

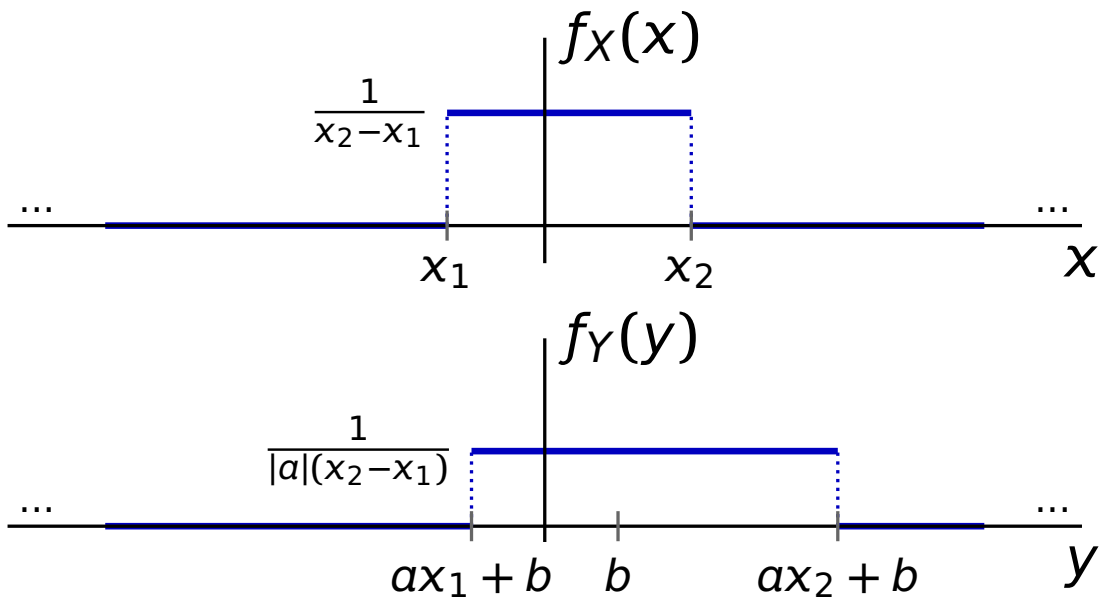
$$\text{b) } f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

2.2 Variable aleatoria
Transformación de variable aleatoria

Ejemplo:

$$Y = aX + b \rightarrow X = g^{-1}(Y) = \frac{Y - b}{a}$$

$$f_Y(y) = \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| f_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y - b}{a} \right)$$

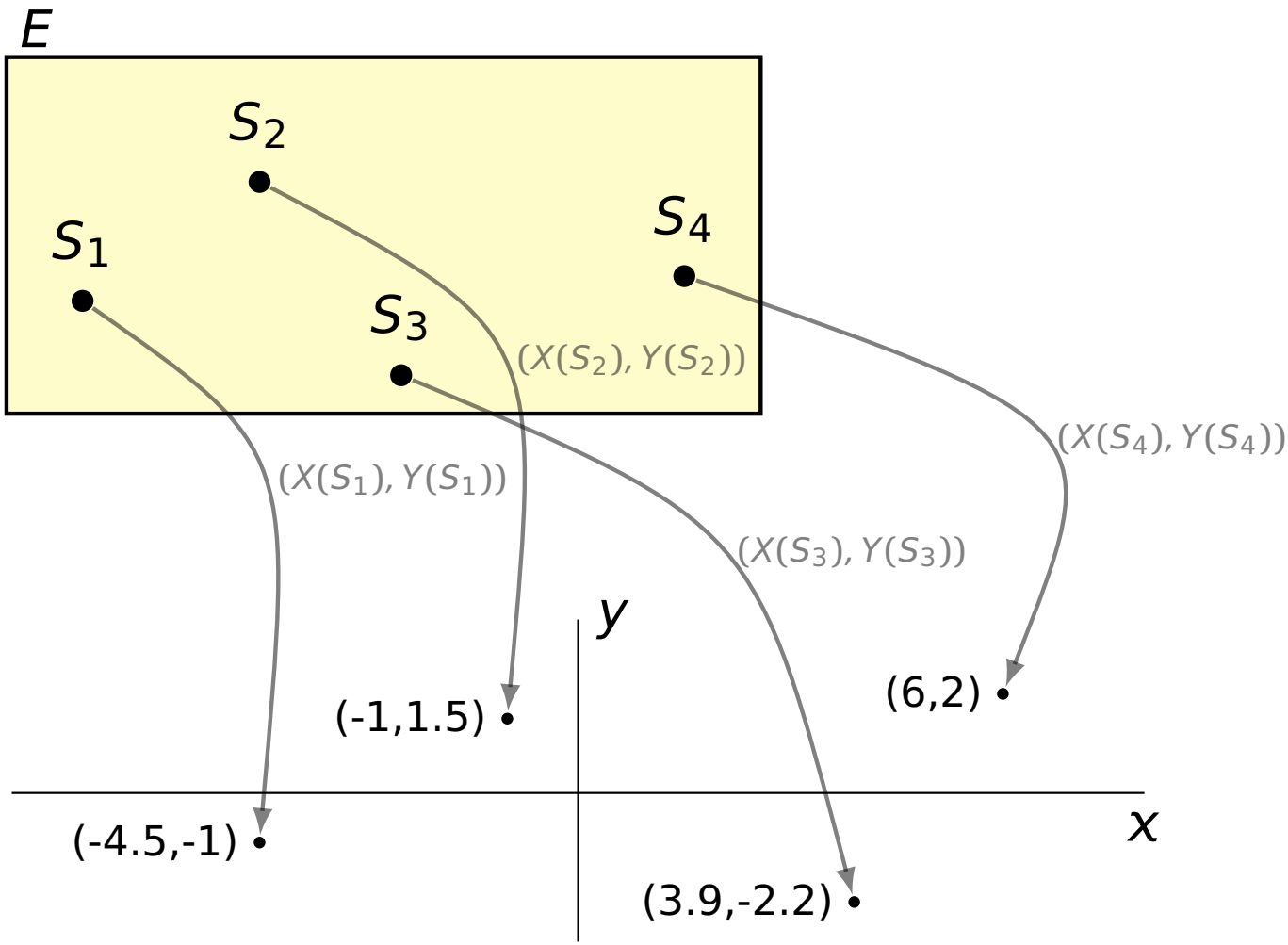


2.3 Variable aleatoria bidimensional

- Definición
- Nube de puntos y frecuencia relativa
- Histograma bidimensional
- Función densidad de probabilidad
- Función de distribución de probabilidad
- Marginales
- Función densidad de probabilidad condicionada
- Teorema de la probabilidad total
- Momentos y relaciones entre variables
- Distribuciones más usadas
- Combinación lineal de variables aleatorias
- Teorema Central del Límite

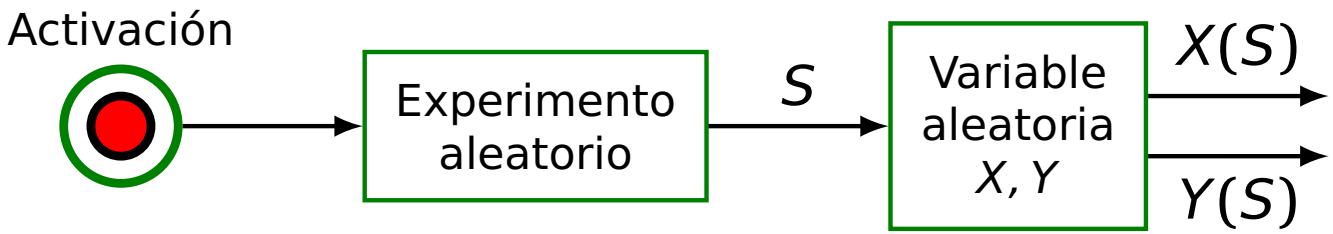
2.3 Variable aleatoria bidimensional
Definición

Función que asigna un par de números reales a cada posible suceso elemental



2.3 Variable aleatoria bidimensional
Definición

Esquema de sistema



Ejemplos:

1. Lanzar un dardo a una diana

$$X(S) \equiv \text{ Coordenada X con respecto al centro de la diana}$$

$$Y(S) \equiv \text{ Coordenada Y con respecto al centro de la diana}$$

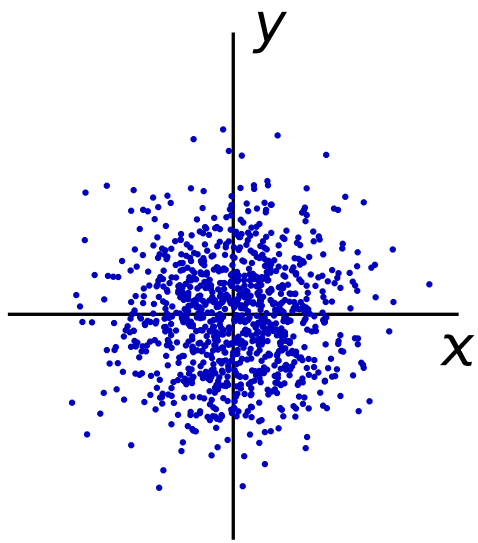
2. Lanzar dos dados

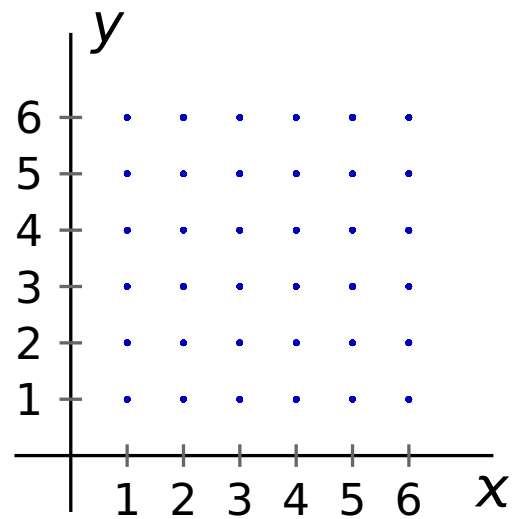
$$X(S) \equiv \text{ Valor del primer dado}$$

$$Y(S) \equiv \text{ Valor del segundo dado}$$

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Nube de puntos y frecuencia relativa

- Nube de puntos





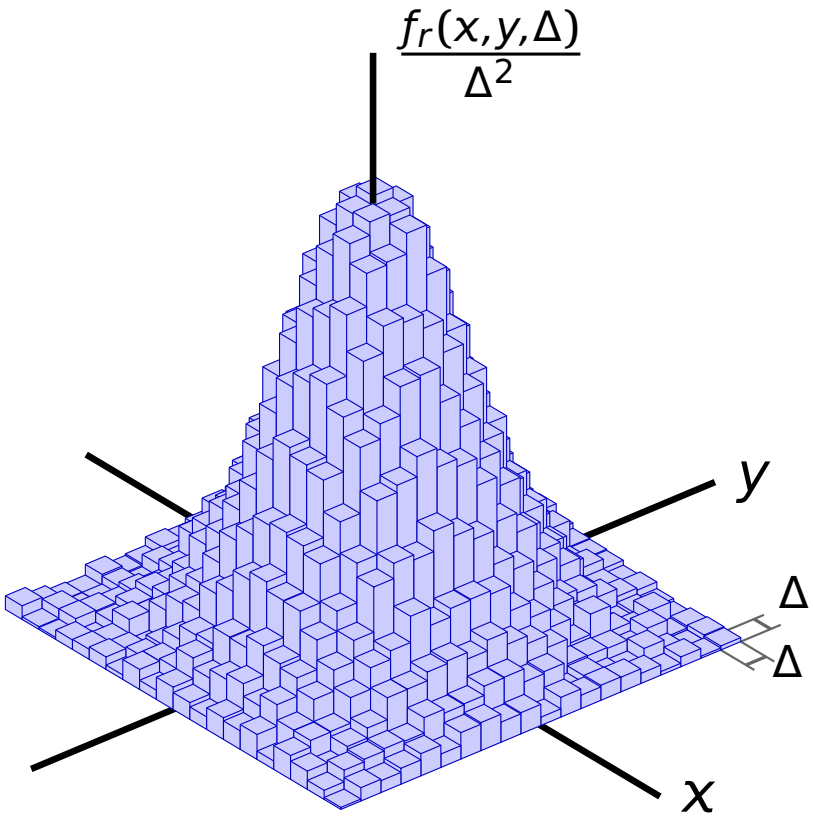
- Frecuencia relativa de una variable bidimensional

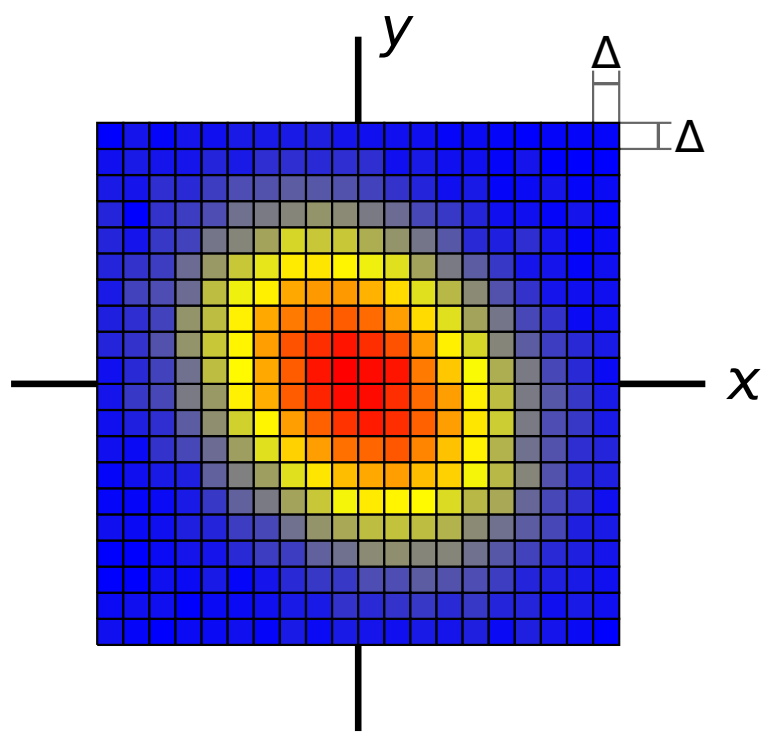
$$f_r(x, y, \Delta) = \frac{N_{x,y,\Delta}}{N_T}$$

$N_{x,y,\Delta} \equiv$ Nº realizaciones $X \in (x - \frac{\Delta}{2}, x + \frac{\Delta}{2}]$, $Y \in (y - \frac{\Delta}{2}, y + \frac{\Delta}{2}]$
$N_T \equiv$ Nº total de realizaciones del experimento

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Histograma bidimensional

- Histograma bidimensional
  Las amplitudes de las barras son $f_r(x, y, \Delta)/\Delta^2$, por lo que el volumen de cada barra es $f_r(x, y, \Delta)$, y el volumen total es 1.

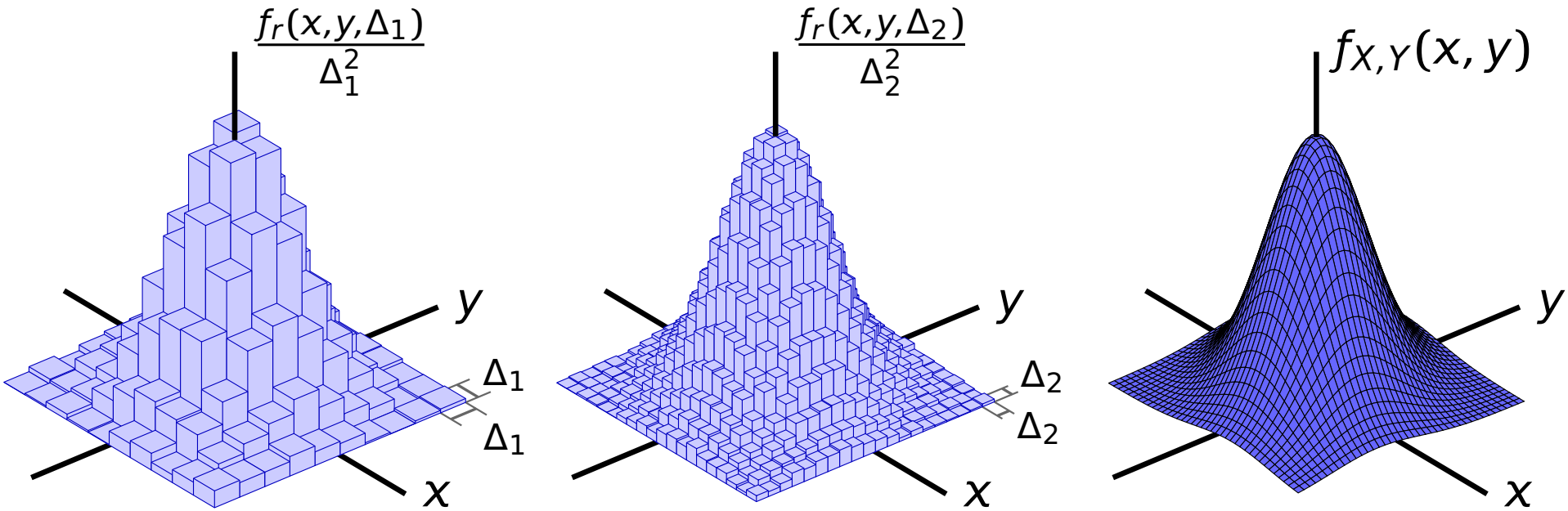




2.3 Variable aleatoria bidimensional

Función densidad de probabilidad

$$\frac{f_r(x,y,\Delta)}{\Delta^2}\underset{N_T\to\infty}{\overset{\Delta\to 0}{}} = f_{X,Y}(x,y)$$

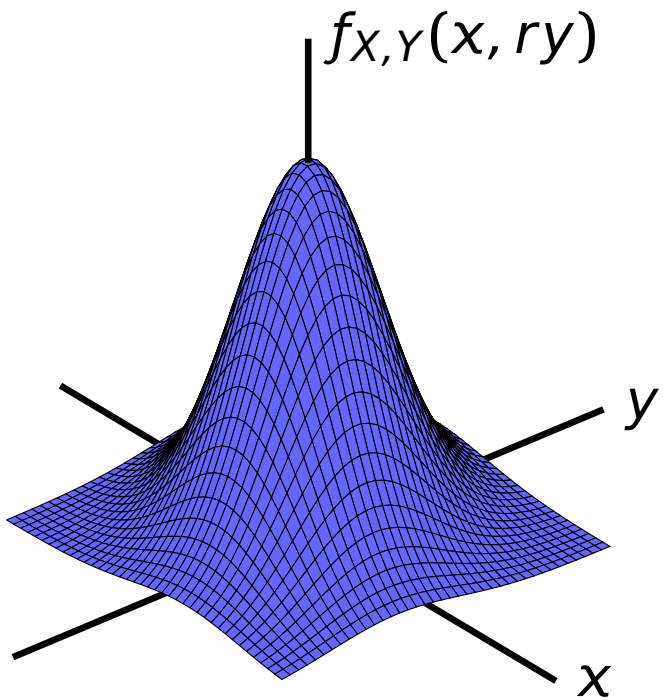


$$\mathrm{P}(x_0 < X \le x_1, y_0 < Y \le y_1) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Función densidad de probabilidad

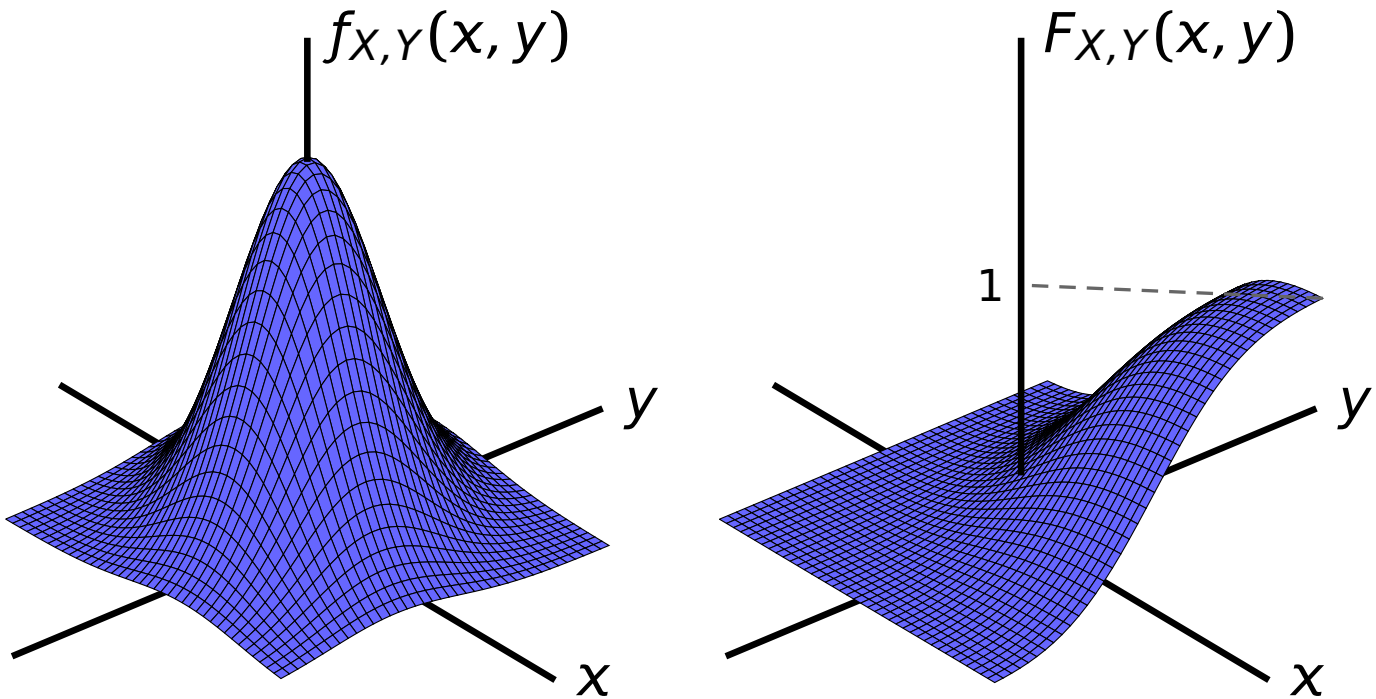
Propiedades:

1. $\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \mathrm{P}(x_0 < X \leq x_1, y_0 < Y \leq y_1)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \mathrm{P}(-\infty < X \leq \infty, -\infty < Y \leq \infty) = 1$
3. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0, \quad \forall x, y$



Función de distribución de probabilidad

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

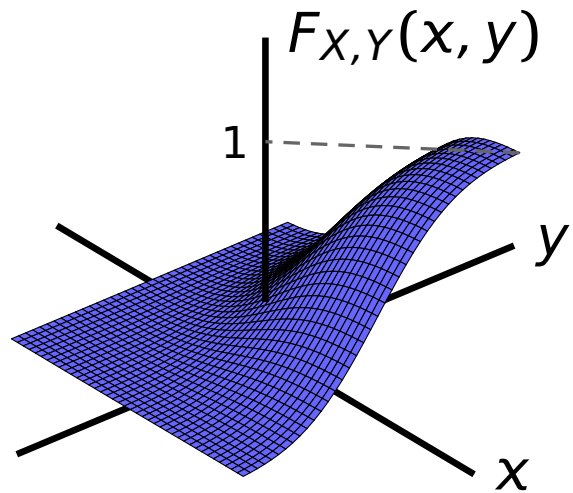


2.3 Variable aleatoria bidimensional
Función de distribución de probabilidad

Función de distribución de probabilidad

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

Propiedades:



1. $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$
2. $\lim_{\substack{x\to-\infty,\\ y\to-\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 0,$
   $\lim_{\substack{x\to\infty,\\ y\to\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1$
3. $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$
4. $\mathrm{P}(x_0 < X \leq x_1, y_0 < Y \leq y_1) =$
   $F_{X,Y}(x_1,y_1) - F_{X,Y}(x_1,y_0) - F_{X,Y}(x_0,y_1) + F_{X,Y}(x_0,y_0)$

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Marginales

Funciones densidad o distribución de probabilidad de una variable independientemente del valor de la otra variable

- Función densidad de probabilidad marginal

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$$

- Función de distribución de probabilidad marginal

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq \infty)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y) = \mathrm{P}(X \leq \infty, Y \leq y)$$

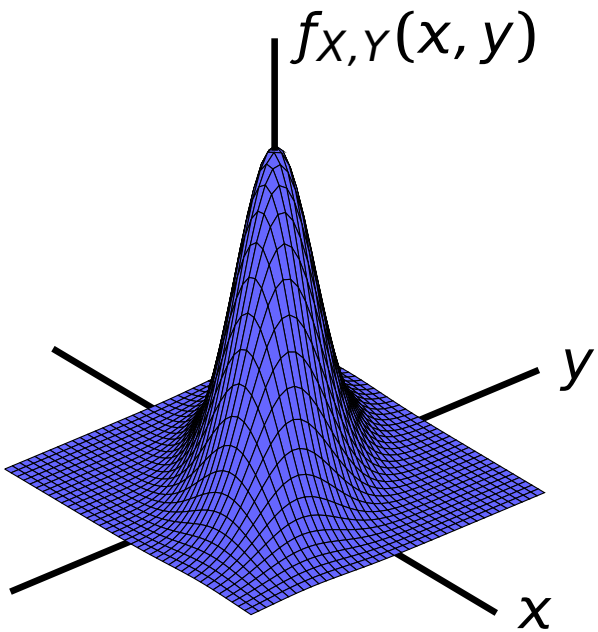
2.3 Variable aleatoria bidimensional
Función densidad de probabilidad condicionada

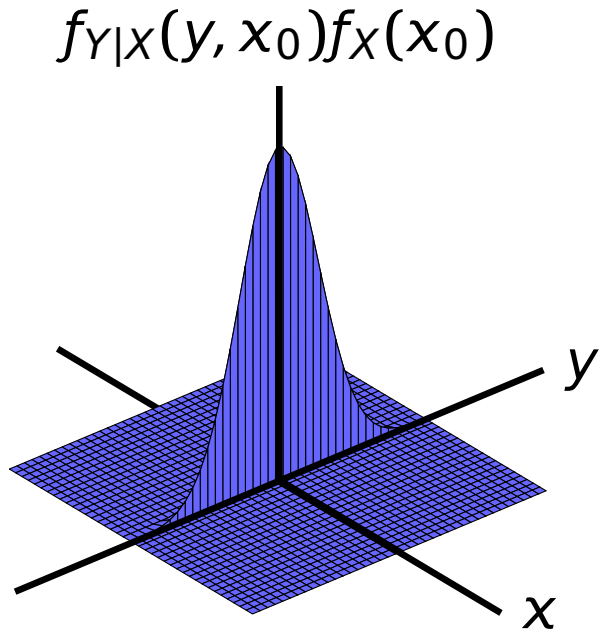
Función densidad de probabilidad de X condicionada a $Y = y_0$

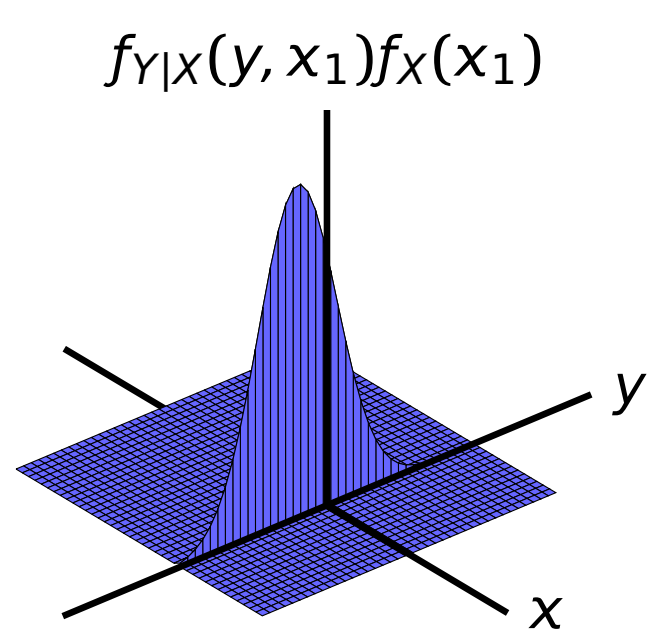
$$f_{X,Y}(x, y_0) = f_{X|Y}(x, y_0) f_Y(y_0) \rightarrow f_{X|Y}(x, y_0) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

Función densidad de probabilidad de Y condicionada a $X = x_0$

$$f_{X,Y}(x_0, y) = f_{Y|X}(y, x_0) f_X(x_0) \rightarrow f_{Y|X}(y, x_0) = \frac{f_{X,Y}(x_0, y)}{f_X(x_0)}$$







2.3 Variable aleatoria bidimensional
Teorema de la probabilidad total

Supongamos un par de variables aleatorias relacionadas X e Y, y sea C_i uno de los N sucesos de una partición del espacio muestral de la variable aleatoria Y, de modo que

$$C_i \cap C_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} C_i = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_N = E_Y$$

La función densidad de otra variable X se puede obtener

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} f_{X|C_i}(x)\mathrm{P}(C_i)$$

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Momentos y relaciones entre variables

Valor esperado o promedio de una función de una variable aleatoria bidimensional

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$
$$\overset{v.d.}{=} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} g(x_k,y_l)\mathrm{P}(x=x_k, y=y_l)$$

Media

$$\overline{X} = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \overset{v.d.}{=} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} x_k \mathrm{P}(X=x_k, Y=y_l)$$

$$\overline{Y} = \mathrm{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \overset{v.d.}{=} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} y_l \mathrm{P}(X=x_k, Y=y_l)$$

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Momentos y relaciones entre variables

- Correlación

$$\Gamma_{X,Y} = \mathrm{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\overset{v.d.}{=} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} x_k y_l \mathrm{P}(X=x_k, Y=y_l)$$

$$\boxed{\Gamma_{X,Y} = 0 \rightarrow \text{ Variables ortogonales}}$$

- Covarianza

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{E}[(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{X})(y-\overline{Y}) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\overset{v.d.}{=} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} (x_k-\overline{X})(y_l-\overline{Y}) \mathrm{P}(X=x_k, Y=y_l)$$

$$\boxed{\sigma_{X,Y} = 0 \rightarrow \text{ Variables incorreladas}}$$

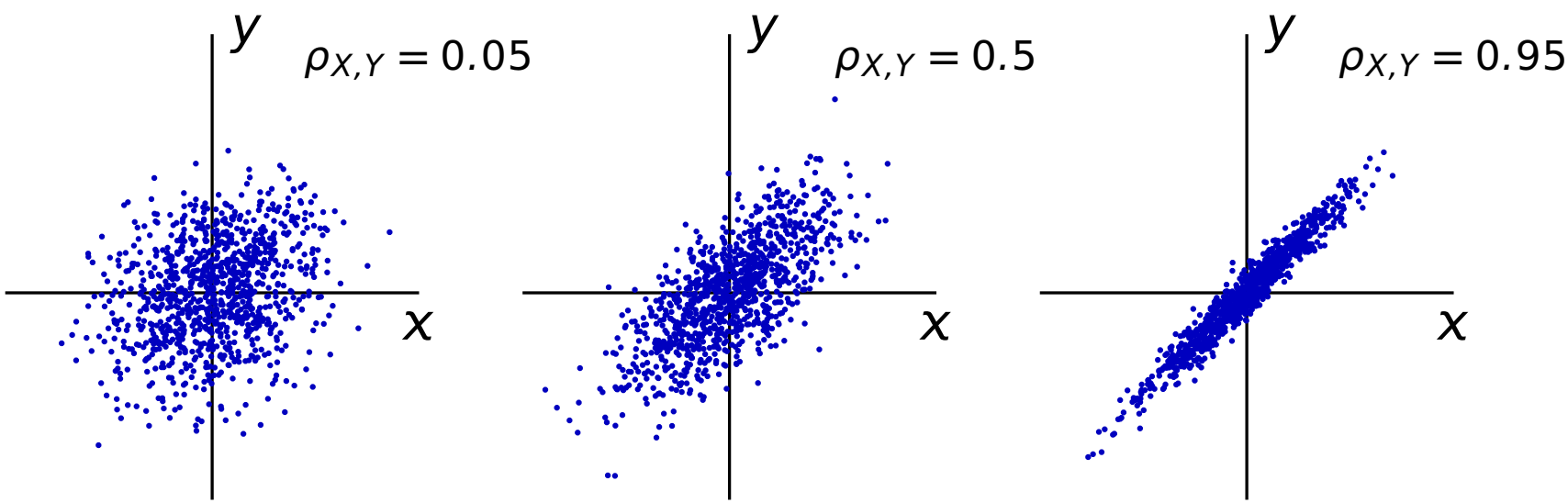
2.3 Variable aleatoria bidimensional
Momentos y relaciones entre variables

- Propiedades

1. $\Gamma_{X,Y} = \sigma_{X,Y} + \overline{X} \cdot \overline{Y}$
2. $\Gamma_{X,Y}^2 \leq \overline{X^2} \cdot \overline{Y^2}$
3. $\sigma_{X,Y}^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2$
4. $\sigma_{X,Y}^2 = \sigma_X^2 \sigma_Y^2$ si, y sólo si $Y = aX + b$

- Coeficiente de correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})]}{\sqrt{\mathrm{E}[(X - \overline{X})^2]\mathrm{E}[(Y - \overline{Y})^2]}}$$



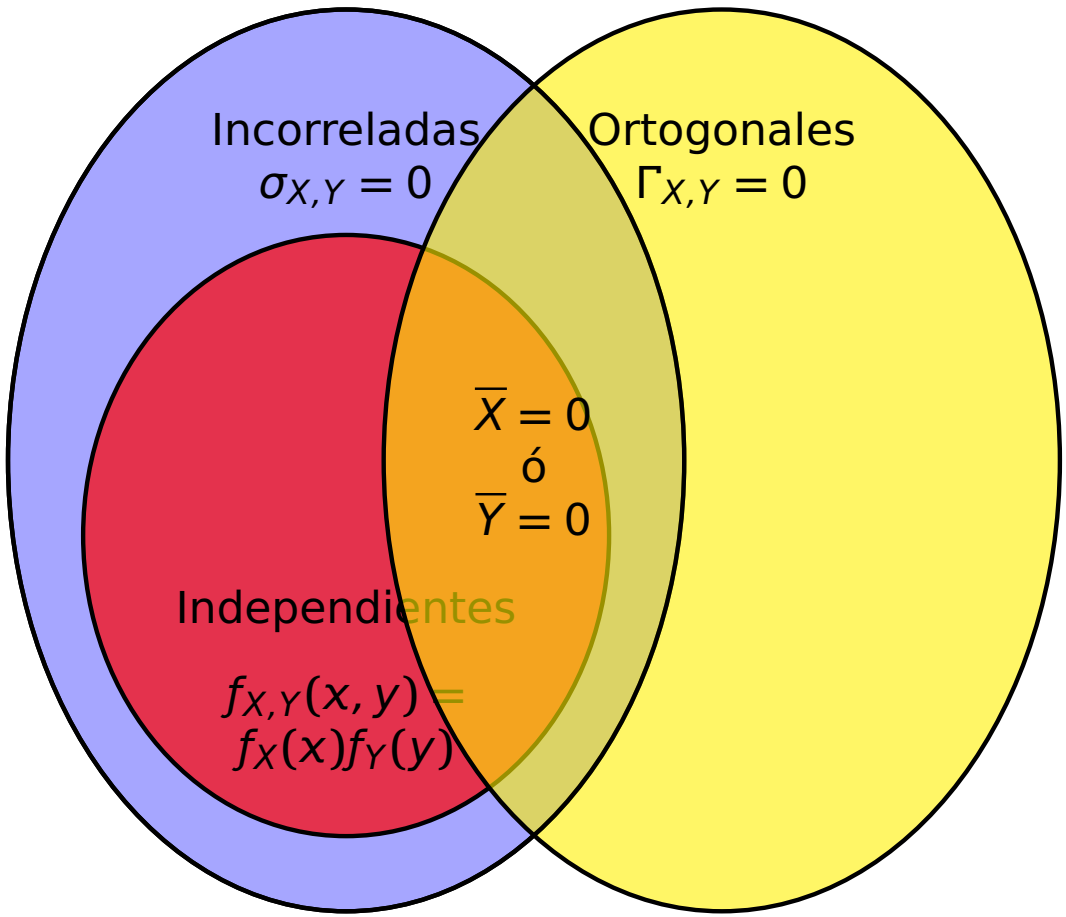
2.3 Variable aleatoria bidimensional
Momentos y relaciones entre variables

- Variables Independientes
  Variables que no tienen ninguna relación, ni determinista ni estadística
  1. $f_{X|Y}(x,y) = f_X(x),\ \ f_{Y|X}(x,y) = f_Y(y)$
  2. $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)\ \ ,\ \ F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$
- Propiedades
  1. $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\mathrm{E}[h(Y)]$
  2. $\sigma_{X,Y} = \mathrm{E}[(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})] = \mathrm{E}[X-\overline{X}]\mathrm{E}[Y-\overline{Y}] = 0 \rightarrow$ Incorreladas
  3. $\Gamma_{X,Y} = \mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = \overline{X}\cdot\overline{Y} \xrightarrow[\overline{Y}=0]{\overline{X}=0}$ Ortogonales
- Ejemplos
  - Independientes
    - Lanzamiento de dos dados, sacar una bola de dos bombos iguales
  - No independientes
    - *Relación estadística*: estatura y número de pie, temperatura y latitud, sacar dos bolas consecutivas de un bombo
    - *Relación determinista*: volumen de una burbuja y su radio, velocidad de salida y distancia de alcance de un proyectil

2.3 Variable aleatoria bidimensional

Momentos y relaciones entre variables

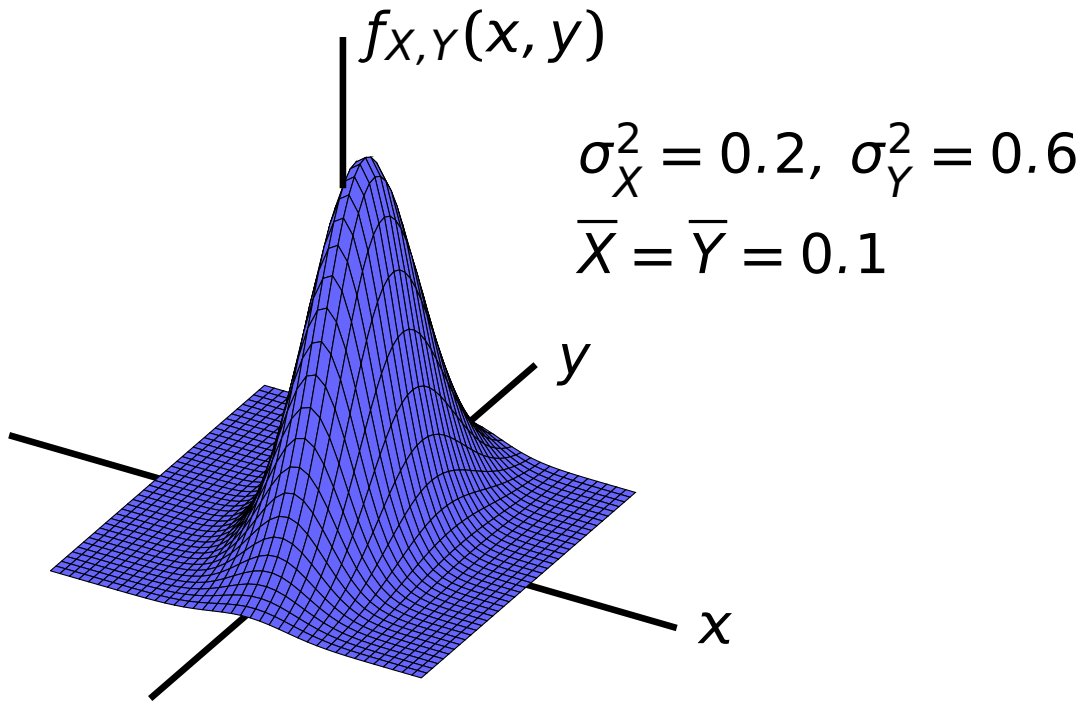
Independencia $\rightarrow$ Incorrelación $\xrightarrow[\overline{Y}=0]{\overline{X}=0}$ Ortogonalidad



2.3 Variable aleatoria bidimensional
Distribuciones más usadas

- Gaussiana bidimensional (variables independientes)

$$f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left(\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma_X^2} + \frac{(y-\overline{Y})^2}{2\sigma_Y^2} \right) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$



2.3 Variable aleatoria bidimensional
Combinación lineal de variables aleatorias

Variable aleatoria suma: $\boxed{Z = X + Y}$

- Función densidad de probabilidad
  Método indirecto

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(X + Y \leq z) = \mathrm{P}(-\infty \leq X \leq \infty, Y \leq z - X,)$$

Si X e Y no son independientes el cálculo es complicado, pero si son **independientes**, se puede demostrar que

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z - x) dx \rightarrow \boxed{f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z)}$$

- Media

$$\overline{Z} = \mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[X + Y] = E[X] + \mathrm{E}[Y] = \overline{X} + \overline{Y}$$

- Varianza

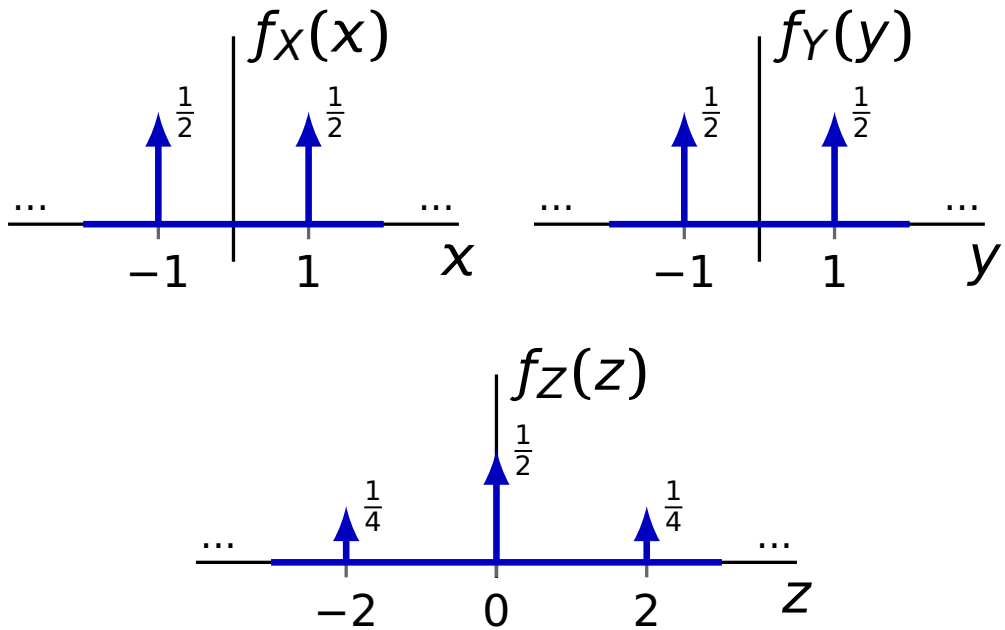
$$\sigma_Z^2 = \mathrm{E}[(Z - \overline{Z})^2] = \mathrm{E}[((X - \overline{X}) + (Y - \overline{Y}))^2] = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{X,Y}$$

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Combinación lineal de variables aleatorias

Ejemplo:

$$Z = X + Y$$

$X, Y \equiv$ Lanzamiento de una moneda (cruz $\equiv -1$, cara $\equiv 1$)



2.3 Variable aleatoria bidimensional
Combinación lineal de variables aleatorias

Variable aleatoria combinación lineal

$$Z = \sum_{k=1}^{N} a_k X_k$$

- Función densidad de probabilidad (X_k **independientes**)

$$f_Z(z) = \frac{1}{|a_1|} f_{X_1}\left(\frac{z}{a_1}\right) * \frac{1}{|a_2|} f_{X_2}\left(\frac{z}{a_2}\right) * \ldots * \frac{1}{|a_N|} f_{X_N}\left(\frac{z}{a_N}\right)$$

- Media

$$\overline{Z} = \mathrm{E}[Z] = \sum_{k=1}^{N} a_k \overline{X_k}$$

- Varianza

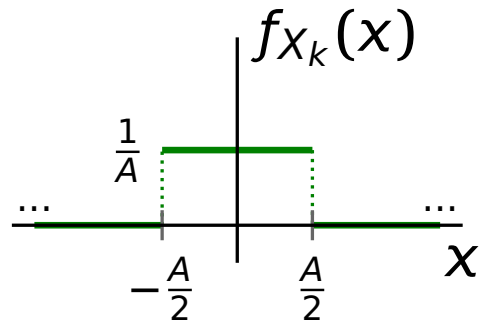
$$\sigma_Z^2 = \mathrm{E}[(Z - \overline{Z})^2] = \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \sigma_{X_k}^2 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^{N} a_n a_m \sigma_{X_n, X_m}$$

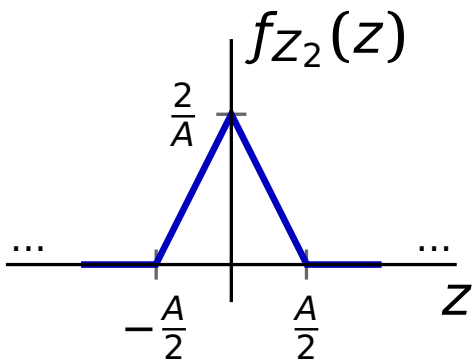
2.3 Variable aleatoria bidimensional
Combinación lineal de variables aleatorias

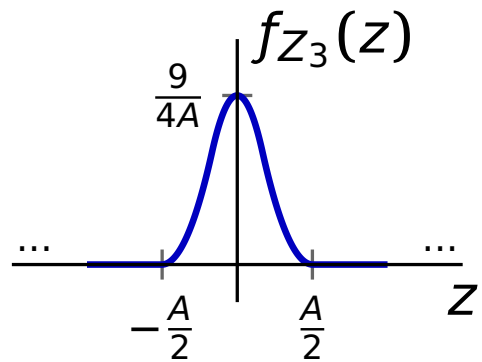
Ejemplo:

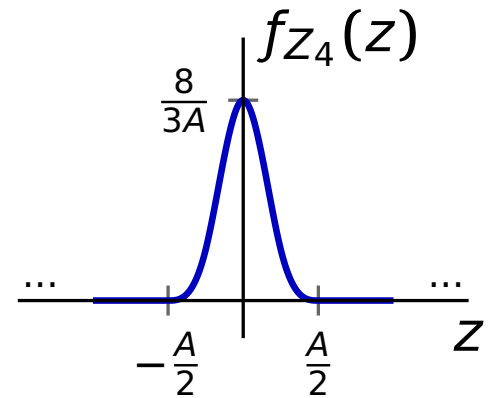
$$Z_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$$

X_k variables independientes y uniformes en el intervalo $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$









2.3 Variable aleatoria bidimensional
Teorema Central del Límite

- Definición formal
  Sea la variable aleatoria

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

  donde X_k son variables independientes e idénticamente distribuidas (iid), de media cero ($\overline{X_k} = 0$) y varianza σ_X^2
  El Teorema Central del Límite afirma que

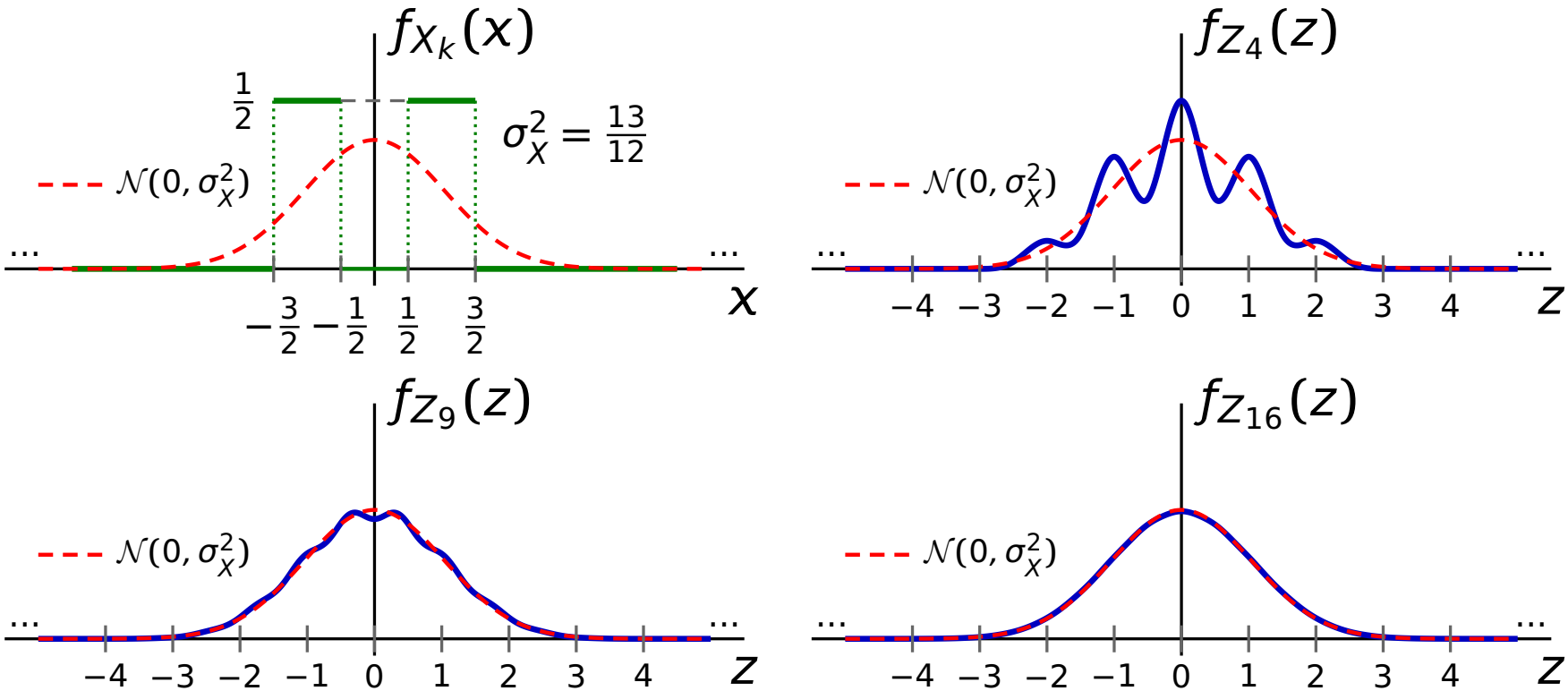
$$Z_\infty \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$$

- Definición general
  La suma de un número elevado de variables aleatorias independientes, si ninguna tiene una varianza mucho mayor que las demás, tiende a distribuirse aproximadamente como una variable gaussiana

2.3 Variable aleatoria bidimensional
Teorema Central del Límite

Ejemplo de suma de variables aleatorias

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} X_k$$



2.4 Análisis de señales deterministas

Caracterización de señales deterministas
Promedios temporales
Correlación
Autocorrelación
Potencia de la suma
Transformada de Fourier
Densidad espectral de potencia o energía
Sistemas lineales

2.4 Análisis de señales deterministas
Caracterización de señales deterministas

- Funciones para caracterizar señales deterministas

	Tiempo		**Frecuencia**
Caracterización Total	$\longrightarrow$ $x(t),\ x[n]$	$\xrightarrow{\mathcal{TF}}$	$X(f),\ X(f')$
Caracterización Parcial	$\longrightarrow$ $R_x(\tau),\ R_x[n]$	$\xrightarrow{\mathcal{TF}}$	$S_x(f),\ S_x(f')$

  - $x(t),\ x[n] \equiv$ Expresiones analíticas de señales en el tiempo
  - $X(f),\ X(f') \equiv$ Expresiones analíticas de señales en frecuencia
  - $R_x(\tau),\ R_x[n] \equiv$ Autocorrelación determinista
  - $S_x(f),\ S_x(f') \equiv$ Densidad espectral de potencia o energía

2.4 Análisis de señales deterministas
Promedios temporales

Definición:

- Para señales de energía:

$$< x(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt, \quad < x[n] >= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

- Para señales de potencia:

$$< x(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt, \quad < x[n] >= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]$$

- Para señales de potencia periódicas:

$$< x(t) >= \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} x(t)dt, \quad < x[n] >= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]$$

2.4 Análisis de señales deterministas
Promedios temporales

Propiedades:

- Para señales de energía:
  - $< x(t) >= X(f)|_{f=0}, \quad < x[n] >= X(f')|_{f'=0}$
  - Energía: $< x^2(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt, \quad < x^2[n] >= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$
- Para señales de potencia:
  - Potencia:

$$< x^2(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt, \quad < x^2[n] >= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n]$$

- Para señales de potencia periódicas:
  - $< x(t) >= X_0, \quad < x[n] >= X_0$ (coeficiente espectral)
  - Potencia:

$$< x^2(t) >= \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} x^2(t)dt, \quad < x^2[n] >= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x^2[n]$$

2.4 Análisis de señales deterministas
Promedios temporales

Ejemplo:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Señal de potencia periódica

$$< x(t) >= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\cos(\omega_0 t + \phi)dt = 0$$

$$< x^2(t) >= P_x = \frac{A^2}{2}$$

Ejemplo:

$$y(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

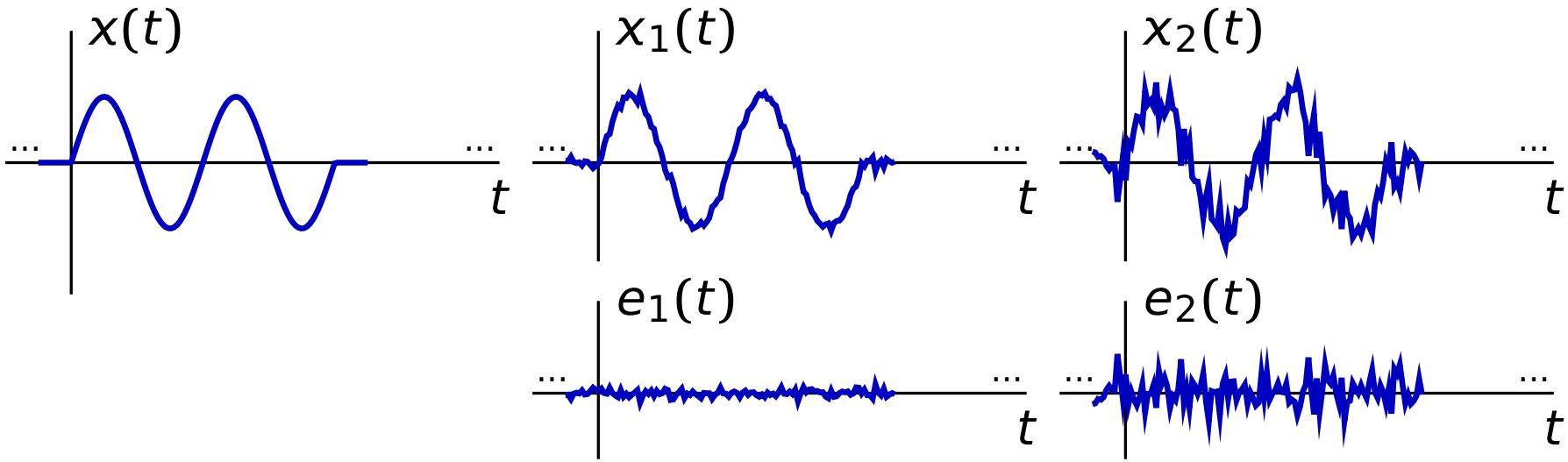
Señal de energía ($\alpha > 0$)

$$< y(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt = \left.\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

$$< y^2(t) >= E_y = (2\alpha)^{-1}$$

2.4 Análisis de señales deterministas
Correlación

Medida de la diferencia de dos señales



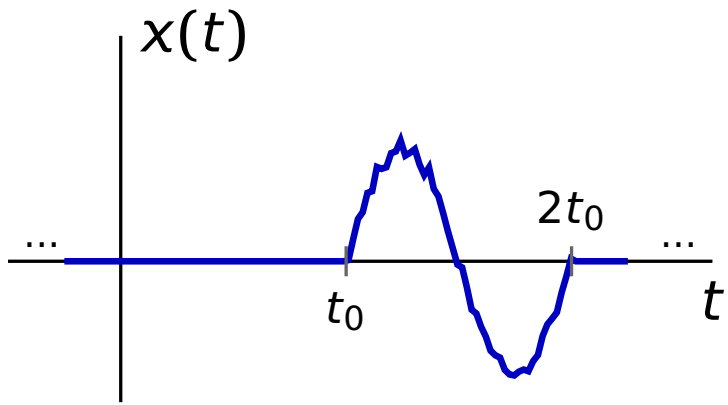
$$< e_1^2(t) >= < (x(t) - x_1(t))^2 >=$$

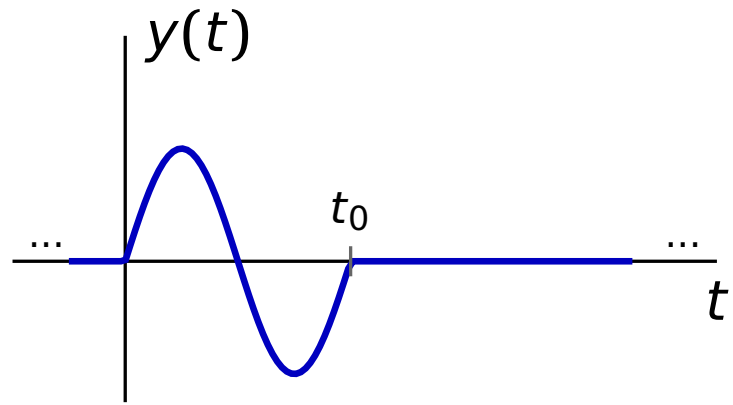
$$< x^2(t) > + < x_1^2(t) > -2 < x(t)x_1(t) >=$$

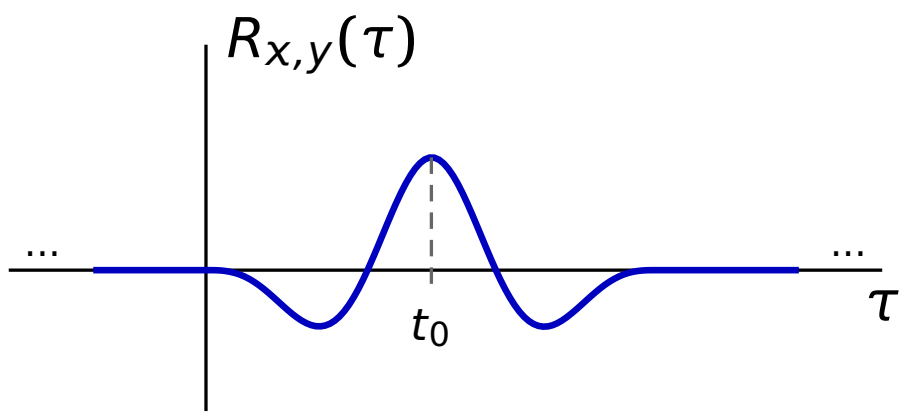
$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt}_{E_X} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t)dt}_{E_{X_1}} - 2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_1(t)dt}_{\text{Correlación}}$$

Correlación

$$R_{x,y}(\tau) =< x(t)y(t-\tau) >= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt = x(\tau) * y(-\tau)$$







2.4 Análisis de señales deterministas
Autocorrelación

- Definición

$$R_x(\tau) =< x(t)x(t-\tau) >, \quad R_x[m] =< x[n]x[n-m] >$$

- Descripción
  Medida de la similitud de una señal consigo misma desplazada.
  Conserva información sobre del ritmo de variación de la señal con el tiempo, pero se pierde la información de fase
- Propiedades
  1. $R_x(\tau) = R_x(-\tau) \rightarrow$ función par
  2. $R_x(0) =< x^2(t) >=$ Energía o Potencia de $x(t)$
  3. $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
  4. $x_d(t) = x(t-T) \rightarrow R_{x_d}(\tau) = R_x(\tau)$

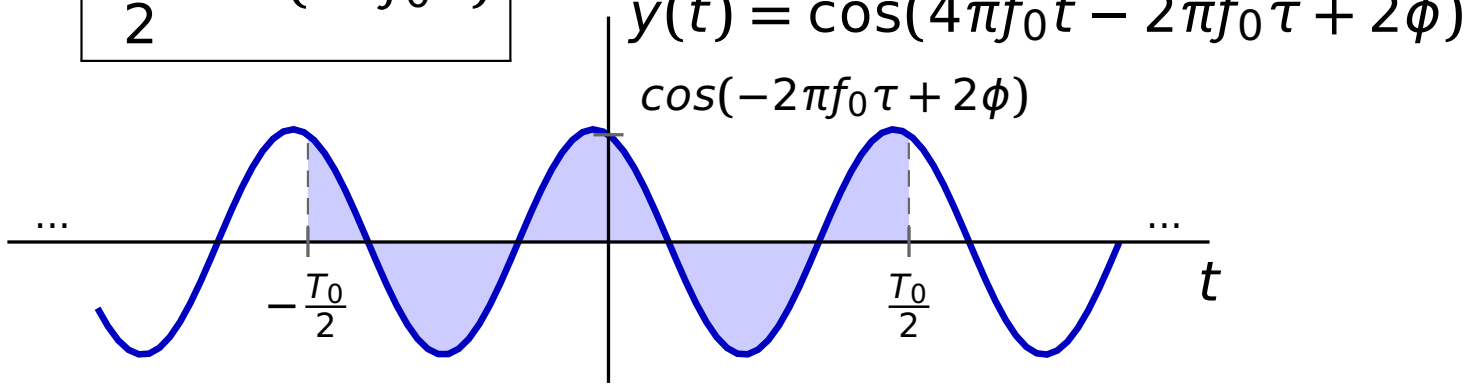
- Ejemplo:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2\cos(2\pi f_0 t + \phi)\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \phi)dt =$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{A^2}{2}(\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\phi) + \cos(2\pi f_0 \tau))\,dt =$$

$$\boxed{\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)}$$



2.4 Análisis de señales deterministas
Potencia de la suma

Sea $z(t)$ una señal determinista de potencia tal que $z(t) = x(t) + y(t)$
La potencia de la señal $z(t)$ es

$$P_Z = R_z(0) = < z^2(t) > = < (x(t) + y(t))^2 > =$$
$$< x^2(t) > + < y^2(t) > + 2 < x(t)y(t) > =$$
$$\boxed{P_x + P_y + 2R_{x,y}(0)}$$

Si correlación cruzada de las señales es cero (señales ortogonales) entonces

$$R_{x,y}(0) = 0 \rightarrow \boxed{P_z = P_x + P_y}$$

2.4 Análisis de señales deterministas
Transformada de Fourier

- Tiempo continuo

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt,\quad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\boxed{X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt,}\qquad \boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df},\quad f=\frac{\omega}{2\pi}$$

- Tiempo discreto

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n},\quad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$\boxed{X(f')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j2\pi f'n}},\qquad \boxed{x[n]=\int_{-1/2}^{1/2}X(f')e^{j2\pi f'n}df'},\quad f'=\frac{\Omega}{2\pi}$$

- Teorema de muestreo

$$\boxed{x[n]=x_c(nT_m)\rightarrow X(f')=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_m\cdot X_c(f_m(f'-k))},\quad f'=\frac{f}{f_m}$$

2.4 Análisis de señales deterministas
Densidad espectral de potencia o energía

- Definición

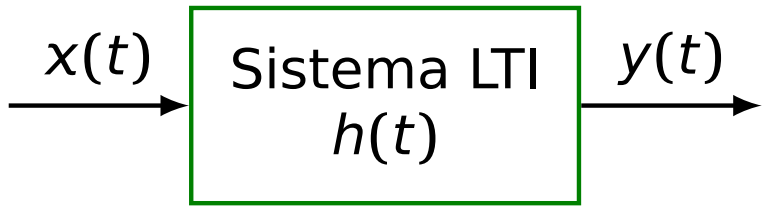
$$S_x(f) = \mathcal{TF}\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_x(f') = \mathcal{TF}\{R_x[m]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x[m] e^{-j2\pi f' m}$$

- Propiedades:
  1. $S_x(f)$ es real, par y positiva
  2. $2\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df$ = Potencia o energía de $x(t)$ en la banda $[f_1, f_2]$
  3. $\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$ = Potencia o energía total de $x(t)$
  4. $S_x(f) = |X(f)|^2$ para señales de energía
  5. $S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \delta(f - kf_0)$ para señales periódicas

2.4 Análisis de señales deterministas
Sistemas lineales

Caracterización de la salida de un sistema lineal



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Autocorrelación a la salida de un sistema lineal

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

- Densidad espectral de potencia o energía

$$S_y(f) = \mathcal{TF}\{R_y(\tau)\} = \mathcal{TF}\{R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)\} = S_x(f)|H(f)|^2$$

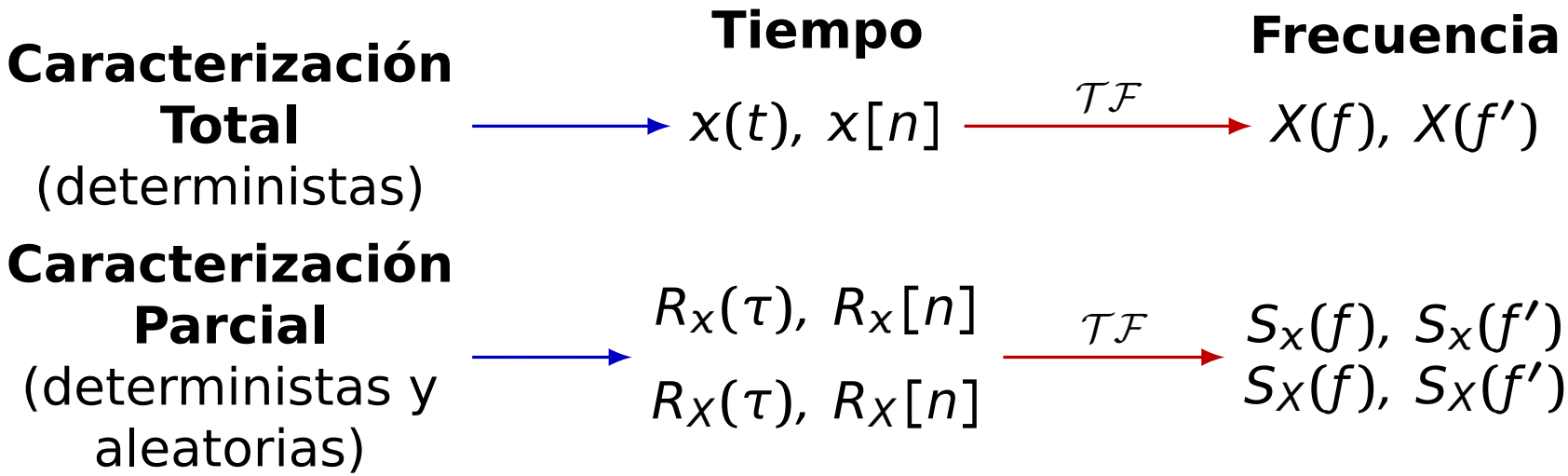
OCW UMA
Martos Naya, E; Fernández Plazaola, U.; Cañete Corripio, F.J; Luque Nieto, M.A. (2012) Sistemas de Comunicaciones. OCW-Universidad de Málaga, http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonComercial-ShareAlike 3.0 Spain

2.5 Señales aleatorias

- Caracterización de señales aleatorias
- Definición
- Caracterización estadística
- Señales estacionarias
- Señales ergódicas
- Correlación y covarianza
- Relaciones entre señales aleatorias
- Potencia de la suma
- Densidad Espectral de potencia
- Sistemas lineales
- Ruido: modelo AWGN
- Cuantificación

2.5 Señales aleatorias
Caracterización de señales aleatorias

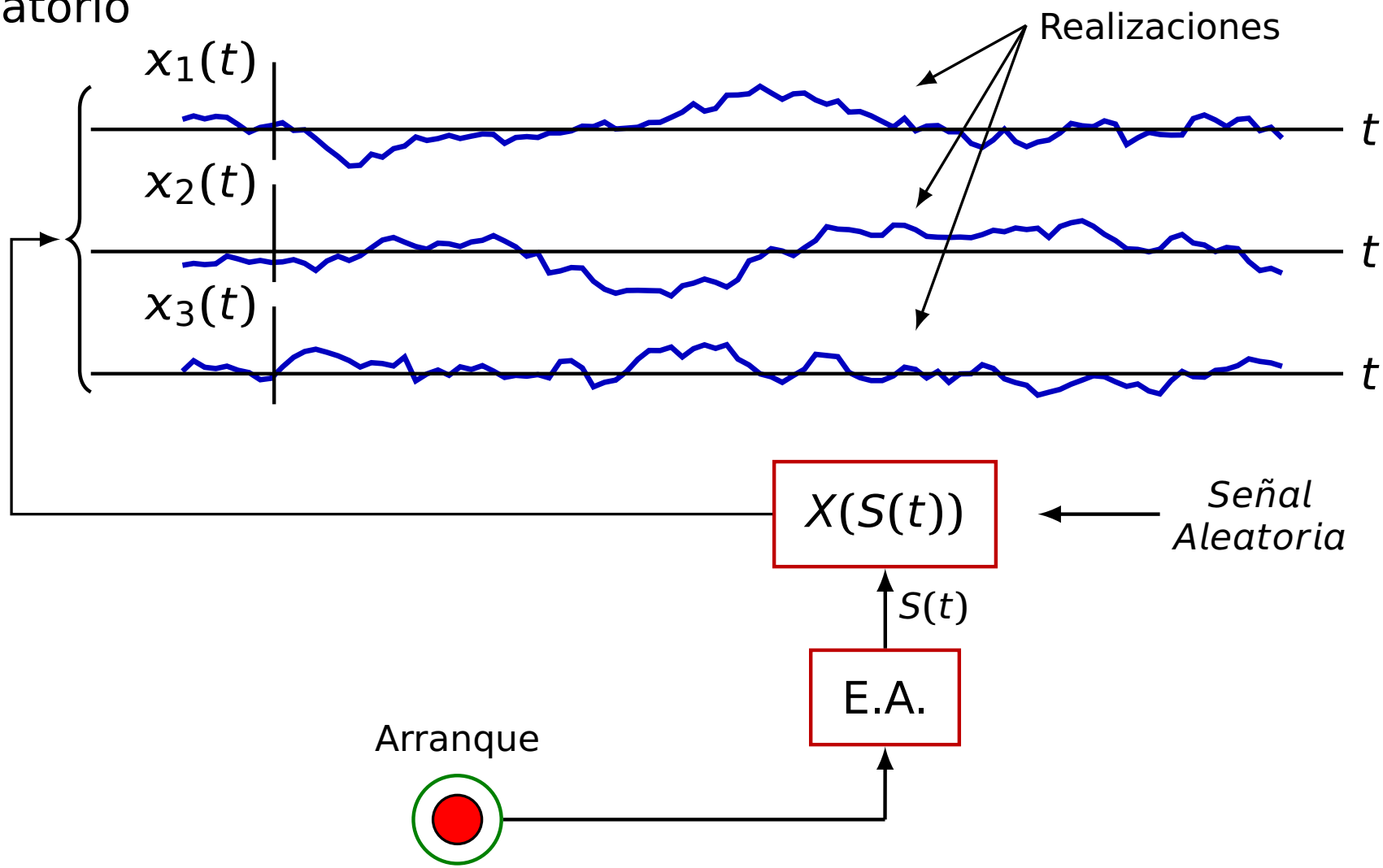
- Funciones para caracterizar señales aleatorias



- $x(t),\ x[n] \equiv$ Expresiones analíticas de señales en el tiempo
- $X(f),\ X(f') \equiv$ Expresiones analíticas de señales en frecuencia
- $R_x(\tau),\ R_x[n] \equiv$ Autocorrelación determinista
- $S_x(f),\ S_x(f') \equiv$ Densidad espectral de potencia o energía
- $R_X(\tau),\ R_X[n] \equiv$ Autocorrelación estadística
- $S_X(f),\ S_X(f') \equiv$ Densidad espectral de potencia estadística

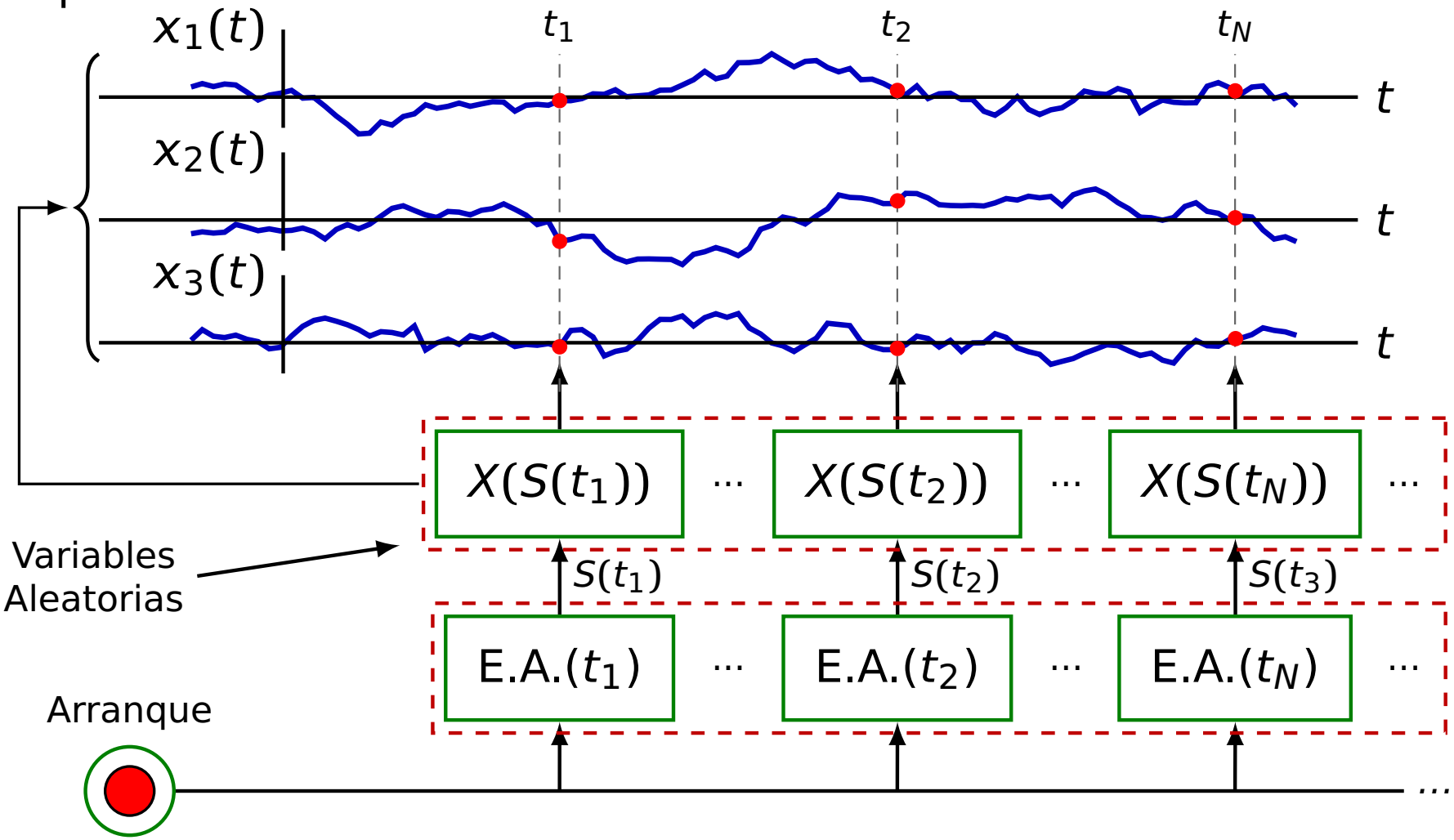
2.5 Señales aleatorias
Definición

Conjunto de señales (realizaciones) que resultan de un experimento aleatorio



2.5 Señales aleatorias
Definición

Conjunto de variables aleatorias asociadas a cada instante de tiempo



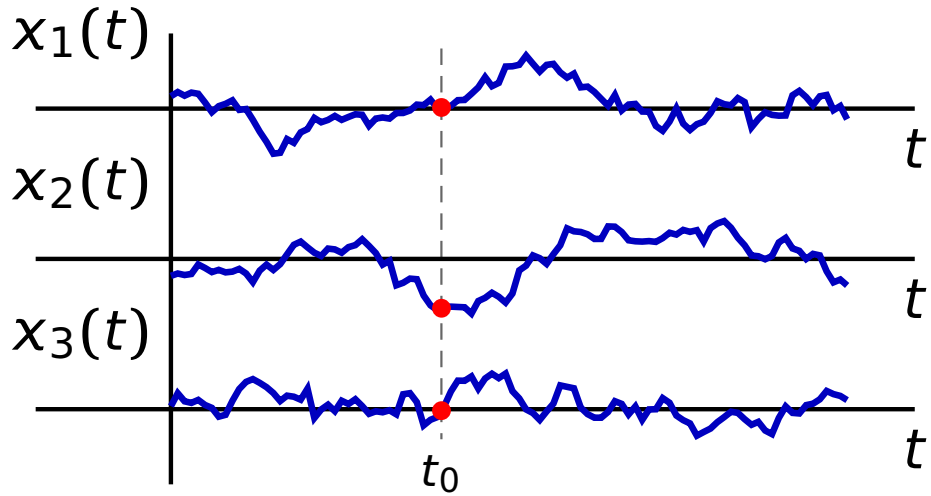
2.5 Señales aleatorias
Caracterización estadística

- Caracterización total
  Función densidad de probabilidad conjunta de todas las variables. Es muy difícil de obtener y casi siempre inmanejable.
- Caracterización parcial
  Basada en dos estadísticos: media y autocorrelación
  - Media
    Función cuyo valor para cada instante t es la media estadística de la variable correspondiente
    $$\overline{X(t)} = \mathrm{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)dx, \quad \overline{X[n]} = \mathrm{E}[X[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X[n]}(x)dx$$
  - Autocorrelación
    Función cuyo valor para cada par de instantes t_1 y t_2 es la correlación estadística de las variables correspondientes
    $$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
    $$R_X[n_1,n_2] = \mathrm{E}[X[n_1]X[n_2]] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X[n_1],X[n_2]}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

2.5 Señales aleatorias
Caracterización estadística

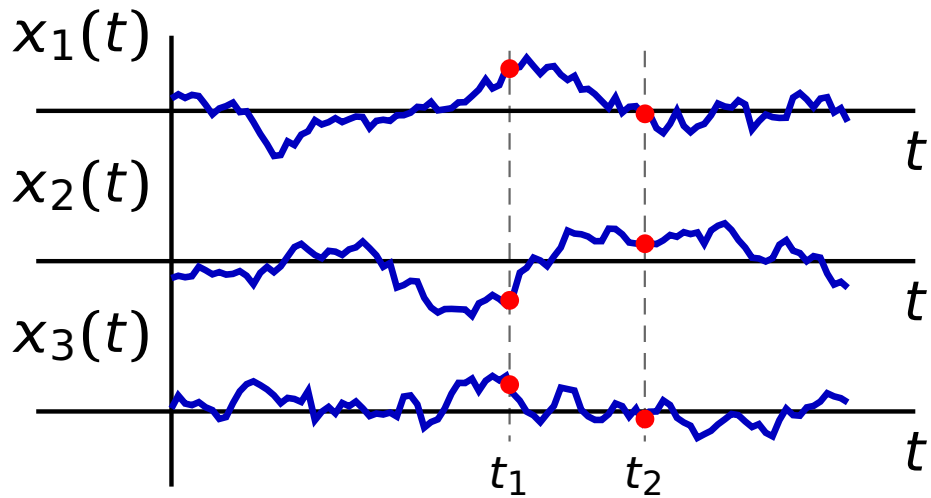
- Media

$$\overline{X(t_0)} = \mathrm{E}[X(t_0)]$$



- Autocorrelación

$$R_X(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$$

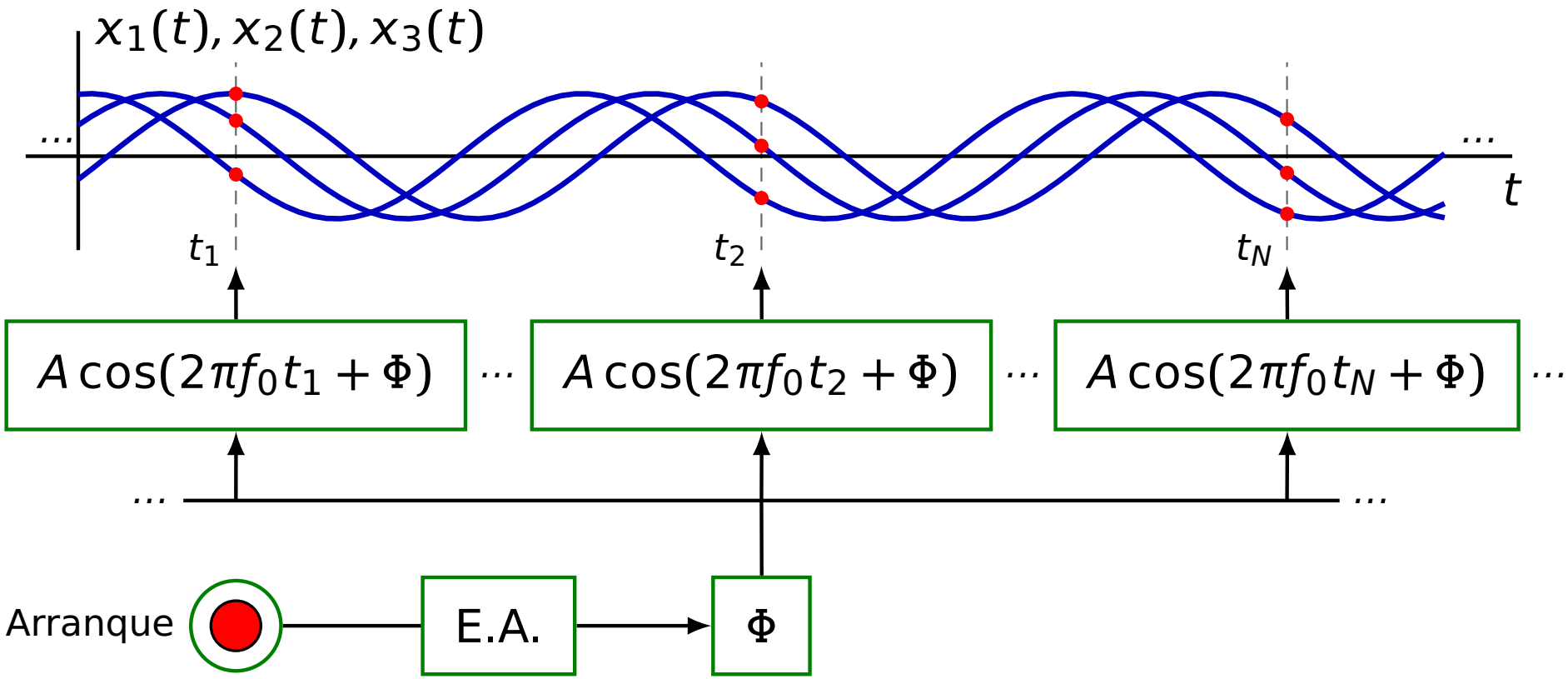


2.5 Señales aleatorias
Caracterización estadística

Ejemplo:

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)$$

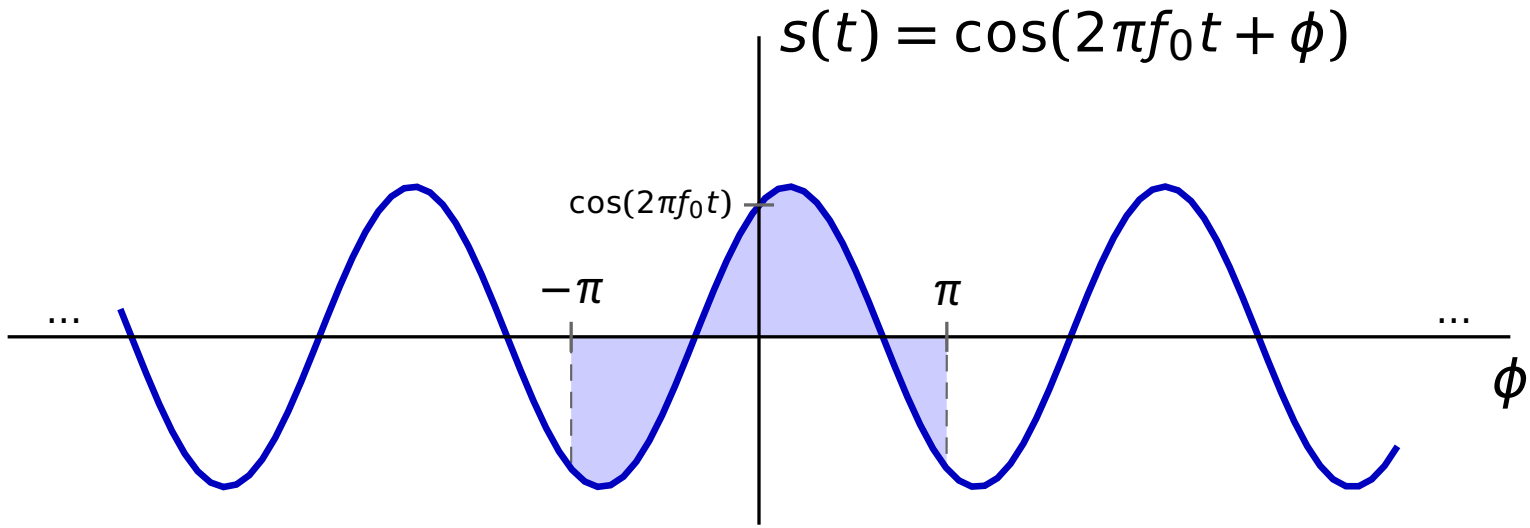
donde Φ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$



Ejemplo:

- Media

$$\overline{X(t)} = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(2\pi f_0 t + \phi)\frac{1}{2\pi}d\phi = 0$$



Ejemplo:

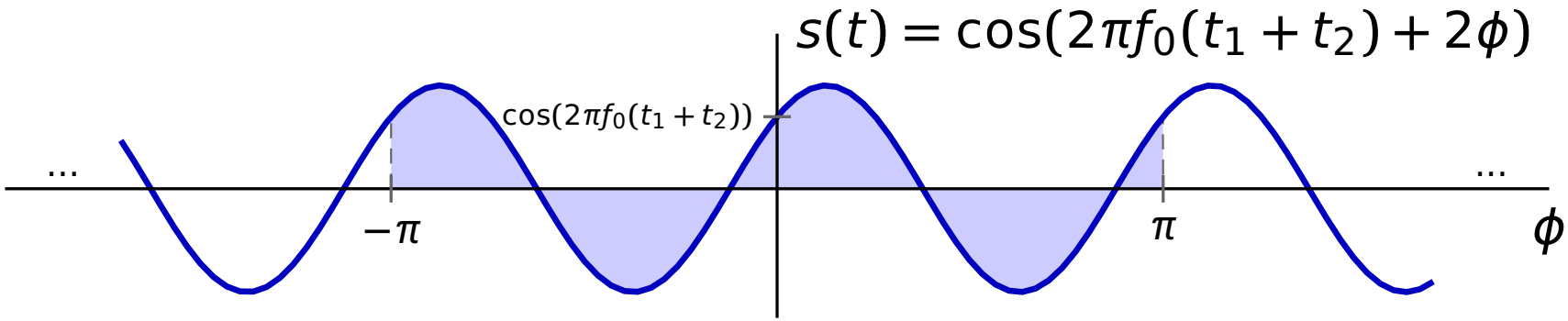
- Autocorrelación

$$R_X(t_1,t_2)=\mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]=\mathrm{E}[A^2\cos(2\pi f_0 t_1+\Phi)\cos(2\pi f_0 t_2+\Phi)]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}A^2\cos(2\pi f_0 t_1+\phi)\cos(2\pi f_0 t_2+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi$$

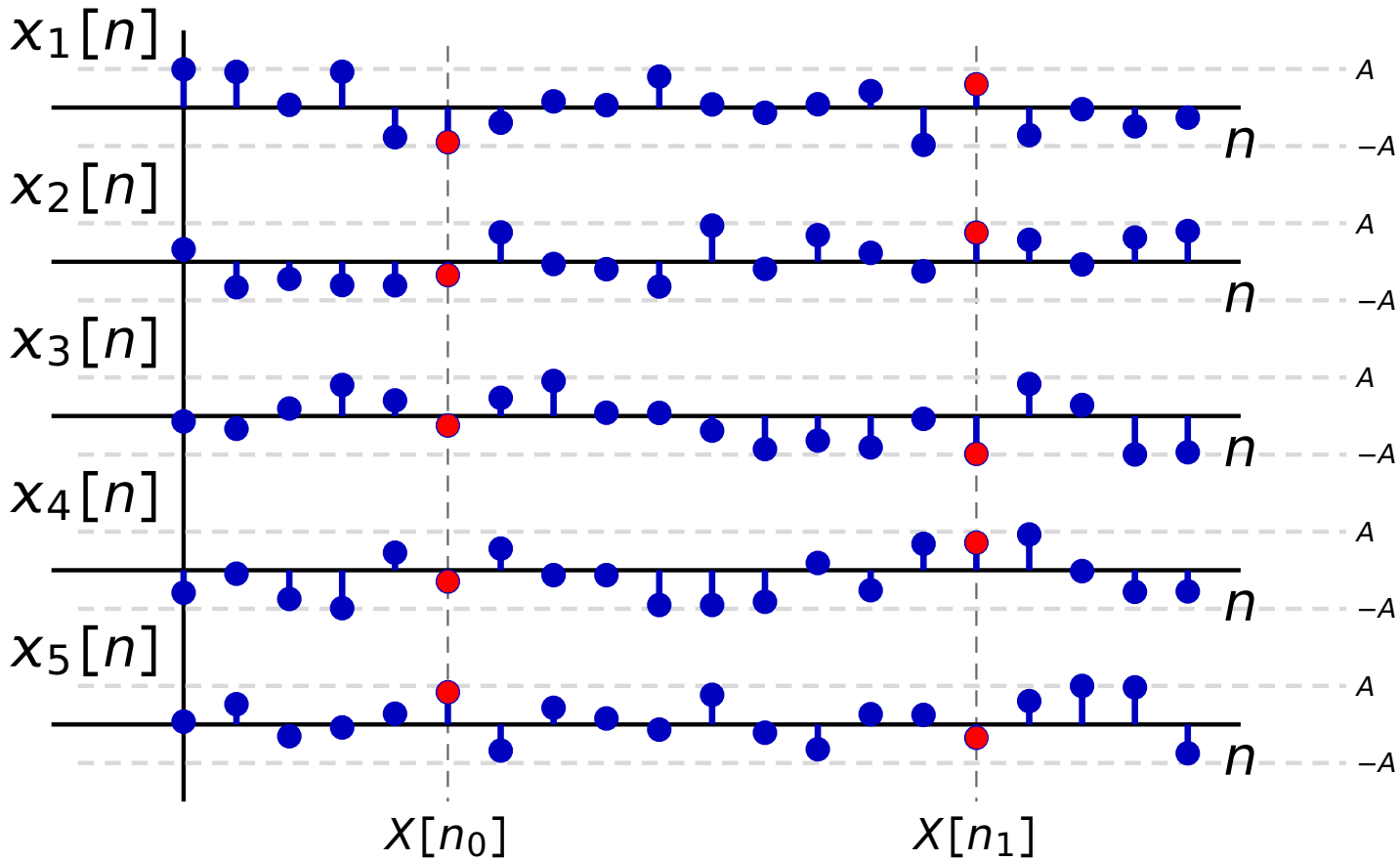
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A^2}{4\pi}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\phi)d\phi+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A^2}{4\pi}\cos(2\pi f_0(t_2-t_1))d\phi$$

$$=\boxed{\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(t_2-t_1))}$$



2.5 Señales aleatorias
Caracterización estadística

Ejemplo:
$X[n]$, señal discreta en tiempo cuyas variables aleatorias son independientes y uniformes en el intervalo $[-A, A]$.



Ejemplo:
$X[n]$, señal discreta en tiempo cuyas variables aleatorias son independientes y uniformes en el intervalo $[-A, A]$.

- Media

$$\overline{X[n]} = \mathrm{E}[X[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X[n]}(x) dx = \int_{-A}^{A} x \frac{1}{2A} dx = 0$$

- Autocorrelación

$$R_X[n_1, n_2] = \mathrm{E}[X[n_1]X[n_2]] = \frac{A^2}{3}\delta[n_1 - n_2]$$

Hay que distinguir dos casos

- $n_1 \neq n_2$

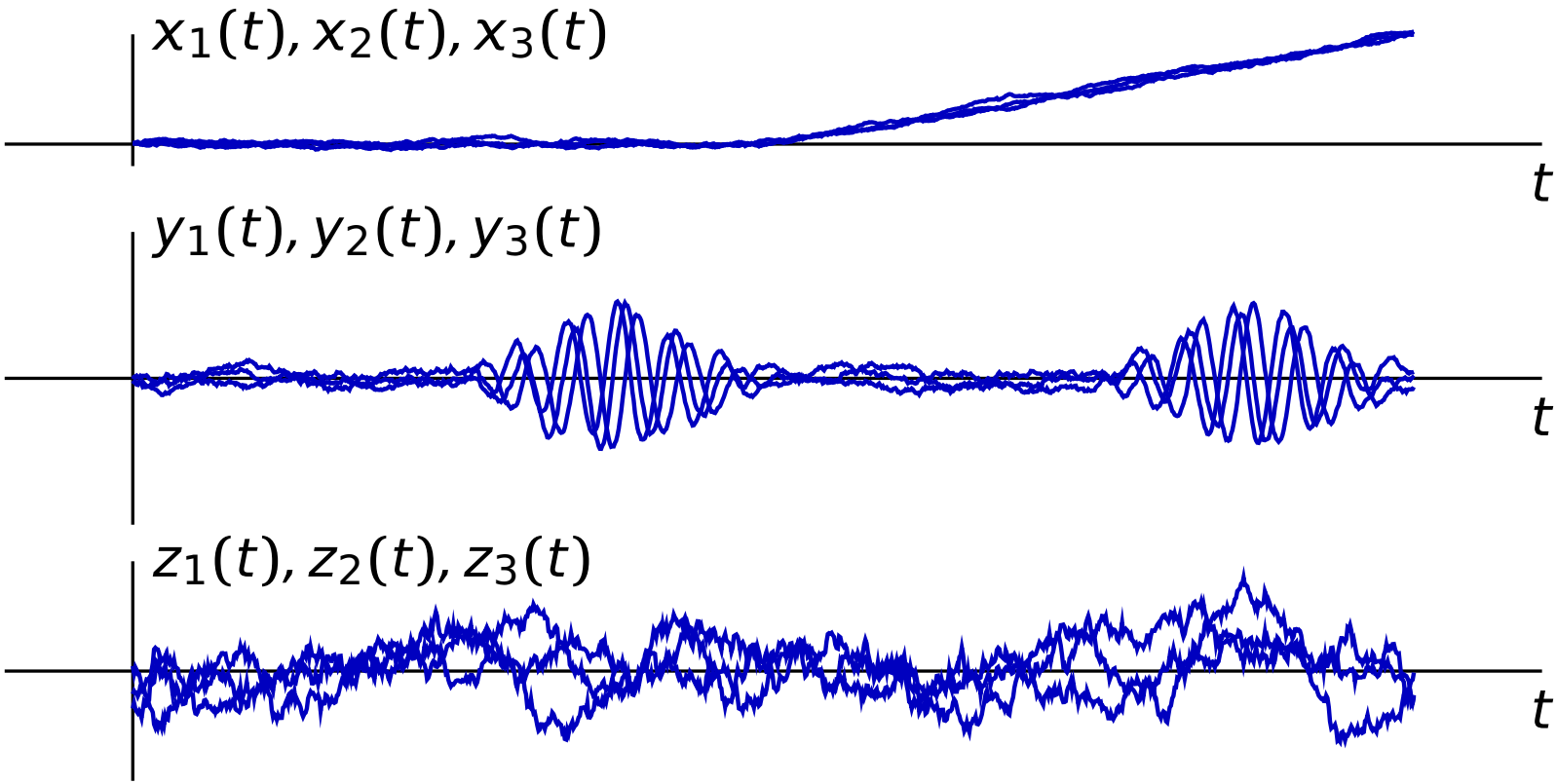
$$R_X[n_1, n_2] = \mathrm{E}[X[n_1]X[n_2]] = \mathrm{E}[X[n_1]]\mathrm{E}[X[n_2]] = 0$$

- $n_1 = n_2$

$$R_X[n_1, n_1] = \mathrm{E}[X^2[n_1]] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X[n_1]}(x) dx = \int_{-A}^{A} x^2 \frac{1}{2A} dx = \left. \frac{x^3}{6A} \right|_{-A}^{A} = \frac{A^2}{3}$$

2.5 Señales aleatorias
Señales estacionarias

- Definición
  Señal cuyos parámetros estadísticos no cambian ante cualquier desplazamiento temporal. Sus realizaciones son señales de **potencia**
- Ejemplos (realizaciones significativas):



2.5 Señales aleatorias
Señales estacionarias

- Estacionariedad en sentido amplio
  Para ser estacionaria en sentido amplio debe cumplir dos requisitos:
  - Estacionaria en la media
    La media es constante

$$\overline{X(t)} = \mathrm{E}[X(t)] = K, \quad \forall t, \quad \overline{X[n]} = \mathrm{E}[X[n]] = K, \quad \forall n$$

  - Estacionaria en la autocorrelación
    La autocorrelación sólo depende de la diferencia de instantes de tiempo

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_1 + \tau) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_X(\tau), \quad \forall t_1$$

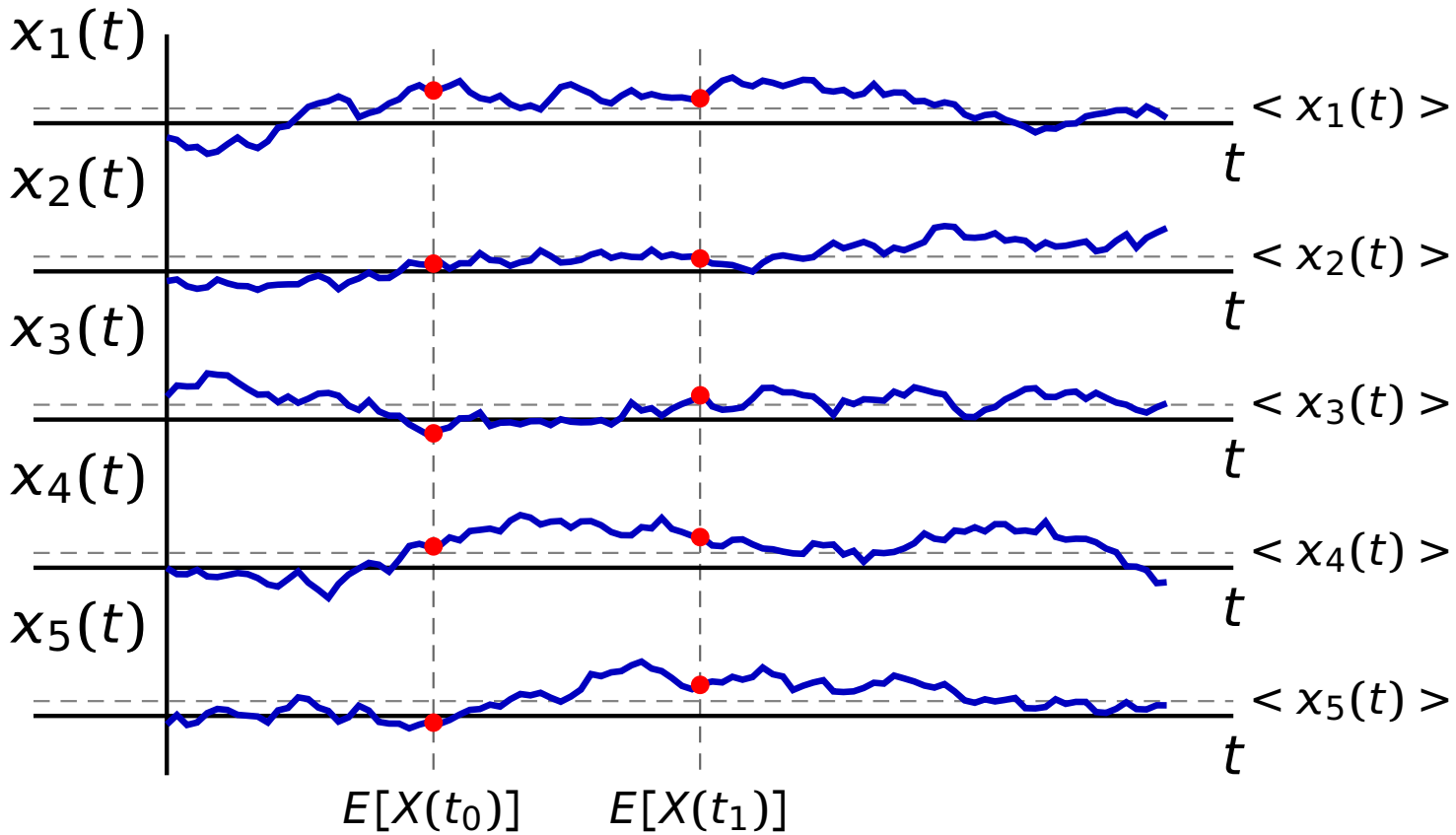
$$R_X[k_1, k_2] = R_X[k_1, k_1 + n] = \mathrm{E}[X[k_1]X[k_1 + n]] = R_X[n], \quad \forall k_1$$

  - Ejemplo:
    $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)$, donde Φ es uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$

$$\overline{X(t)} = 0, \quad R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_1 + \tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

2.5 Señales aleatorias
Señales ergódicas

- Definición de señal ergódica
  Señal **estacionaria** para la que el promedio temporal de cualquier realización es igual al promedio estadístico



2.5 Señales aleatorias
Señales ergódicas

- Definición de señal ergódica
  Señal **estacionaria** para la que el promedio temporal de cualquier realización es igual al promedio estadístico
- Señales ergódicas en sentido amplio
  - Ergódica en cuanto a la media

$$< x_k(t) >= \overline{X(t)}, \quad \forall k$$

  - Ergódica en cuanto a la autocorrelación

$$R_{x_k}(\tau) =< x_k(t)x_k(t-\tau) >= R_X(\tau), \quad \forall k$$

- Concepto de ergodicidad
  Cualquier realización es representativa de la señal, contiene toda la variabilidad de la señal aleatoria
- Propiedad importante

$$\boxed{R_X(0) =< x_k^2(t) >= P_{x_k}, \forall k}$$

2.5 Señales aleatorias
Señales ergódicas

Ejemplo:

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

donde Φ es una variable uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi]$

- Ergódica en cuanto a la media

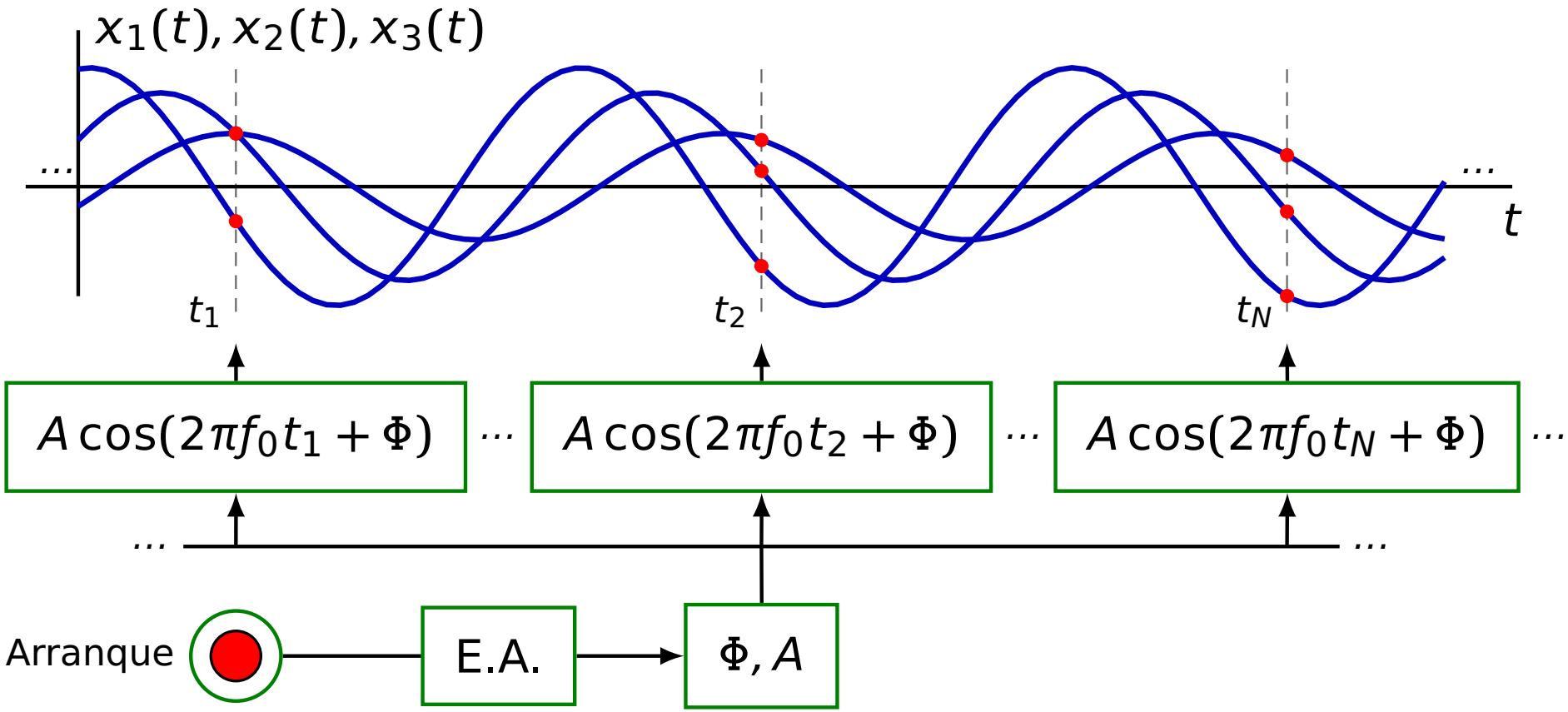
$$< x_k(t) >= 0 = \overline{X(t)}$$

- Ergódica en cuanto a la autocorrelación

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 \tau) = R_X(\tau)$$

2.5 Señales aleatorias
Señales ergódicas

Ejemplo:
$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$, donde A y Φ son variables independientes y uniformes en los intervalo $[0, 1]$ y $(-\pi, \pi]$ respectivamente



- Ergódica en cuanto a la media

$$\overline{X(t)} = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[A\cos(\omega_0 t + \Phi)] =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1} a\cos(\omega_0 t + \phi)\frac{1}{2\pi}d\phi da = 0$$

$$< x_k(t) >= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_k\cos(\omega_0 t + \phi_k)dt = 0$$

$< x_k(t) >= \overline{X(t)} = 0 \rightarrow$ **es ergódica** en cuanto a la **media**

- Ergódica en cuanto a la autocorrelación

$$R_X(\tau) = R_X(t_1, t_1+\tau) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_1+\tau)] =$$
$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2}{2\pi} \cos(\omega_0 t_1 + \phi)\cos(\omega_0(t_1+\tau)+\phi) d\phi da =$$
$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2}{4\pi} (\cos(\omega_0(2t_1+\tau)+2\phi) + \cos(\omega_0\tau))\, d\phi da =$$
$$\cos(\omega_0\tau) \int_0^1 \frac{a^2}{2} da = \boxed{\frac{1}{6}\cos(\omega_0\tau)}$$

$$R_{x_k}(\tau) = \int_{-T_0/2}^{-T_0/2} a_k^2 \cos(\omega_0 t + \phi_k)\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi_k) dt = \boxed{\frac{a_k^2}{2}\cos(\omega_0\tau)}$$

$R_{x_k}(\tau) \neq R_X(\tau) \rightarrow$ **no es ergódica** en la **autocorrelación**

2.5 Señales aleatorias
Correlación y covarianza

Para analizar la relación estadística de dos señales se suelen usar dos funciones: la correlación y la covarianza.
Su definición para señales estacionarias es

- Correlación

$$R_{X,Y}(\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)]$$

- Covarianza

$$C_{X,Y}(\tau) = E[(X(t+\tau) - \overline{X(t)})(Y(t) - \overline{Y(t)})]$$

Ambos parámetros están relacionados

$$R_{X,Y}(\tau) = C_{X,Y}(\tau) + \overline{X(t)} \cdot \overline{Y(t)}$$

2.5 Señales aleatorias
Relaciones entre señales aleatorias

- Independencia
  Si las variables aleatorias de $X(t)$ son independientes de las variables aleatorias de $Y(t)$
- Ortogonalidad
  - En sentido estricto: $R_{X,Y}(\tau) = 0, \ \forall \tau$
  - En sentido amplio: $R_{X,Y}(0) = 0$
- Incorrelación
  - En sentido estricto: $C_{X,Y}(\tau) = 0, \ \forall \tau$
  - En sentido amplio: $C_{X,Y}(0) = 0$

$$\text{Independencia} \rightarrow \text{Incorrelación} \xrightarrow[\overline{Y(t)}=0]{\overline{X(t)}=0} \text{Ortogonalidad}$$

2.5 Señales aleatorias
Potencia de la suma

Sea $Z(t)$ una señal aleatoria estacionaria tal que $Z(t) = X(t) + Y(t)$
La potencia de la señal $Z(t)$ es

$$\begin{aligned} P_Z = & R_Z(0) = E[Z^2(t)] = E[(X(t) + Y(t))^2] = \\ & E[X^2(t)] + E[Y^2(t)] + 2E[X(t)Y(t)] = \\ & R_X(0) + R_Y(0) + 2R_{X,Y}(0) = \\ & \boxed{P_X + P_Y + 2R_{X,Y}(0)} \end{aligned}$$

Si las señales son **ortogonales** entonces

$$R_{X,Y}(0) = 0 \rightarrow \boxed{P_Z = P_X + P_Y}$$

2.5 Señales aleatorias
Densidad Espectral de potencia

- Definición

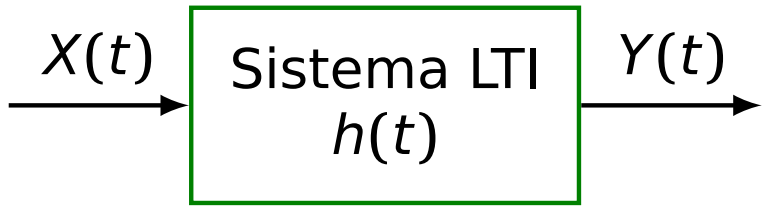
$$S_X(f) = \mathcal{TF}\{R_X(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_X(f') = \mathcal{TF}\{R_X[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X[n] e^{-j2\pi f' n}$$

- Propiedades
  1. $S_X(f) \in \mathcal{R}$ y $S_X(f) \geq 0$
  2. $S_X(f) = S_X(-f)$
  3. $\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = R_X(0) =$ Potencia promedio
  4. $2\int_{f_1}^{f_2} S_X(f) df =$ Potencia promedio en la banda $[f_1, f_2]$
  5. Señales estacionarias $\rightarrow S_X(f) = E[S_{x_k}(f)]$
  6. Señales ergódicas $\rightarrow S_X(f) = S_{x_k}(f) \quad \forall k$

2.5 Señales aleatorias
Sistemas lineales

Caracterización de la salida de un sistema lineal



$$Y(t) = X(t) * h(t)$$

En general es complicado, pero para **señales estacionarias**:

- Autocorrelación a la salida de un sistema lineal

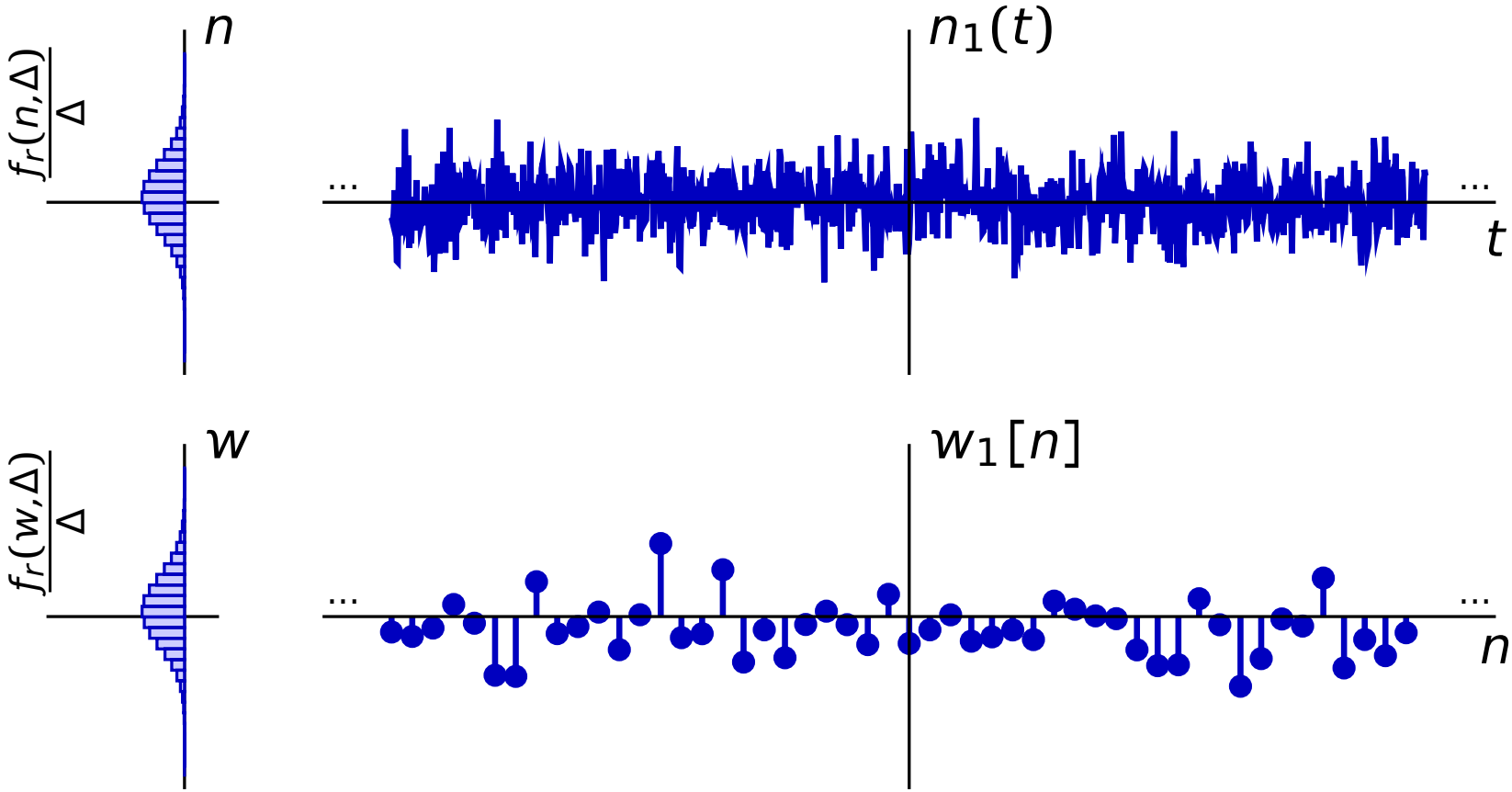
$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

- Densidad espectral de potencia

$$S_Y(f) = \mathcal{TF}\{R_Y(\tau)\} = \mathcal{TF}\{R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)\} = S_X(f)|H(f)|^2$$

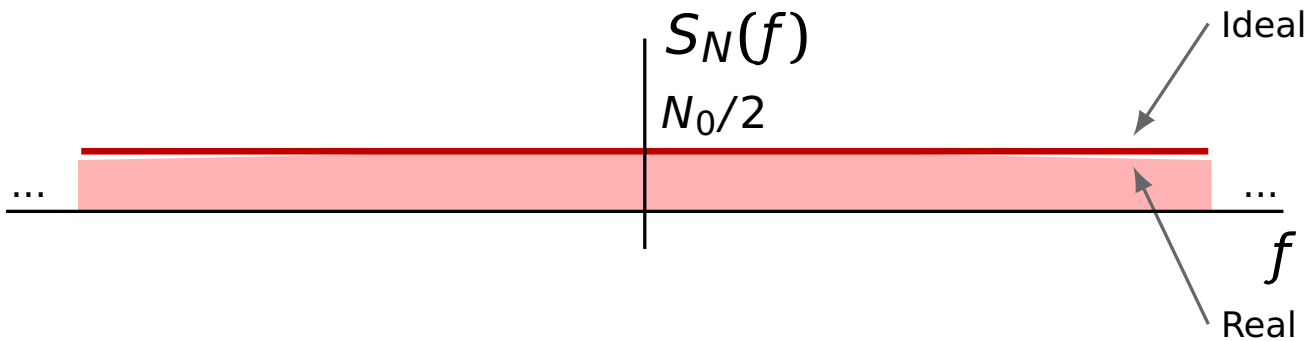
2.5 Señales aleatorias
Ruido: modelo AWGN

AWGN (**A**ditive **W**hite **G**aussian **N**oise)
Señal ergódica, densidad espectral de potencia constante y distribución de sus variables gaussianas

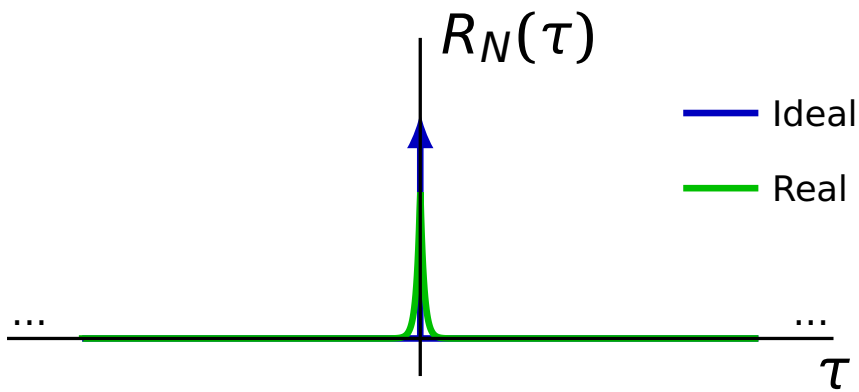


2.5 Señales aleatorias
Ruido: modelo AWGN

Densidad espectral de potencia de la señal de ruido $N(t)$

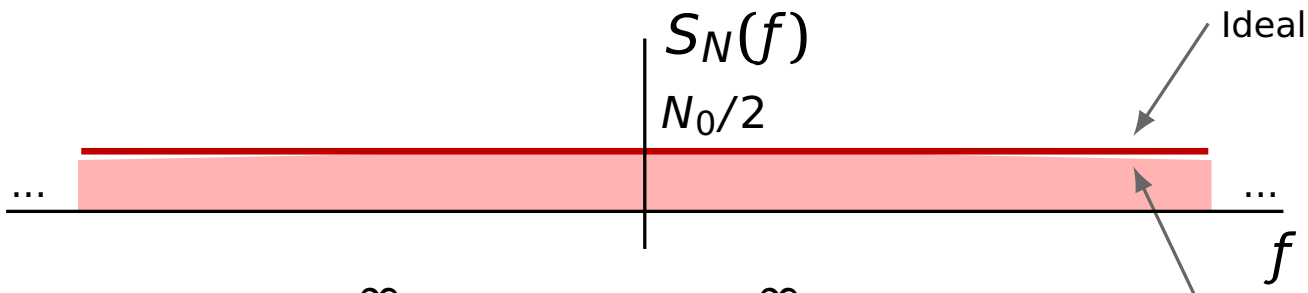


Autocorrelación de la señal de ruido $N(t)$



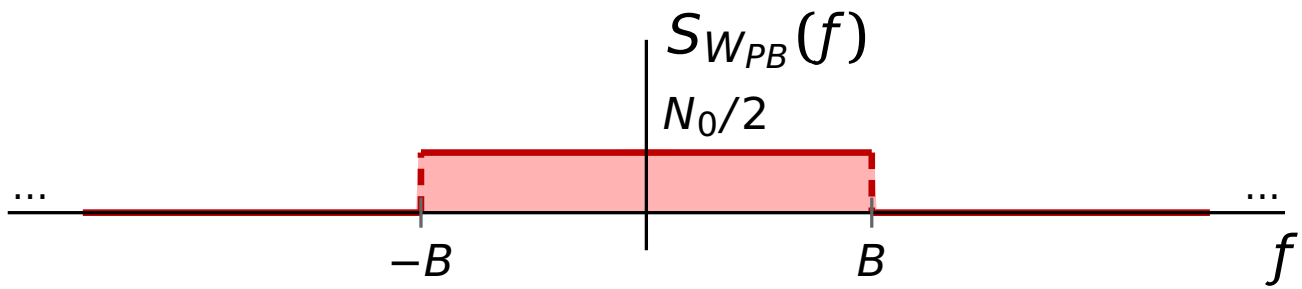
2.5 Señales aleatorias
Ruido: modelo AWGN

Densidad espectral de potencia de la señal de ruido $N(t)$



$$P_N = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} N_0/2 df = \infty$$

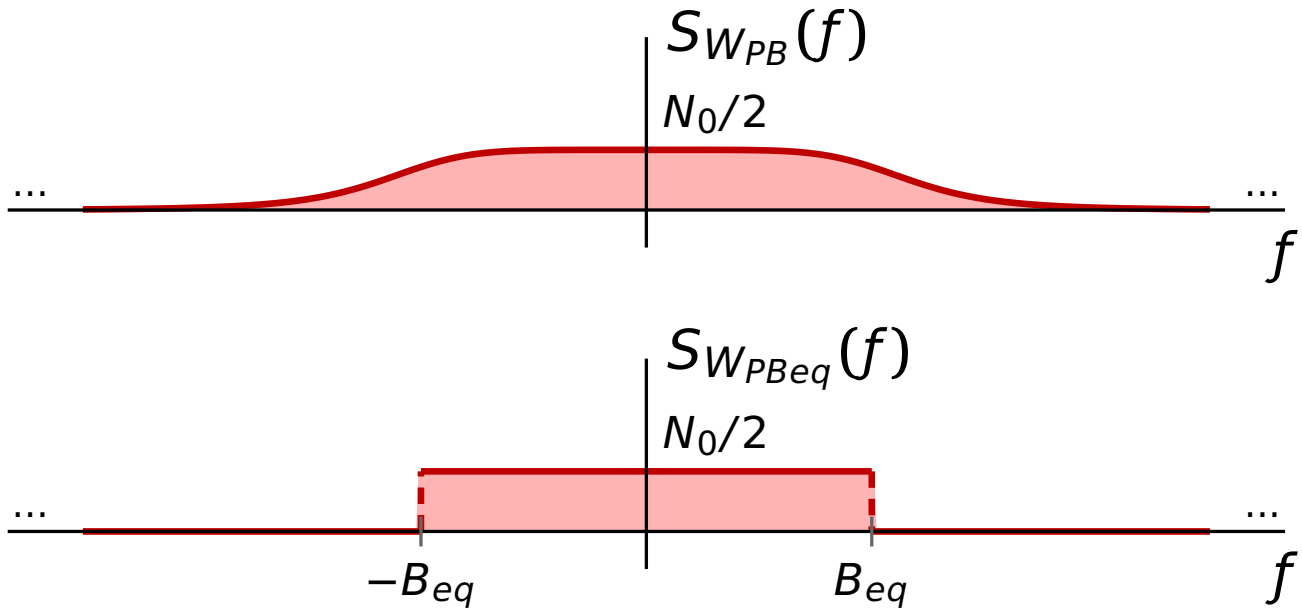
Densidad espectral de potencia de la señal de ruido filtrado $W_{PB}(t)$



$$P_{W_{PB}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{W_{PB}}(f)df = \int_{-B}^{B} N_0/2 df = N_0 B$$

2.5 Señales aleatorias
Ruido: modelo AWGN

Ancho de banda equivalente de ruido B_{eq}



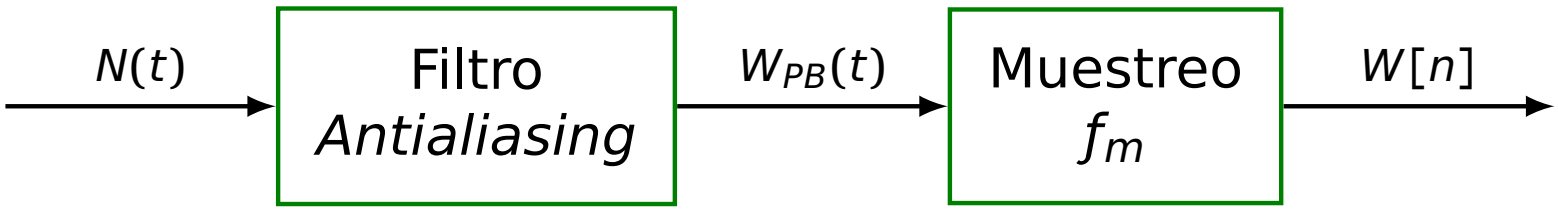
$$P_{W_{PB}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{W_{PB}}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} N_0/2|H(f)|^2 df$$

$$P_{W_{PBeq}} = N_0 B_{eq}$$

$$P_{W_{PB}} = P_{W_{PBeq}} \rightarrow B_{eq} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

2.5 Señales aleatorias
Ruido: modelo AWGN

Muestreo de ruido



Potencia $W[n]$

$$\boxed{P_W = N_0 f_M/2}$$

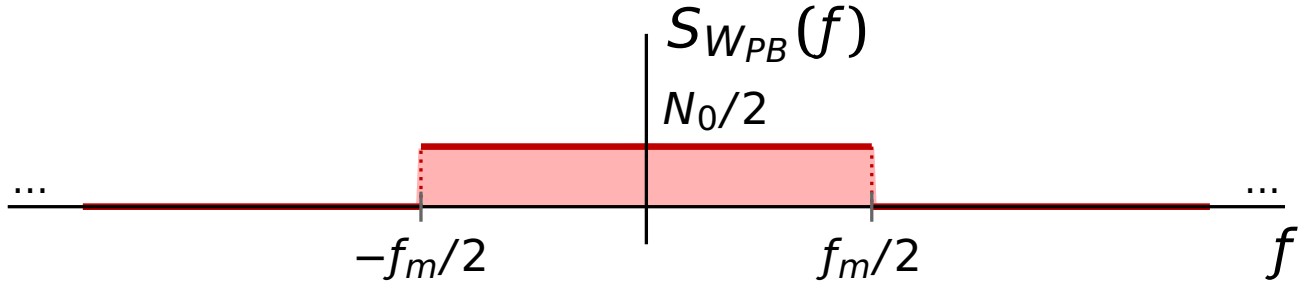
Se puede comprobar que

$$W[n] = W_{PB}(nT_m) \rightarrow R_W[n] = R_{W_{PB}}(nT_m)$$

Usando la relación del teorema de muestreo

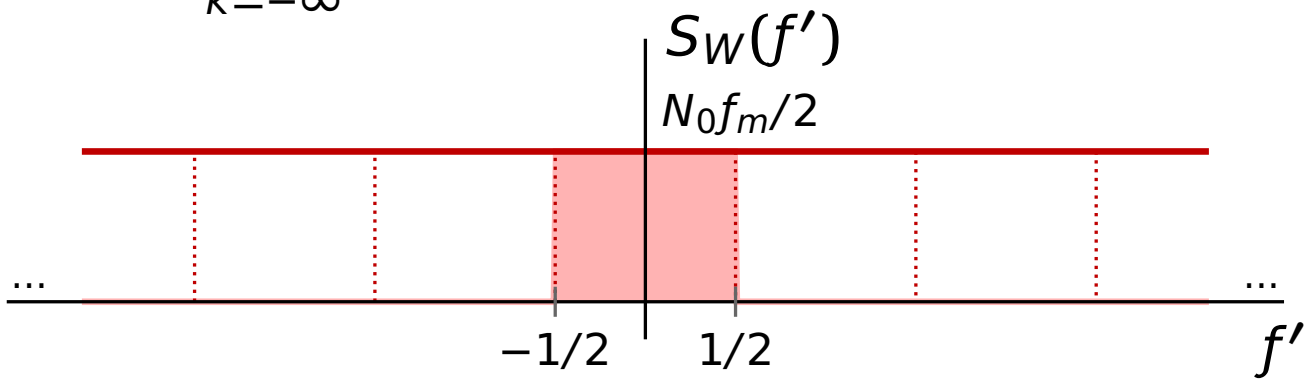
$$S_W(f') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_m \cdot S_{W_{PB}}(f_m(f' - k))$$

2.5 Señales aleatorias
Ruido: modelo AWGN



$$P_{W_{PB}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{W_{PB}}(f)df = \int_{-f_m/2}^{f_m/2} N_0/2 df = N_0 f_m/2$$

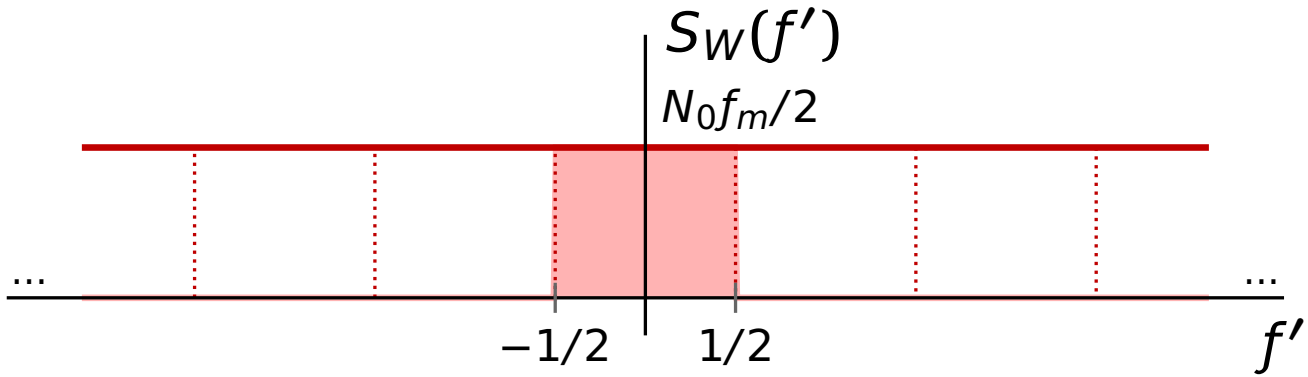
Usando, $S_W(f') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_m \cdot S_{W_{PB}}(f_m(f'-k))$



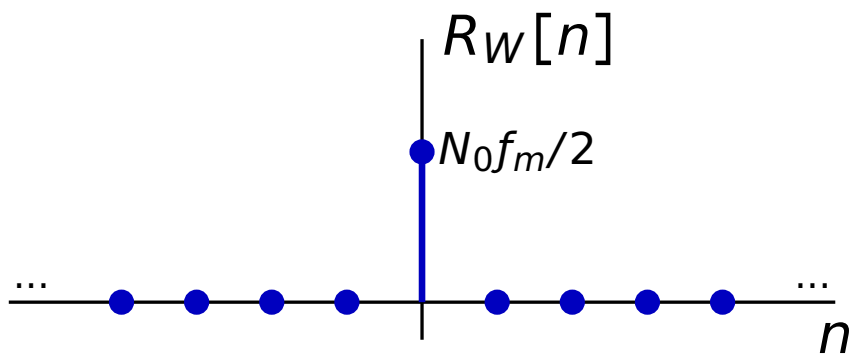
$$P_W = \int_{-1/2}^{1/2} S_W(f')df' = \int_{-1/2}^{1/2} N_0 f_m/2 df' = N_0 f_m/2$$

2.5 Señales aleatorias
Ruido: modelo AWGN

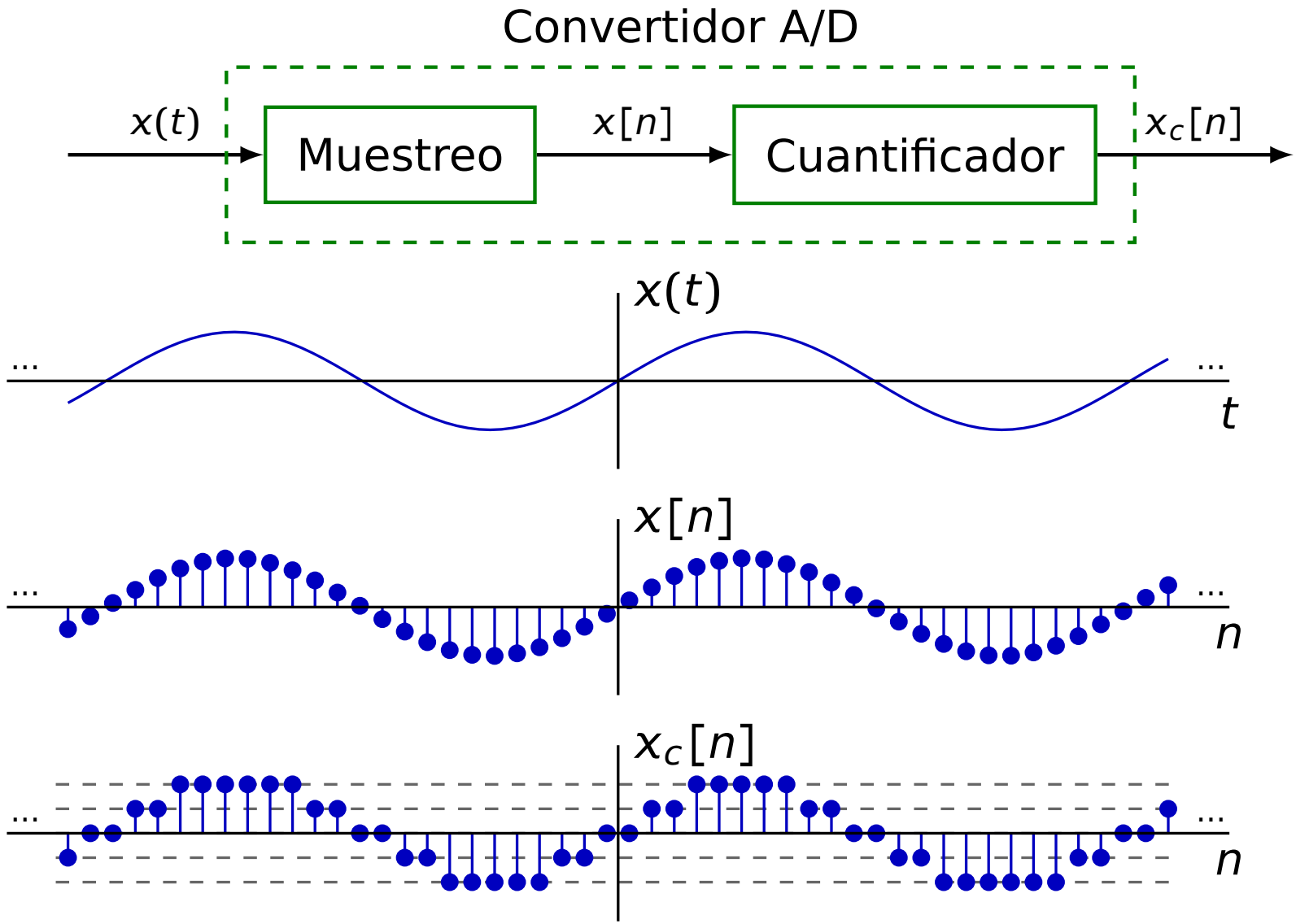
Densidad espectral de potencia de la señal de ruido $W[n]$



Autocorrelación de la señal de ruido $W[n]$

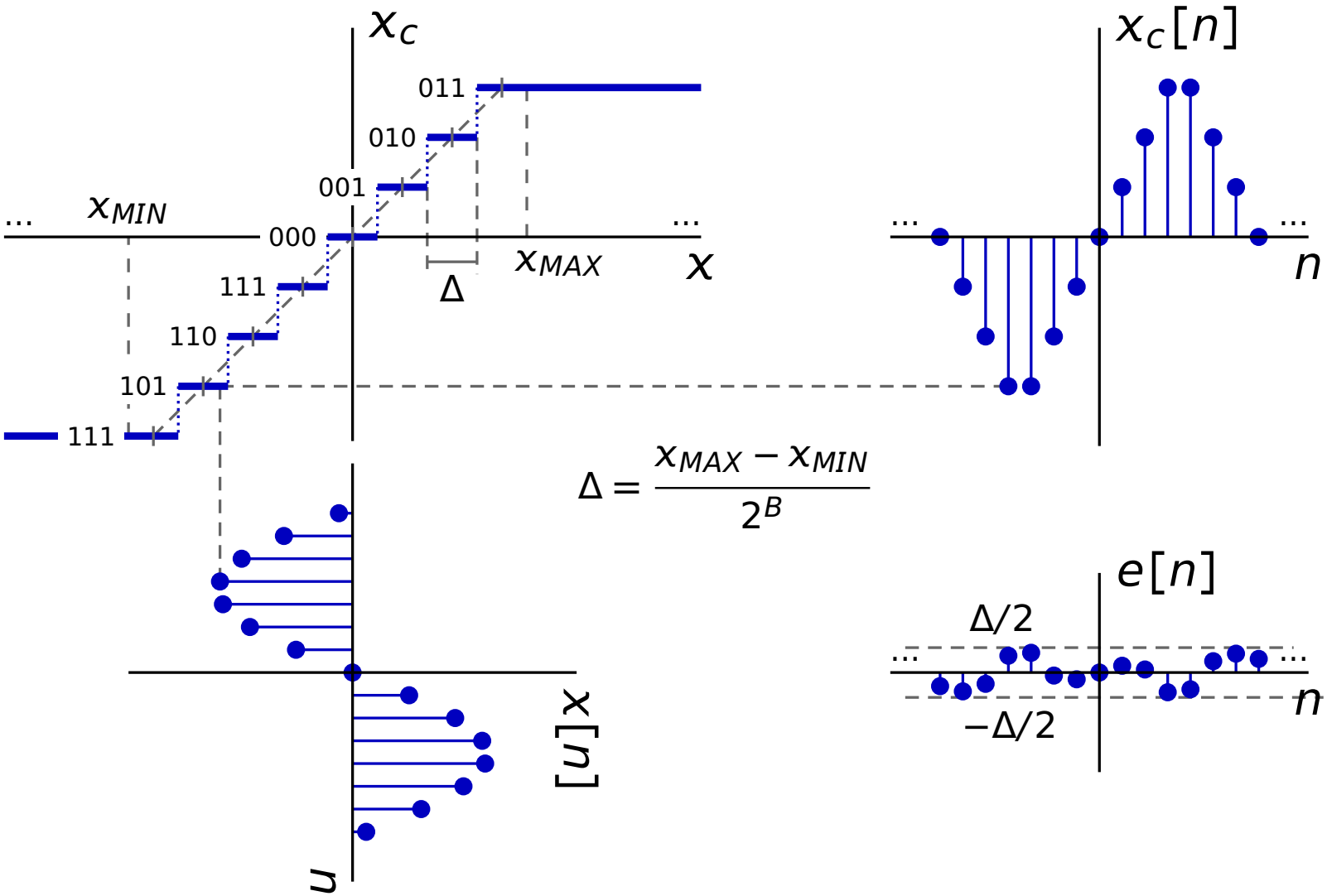


2.5 Señales aleatorias
Cuantificación



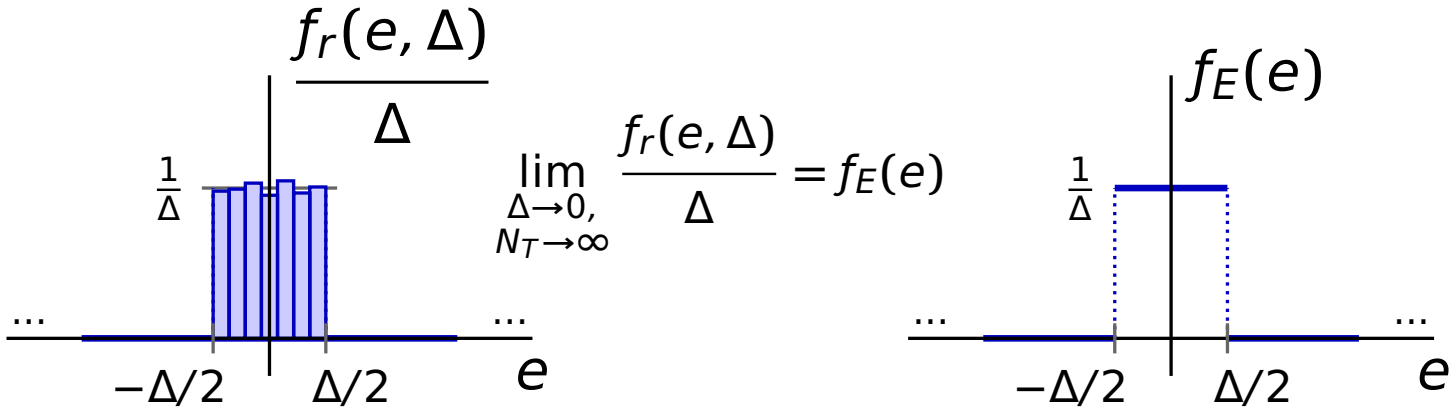
2.5 Señales aleatorias
Cuantificación

Función entrada/salida



2.5 Señales aleatorias
Cuantificación

Función densidad de probabilidad del error



Media y varianza

$$\overline{E[n]} = \int_{-\infty}^{\infty} e f_E(e) de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e \frac{1}{\Delta} de = \left. \frac{e^2}{2\Delta} \right|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = 0$$

$$\sigma^2_{E[n]} = \overline{E^2[n]} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \left. \frac{e^3}{3\Delta} \right|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(x_{MAX} - x_{MIN})^2}{12 \cdot 2^{2B}}$$

Relación señal a error de cuantificación

$$SER = \frac{P_X}{P_E} = \frac{P_X}{R_E[0]} = \frac{P_X}{\sigma_E^2} = \frac{P_X}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{P_X}{(x_{MAX} - x_{MIN})^2} \cdot 12 \cdot 2^{2B}$$

$$SER\,(dB) = 10\log\left(\frac{P_X}{P_E}\right) = \boxed{6B + 10\log\left(\frac{P_X}{(x_{MAX} - x_{MIN})^2}\right) + 10.8}$$

$$\frac{12 \cdot P_X}{(x_{MAX} - x_{MIN})^2} = \left\{ \begin{array}{c} x_{MAX} \approx -x_{MIN} \\ \overline{X[n]} = 0 \end{array} \right\} = \frac{3\sigma_X^2}{x_{MAX}^2} = \left\{ FC = \frac{x_{MAX}}{\sigma_X} \right\} = \frac{3}{FC^2}$$

$$SER\,(dB) = 6B - 20\log(FC) + 10\log(3) = \boxed{6B - 20\log(FC) + 4.8}$$

OCW UMA
Martos Naya, E; Fernández Plazaola, U.; Cañete Corripio, F.J; Luque Nieto, M.A. (2012) Sistemas de Comunicaciones. OCW-Universidad de Málaga, http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonComercial-ShareAlike 3.0 Spain