

# Guión para el tema Propiedades eléctricas de la materia

## INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estudiado algunas de las propiedades características de los materiales conductores. Para estudiar los materiales aislantes (dieléctricos) bajo la acción de un campo eléctrico es conveniente asimilar el comportamiento conjunto de las cargas eléctricas de sus átomos y moléculas al de entidades más sencillas como son los dipolos eléctricos.

### 1. EL DIPOLO ELÉCTRICO

#### ☞ El dipolo eléctrico

Se denomina **dipolo eléctrico** a *dos cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto separadas por una pequeña distancia* (el significado de "pequeña distancia" es porque se considera el campo y el potencial a distancias grandes comparadas con la distancia entre las cargas).

Un dipolo eléctrico se caracteriza por una magnitud vectorial,  $\vec{p}$ , denominada **momento dipolar eléctrico**, definida como el *producto de la carga positiva por el vector cuyo origen está en la carga negativa y cuyo extremo está en la positiva* (Figura 1).

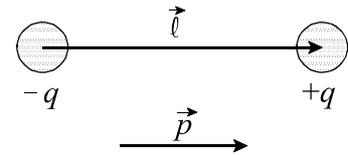


Figura 1

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

#### ☞ Dipolo eléctrico en el interior de un campo eléctrico uniforme

La figura 2a muestra un dipolo colocado en un campo eléctrico externo uniforme de forma que el momento dipolar eléctrico forma un ángulo  $\theta$  con el vector campo. Sobre cada una de las cargas que constituyen el dipolo, actúan fuerzas de igual módulo y dirección pero opuestas ( $\vec{F}_+ = q\vec{E}, \vec{F}_- = -q\vec{E} = -\vec{F}_+$ ) por lo que la fuerza neta que actúa sobre el dipolo es nula. No obstante, ese par de fuerzas tienen un momento no nulo respecto del punto O (punto medio del segmento que une las cargas). Dicho momento de torsión vale

$$\vec{\tau} = \vec{l} \times \vec{F}_+ = \vec{l} \times q\vec{E} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Este par de fuerzas tiende a colocar el dipolo paralelamente al campo, de forma que  $\theta$  sea nulo y  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$  sean paralelos, con lo que el momento neto será nulo y el dipolo se encontrará en una posición de equilibrio (y de equilibrio estable pues si se supera dicha posición, el par tenderá, nuevamente, a situar el dipolo paralelamente al campo).

Si llamamos  $V_-$  y  $V_+$  a los potenciales creados por el campo externo uniforme en los puntos en los que se encuentran, respectivamente, la carga negativa y la positiva, la energía potencial del dipolo será

$$U = U_+ + U_- = qV_+ + (-q)V_- = q(V_+ - V_-)$$

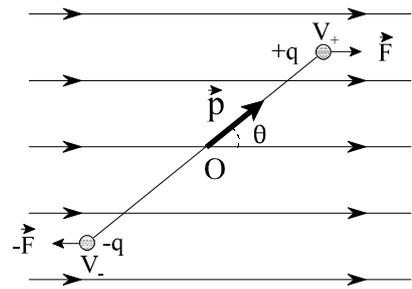
Aplicando la definición de diferencia de potencial,

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_-^+ E \cos \theta dl = -E \cos \theta \int_-^+ dl = -El \cos \theta$$

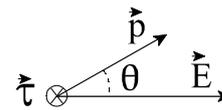
con lo que la energía potencial del dipolo será:

$$U = q(V_+ - V_-) = -qEl \cos \theta = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Esta expresión nos dice que la energía potencial es mínima cuando  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$  tienen la misma dirección y el mismo sentido y sabemos que eso significa equilibrio estable, tal y como habíamos razonado al hablar del



(a)



(b)

Figura 2

momento de torsión que el campo ejerce sobre el dipolo.

Si bien la expresión de la energía potencial del dipolo ha sido deducida para el caso particular de que el campo externo sea uniforme, puede demostrarse su validez general como aproximación de la realidad: la validez de dicha aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea la similitud del dipolo a la de un dipolo puntual ideal, esto es ( $\vec{l} \rightarrow 0$  y  $q \rightarrow 0$ ).

Cuando un sólido, cuyas moléculas forman dipolos permanentes se coloca en un lugar en el que existe un campo eléctrico, las moléculas tienden a alinearse con sus dipolos paralelos al campo externo. En esta situación, decimos que la sustancia está polarizada.

## 2. DIPOLOS ATÓMICOS Y MOLECULARES

Un átomo puede considerarse constituido por un núcleo que se comporta como una carga puntual positiva ( $+Ze$ ) rodeado de una distribución de carga negativa ( $-Ze$ ) de simetría esférica. Cuando un átomo se somete a la acción de un campo eléctrico externo  $\vec{E}$ , la fuerza que actúa sobre el núcleo es opuesta a la que actúa sobre la nube electrónica, lo cual origina un desplazamiento relativo de las posiciones de sus centros de masa respectivos originándose un **dipolo eléctrico inducido** con lo que decimos que el átomo está polarizado.

Esto mismo puede ocurrirle a moléculas en las que los centros de masas de sus carga positivas y negativas coinciden en la misma posición en ausencia de campo eléctrico externo.

Sin embargo, algunas moléculas, por su propia constitución y asimetría, no tienen los centros de masas de sus cargas positiva y negativa en la misma posición, sino que están ligeramente desplazadas en el espacio. Estas moléculas son, por su propia constitución, dipolos eléctricos que existen en ausencia de campo eléctrico externo. Se dice que son **moléculas polares** y tienen un **momento dipolar eléctrico permanente** (Por ejemplo el agua, alcoholes, etc.). Al aplicar un campo eléctrico externo las moléculas polares tienden a alinearse con el campo de forma que, como hemos visto anteriormente, su momento dipolar eléctrico tiende a situarse paralelamente al campo externo y se dice que las moléculas se han polarizado. Este proceso de alineamiento no es completo debido a la agitación térmica de las moléculas (propia de la temperatura a la que se hallan). Así pues, este tipo de polarización depende fuertemente de la temperatura, de forma que al aumentar la temperatura la polarización será menor.

## 3. POLARIZACIÓN DE UN DIELECTRICO. VECTOR POLARIZACIÓN

Un *material no conductor* (vidrio, papel, mica ...) se denomina **dieléctrico**. Faraday descubrió que cuando el espacio entre las armaduras de un condensador se llenaba totalmente de dieléctrico, la capacidad del condensador aumentaba en un factor  $\epsilon_r$  característico de cada dieléctrico, llamando a  $\epsilon_r$  **permitividad relativa** o **constante dieléctrica**. ¿Cómo explicar la aparición de este efecto eléctrico si los dieléctricos son aislantes?

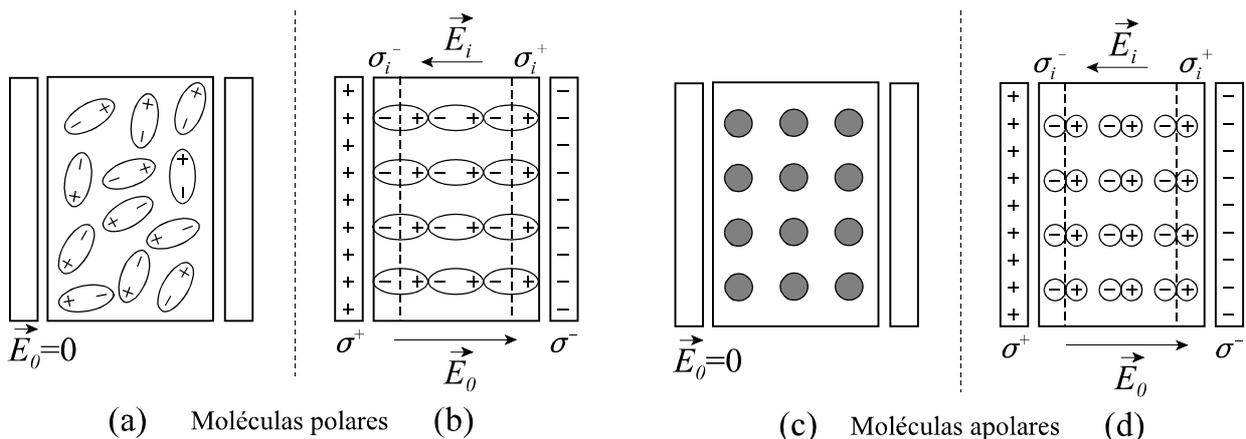


Figura 3

Figura 3

Podemos comprender este resultado en función de la polarización molecular del dieléctrico. **a)** Si las moléculas del dieléctrico son polares (presentan momento dipolar eléctrico permanente), sus momentos dipolares están inicialmente orientados al azar (figura 3a). En presencia de un campo eléctrico externo, los dipolos sufren un momento de torsión que tiende a alinearlos con dicho campo externo, produciéndose un campo eléctrico adicional ( $\vec{E}_i$ ) que se opone al campo aplicado; decimos que el dieléctrico se ha polarizado: **Polarización**

**de orientación** (figura 3b). Este tipo de polarización depende tanto de la intensidad del campo eléctrico externo, que favorece la orientación, como de la temperatura, que la perjudica. **b)** Incluso en el caso de que las moléculas del dieléctrico no sean polares (apolares), figura 3c, el campo eléctrico provoca una separación de los centros de masas de las cargas positivas y negativas (figura 3d), con lo que se formarán dipolos inducidos ya orientados en la dirección del campo, y así el dieléctrico se polarizará igualmente: **Polarización de desplazamiento**.

Así pues el efecto neto de la polarización es la aparición de una densidad superficial de carga inducida o ligada  $\sigma_i$  sobre las caras del dieléctrico próximas a las placas del condensador. Se denomina **carga ligada** porque, a diferencia de la que existe en las armaduras del condensador, *no puede desplazarse libremente a través del dieléctrico* y su existencia se debe a las cargas libres de las armaduras (si éstas desaparecen, por descarga del condensador, las de polarización también desaparecen; pero no porque se desplacen, sino porque los dipolos desaparecen si eran inducidos, o se reorganizan al azar como antes de la existencia del campo externo). Sin embargo, estas cargas ligadas crean un campo eléctrico opuesto al que existía en ausencia del dieléctrico, por lo que el resultado será que el campo efectivo ahora se ha debilitado respecto del que existía antes.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \Rightarrow |\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i| \Rightarrow |\vec{E}| < |\vec{E}_0| \quad [12.18]$$

Con objeto de analizar el efecto macroscópico de la orientación (o inducción) de los dipolos, definimos el **vector polarización**,  $\vec{P}$ , como el *momento dipolar eléctrico por unidad de volumen*. Así, si  $\Delta N$  es el número de dipolos (orientados o inducidos) que existe en un volumen infinitesimal  $\Delta \vartheta$  de dieléctrico y  $\langle \vec{p} \rangle$  es el momento dipolar eléctrico promedio de cada uno de esos dipolos, se define el vector polarización en un punto del dieléctrico como:

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta \vartheta \rightarrow 0} \frac{\Delta N \langle \vec{p} \rangle}{\Delta \vartheta} \quad [12.19]$$

donde hemos supuesto que un dieléctrico en un campo eléctrico tiene una distribución continua de dipolos infinitesimales, es decir, una polarización continua (en realidad, los dipolos son discretos por ser moléculas polarizadas). Dicha suposición no conduce a ningún error apreciable puesto que se consideran volúmenes que contienen multitud de dipolos (es decir, regiones macroscópicas).

Cuando el vector polarización sea uniforme en una región dada de volumen  $\vartheta$  donde haya  $N$  dipolos cada uno de momento dipolar eléctrico promedio  $\langle \vec{p} \rangle$ , podremos utilizar la expresión más simple:

$$\vec{P} = \frac{N \langle \vec{p} \rangle}{\vartheta} \quad [12.20]$$

Puede comprobarse que la unidad del vector polarización en el S.I. es  $C/m^2$ , es decir la misma que la de densidad superficial de carga. A continuación comprobaremos que, efectivamente, existe una relación entre la polarización y la densidad superficial de carga inducida.

En la figura 4 tenemos un esquema tridimensional del dieléctrico polarizado de la figura 3b, de forma que su volumen  $\vartheta = S_n d$  contendrá  $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$  dipolos orientados o inducidos, cada uno de ellos de momento dipolar eléctrico promedio  $\langle \vec{p} \rangle = q \vec{\ell}$ . Así, el módulo del vector polarización vendrá dado por:

$$|\vec{P}| = \frac{N \langle |\vec{p}| \rangle}{\vartheta} = \frac{N_x N_y N_z |q \vec{\ell}|}{S_n d} = \frac{(N_y N_z |q|) (N_x |\vec{\ell}|)}{S_n d} = \frac{|Q_i| d}{S_n d} = \frac{|Q_i|}{S_n} = |\sigma_i| \quad [12.21]$$

Si, manteniendo la misma polarización, consideramos una superficie  $S$  del dieléctrico que forme un ángulo  $\theta$  con  $S_n$  (figura 5), tendríamos:

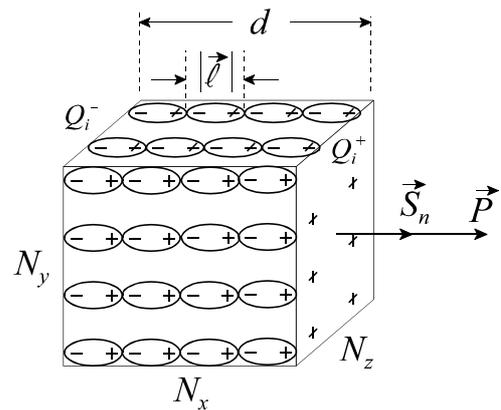


Figura 4

$$|\vec{P}| = \frac{|Q_i|}{S_n} = \frac{|Q_i|}{S \cos \theta} \Rightarrow |\sigma_i| = \frac{|Q_i|}{S} = |\vec{P}| \cos \theta = |\vec{P} \cdot \vec{u}_n| \quad [12.21a]$$

donde  $\vec{u}_n$  es el vector unitario del vector superficie del dieléctrico (recordar que como se trata de una superficie cerrada su sentido es “hacia fuera”). Así pues, la densidad superficial de carga inducida coincide con la componente normal a la superficie del dieléctrico del vector polarización. Además, la ecuación [12.21a] permite obtener el signo de la densidad de carga superficial inducida sobre cada superficie del dieléctrico. Nótese que en la cara con carga inducida negativa los vectores  $\vec{u}_n$  y  $\vec{P}$  forman un ángulo obtuso ( $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ), por lo que el resultado del producto escalar también será negativo, en tanto que en la cara con carga inducida positiva los vectores  $\vec{u}_n$  y  $\vec{P}$  forman un ángulo agudo ( $0 < \theta < \pi/2$ ) por lo que el producto escalar también será positivo. Así, podemos escribir:

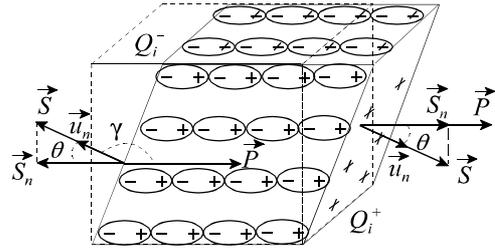


Figura 5

$$\sigma_i = \vec{P} \cdot \vec{u}_n \quad [12.21b]$$

Apliquemos la ecuación anterior a cada cara con carga inducida de la figura 5:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_i^+ = P \cos \theta \\ \sigma_i^- = P \cos \gamma = -P \cos \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_i^+ = -\sigma_i^-$$

Al ser  $\theta$  y  $\gamma$  suplementarios sus cosenos son opuestos, con lo que comprobamos que, efectivamente, la expresión [12.21b] sirve no sólo para determinar el módulo de la densidad superficial de carga inducida, sino también su signo.

Finalmente, debemos indicar que en este desarrollo hemos asumido en todo momento que la polarización del dieléctrico era uniforme. En este caso no existe en el interior del dieléctrico ninguna acumulación de carga, ya que cualquier volumen macroscópico contendrá igual número de cargas positivas y negativas. Sin embargo, si la polarización no fuese uniforme aparecería una densidad volumétrica de carga de polarización (o carga inducida) en el interior del dieléctrico  $\rho_i$ , además de la densidad superficial de carga, que está también relacionada con la polarización según  $\rho_i = -\nabla \cdot \vec{P}$ .

### 3.1.- Campo eléctrico en el interior de un dieléctrico

En el espacio libre hemos definido el campo eléctrico como la fuerza por unidad de carga, lo que implica que **el campo eléctrico en el espacio libre es una cantidad medible**. Sin embargo, es imposible situar una carga en el interior de un dieléctrico para medir la fuerza que el campo ejerce sobre ella y, por tanto, **el campo eléctrico en el interior de un dieléctrico no es una cantidad medible, sino teórica**. No obstante, si se centra la atención en los efectos externos del dieléctrico, las mediciones internas son innecesarias ya que se puede formular una teoría para explicar el comportamiento del dieléctrico, que estará acorde con las condiciones externas.

Hemos visto en la ecuación [12.21] que la densidad superficial de carga de polarización es igual al módulo del vector polarización dentro del dieléctrico: esta carga de polarización es negativa en una superficie (la que se encuentra próxima a la armadura positiva del condensador) y positiva en la otra (Figuras 11b y 11d). Sin embargo, podemos afirmar que existe un campo eléctrico en el interior del dieléctrico debido a dicha distribución superficial de carga de polarización, cuyo módulo vendrá dado por:

$$E_i = \frac{\sigma_i^+}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad [12.22]$$

Este campo, como ya hemos razonado, es de sentido opuesto al campo externo existente inicialmente entre las armaduras y se suele denominar **campo local**. Por tanto, el campo eléctrico existente tras introducir el dieléctrico será:

$$E = |\vec{E}_0 + \vec{E}_i| = E_0 - E_i = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \quad [12.23]$$

Puesto que la polarización es debida a la existencia de un campo eléctrico en el interior del dieléctrico, resulta lógico pensar que debe existir alguna relación entre ellos, del tipo  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ . Esta relación se determina experimentalmente y suele denominarse **ecuación constitutiva**. Así, podemos clasificar a los dieléctricos en función de su ecuación constitutiva en:

- **Electretos**. Se caracterizan por mantener polarización eléctrica incluso en ausencia del campo eléctrico externo que la originó. Son sólidos y se dice que tienen polarización permanente. Un ejemplo de este tipo de material se puede conseguir al dejar solidificar una cantidad de cera fundida a la que se aplica un campo eléctrico intenso. La cera solidificada tendrá una polarización permanente que se mantendrá al eliminar el campo externo. Su utilidad es limitada porque sus cargas superficiales de polarización se cancelan fácilmente atrayendo cargas libres del aire.
- **Dieléctricos no lineales**. Se caracterizan porque la relación entre la polarización y el campo eléctrico efectivo tiene la forma:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j + \sum_j \sum_k \beta_{ijk} E_j E_k + \dots$$

donde los subíndices  $i, j$  y  $k$  se refieren a coordenadas  $x, y, z$ . Los valores de los coeficientes  $\alpha_{ij}, \beta_{ijk}, \dots$  dependen del dieléctrico particular de que se trate. El motivo de la denominación de estos dieléctricos se debe al hecho de la necesidad de los términos no lineales de segundo orden (segundo sumando) y de orden superior (indicado con los puntos suspensivos). Un ejemplo de este tipo de materiales son algunas cerámicas.

- **Dieléctricos lineales**. En estos materiales la relación entre la polarización y el campo eléctrico efectivo no necesita de los términos de segundo orden o superior que vimos anteriormente. En este caso las componentes cartesianas de la polarización están relacionadas con las del vector campo eléctrico según:

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z)$$

donde los factores de proporcionalidad  $\chi_{ij}$  reciben el nombre de componentes del **tensor de susceptibilidad eléctrica**, que es simétrico. De la relación anterior se desprende que, en general, el vector polarización no será paralelo al vector campo eléctrico. Por otro lado, la introducción del término  $\epsilon_0$  se hace para que las componentes  $\chi_{ij}$  del tensor susceptibilidad eléctrica sean adimensionales.

- **Dieléctricos lineales isótropos homogéneos (dieléctricos perfectos o simples)**. Estos materiales añaden, respecto a los comentados anteriormente, el hecho de que las propiedades eléctricas del dieléctrico en un punto dado son independientes de la dirección del campo eléctrico efectivo. Esta última condición se denomina *isotropía*. En este caso el vector polarización será necesariamente paralelo al vector campo eléctrico. Así se cumplirá:  $\chi_{ij}=0$  para  $i \neq j$ , y  $\chi_{xx}=\chi_{yy}=\chi_{zz} \equiv \chi$ , de forma que la relación entre la polarización y el campo eléctrico efectivo será:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad [12.24]$$

En el caso adicional de que el dieléctrico sea *eléctricamente homogéneo* (propiedades eléctricas independientes de la posición),  $\chi$  será una magnitud constante característica del dieléctrico llamada **susceptibilidad eléctrica**. Dicha magnitud es positiva e indica la facilidad con que se desplazan las cargas negativas del dieléctrico respecto de las positivas al aplicarle un campo eléctrico externo.

Susceptibilidades eléctricas de algunas sustancias a temperatura ambiente y presión atmosférica			
Material	$\chi$	Material	$\chi$
<b>vacío</b>	<b>0</b>	polietileno	1,3
aire	0,00054	papel	1 – 3
óxido de Aluminio	3,5	mica	2 – 6
vidrio	4 – 9	baquelita	4,7
nylon	2,5	agua	79

A pesar de la multitud de condiciones impuestas en este último caso, los gases y los líquidos, así como

muchos sólidos las cumplen, por lo que no es una situación tan especial como podría pensarse. A partir de aquí consideraremos que tratamos con dieléctricos de este tipo.

Así pues, sustituyendo [12.24] en [12.23]

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\chi \epsilon_0 E}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{E_0}{(1 + \chi)} \quad [12.25]$$

La ecuación [12.25] indica que, al introducir el dieléctrico, el campo inicial ( $E_0 = \sigma^+ / \epsilon_0$ ) se ha hecho  $(1 + \chi)$  veces más pequeño. Si hacemos

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi \quad [12.26]$$

el descubrimiento experimental de Faraday queda perfectamente explicado, pues, efectivamente, el campo eléctrico ha disminuido en una proporción  $\epsilon_r$ .

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma^+}{\epsilon_0 \epsilon_r} \equiv \frac{\sigma^+}{\epsilon} \quad [12.27]$$

donde  $\epsilon$  se denomina **permitividad eléctrica** del material.

Decíamos antes que la carga de polarización era una consecuencia directa de la carga libre de las armaduras. Veamos ahora qué relación existe entre ambas densidades de carga.

$$E = E_0 - E_i \Rightarrow \frac{\sigma^+}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma^+}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i^+}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_i^+ = \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \sigma^+ \quad [12.28]$$

Puesto que  $\epsilon_r > 1$ , la ecuación [12.28] nos dice que  $\sigma_i$  generalmente será más pequeña que  $\sigma$  (tal y como habíamos razonado anteriormente). Por otra parte, si  $\epsilon_r = 1$  (cosa que sólo ocurre en el vacío),  $\sigma_i = 0$  (lo que indica que, lógicamente, el vacío no se polariza).

Por otra parte, la relación entre el campo local  $E_i$  y  $E_0$  podemos obtenerla a partir de [12.28] y será:

$$\frac{\sigma_i^+}{\epsilon_0} = \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{\sigma^+}{\epsilon_0} \Rightarrow E_i = \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) E_0 \quad [12.29]$$

Como  $\epsilon_r$  es mayor que 1 (salvo para el vacío),  $E_i$  será más pequeño que  $E_0$ . Para el vacío  $\epsilon_r = 1$ ,  $E_i = 0$  y el campo efectivo será igual a  $E_0$  ( $E = E_0 - E_i = E_0 - 0 = E_0$ ).

#### 4. EL VECTOR DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO. GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE GAUSS

La figura 6 muestra un condensador plano cargado con material dieléctrico en su interior. En estas circunstancias el dieléctrico está polarizado.

Si utilizamos la ley de Gauss, para lo cual tomamos las superficies gaussianas en forma de paralelepípedo esquematizadas en la figura 6 mediante las líneas discontinuas con dos de sus caras de área  $S_B$  paralelas a las placas, nos encontramos con:

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_i) \quad [12.30]$$

expresión en la que aparece la carga inducida (o carga ligada)  $Q_i$ . Cuando utilicemos la superficie gaussiana de la izquierda tendremos:  $Q = Q^+; Q_i = Q_i^-$ , en tanto que si tomamos la de la derecha, las relaciones serán:  $Q = Q^-; Q_i = Q_i^+$ . Para facilitar su uso intentaremos sustituir la carga ligada por una función de la polarización, ya que sabemos que están relacionadas.

$$Q_i = \int_{S_B} \sigma_i dS = \int_{S_B} \vec{P} \cdot \vec{u}_n dS = - \int_{S_B} \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \oint_{S'} \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad [12.31]$$

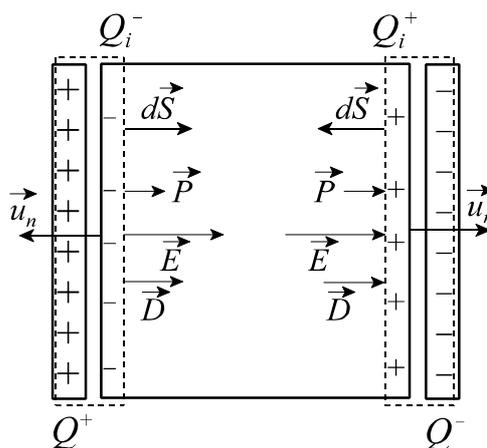


Figura 6

Como sólo hay carga inducida en la superficie de la base de las superficies gaussianas que está dentro del dieléctrico, hemos podido extender la integral a toda la superficie gaussiana.

El signo negativo se debe al hecho de que  $\vec{u}_n$ , que recordemos apunta “hacia fuera” de la superficie del dieléctrico, tiene sentido contrario a  $d\vec{S}$ . Puede entenderse el resultado de la expresión [12.31] porque cuando el flujo de la polarización es positivo (hacia fuera de la superficie), lo cual ocurre cuando tomamos la superficie gaussiana de la izquierda, la carga inducida encerrada es negativa, en tanto que cuando el flujo de la polarización es negativo (hacia dentro de la superficie), lo cual ocurre cuando tomamos la superficie gaussiana de la derecha, la carga inducida encerrada es positiva.

Sustituyendo  $Q_i$  en la ecuación [12.30] de la ley de Gauss, llegamos a:

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( Q - \oint_{S'} \vec{P} \cdot d\vec{S} \right) \Rightarrow \oint_{S'} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q \quad [12.32]$$

Así, ahora calculamos el flujo de una nueva magnitud vectorial a través de la superficie gaussiana. Y además dicho flujo sólo depende de la carga real que tenemos en las armaduras del condensador cargado. Definimos esa nueva magnitud vectorial, a la que denominaremos **desplazamiento eléctrico** o **densidad de flujo eléctrico** y simbolizaremos como  $\vec{D}$ ,

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [12.33]$$

Por tanto, la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico (también denominada ley de Gauss generalizada) queda en la forma

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad [12.34]$$

En el caso de un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo podemos obtener una relación sencilla entre  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ .

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad [12.35]$$

Como conclusión, hemos introducido junto al vector campo eléctrico  $\vec{E}$  dos nuevos vectores:  $\vec{P}$  y  $\vec{D}$ . De acuerdo con las expresiones [12.30], [12.31] y [12.34] cada uno de ellos está relacionado con un tipo de carga. Así, mientras el vector campo eléctrico está relacionado con la totalidad de cargas (libres y ligadas) que originan el campo, el vector polarización está relacionado con la carga inducida o carga de polarización y el vector desplazamiento eléctrico está relacionado exclusivamente con las cargas libres.

Por tanto, cuando necesitemos determinar el campo eléctrico en el interior de un dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo, podremos sortear la dificultad de la existencia de las cargas inducidas determinando el vector desplazamiento eléctrico para, posteriormente y a través de la expresión [12.35] obtener la expresión del campo eléctrico. ¡¡Esta es la ventaja primordial que apoya la definición del vector desplazamiento eléctrico!!

#### 4.1. Ejemplo de uso del vector desplazamiento eléctrico

Supongamos que tenemos un material dieléctrico, lineal, homogéneo e isótropo, de permitividad  $\epsilon$ , e introducimos en su interior un conductor cargado en equilibrio electrostático (Figura 6). Al querer obtener el campo eléctrico en un punto A del dieléctrico nos encontramos con el problema de que al utilizar la ley de Gauss deberemos incluir las cargas ligadas que aparecen en la superficie del dieléctrico que bordea al conductor. Para evitar esto, utilizamos el vector desplazamiento eléctrico, cuyo flujo a través de la superficie gaussiana  $S'$  depende exclusivamente de la carga libre del conductor. Así, tendremos:

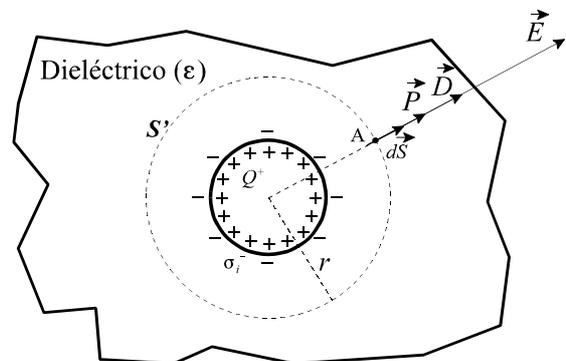


Figura 7

$$\oint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q^+ \Rightarrow D 4\pi r^2 = Q^+ \Rightarrow D = \frac{Q^+}{4\pi r^2}$$

Y, ahora usando la relación entre el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico, obtenemos la expresión de este último.

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^+}{r^2}$$

Puede comprobarse que el resultado obtenido es el mismo que obtendríamos en el caso de que en vez de dieléctrico hubiéramos tenido aire o vacío, con la diferencia de que ahora aparece la permitividad del dieléctrico en lugar de la permitividad del vacío.

Así, el vector desplazamiento eléctrico es el que debe usarse siempre que necesitemos obtener la expresión del campo eléctrico en un medio dieléctrico.

## 5. MECANISMOS DE POLARIZACIÓN ELÉCTRICA

Consideremos un dieléctrico homogéneo constituido por unidades polarizables (átomos, iones, moléculas, cadenas macromoleculares, cristales, etc.). Cuando se aplica un campo eléctrico al dieléctrico las cargas positivas y negativas del material se desplazan en sentidos contrarios en relación al campo eléctrico aplicado. El resultado es la polarización del dieléctrico, en la que el momento dipolar de cada unidad polarizable es proporcional al campo eléctrico aplicado.

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

donde la constante de proporcionalidad  $\alpha$  se llama **polarizabilidad**. En general, la polarizabilidad total de un material resulta de la contribución de una serie de efectos:

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_d + \alpha_f$$

correspondiendo cada uno de los sumandos de la expresión anterior a las siguientes causas:

- a) **Polarización electrónica** ( $\alpha_e$ ). Describe la polarización debida a los desplazamientos del centro de las cargas positivas respecto de las negativas de un átomo o ion sometido a un campo eléctrico (figura 8).

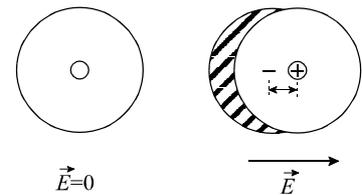


Figura 8

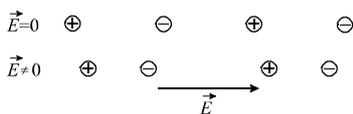


Figura 9

- b) **Polarización iónica** ( $\alpha_i$ ).

Surge del desplazamiento de los iones de sus posiciones de equilibrio por la acción de un campo eléctrico. Dicho desplazamiento da lugar a la aparición de un momento dipolar eléctrico (figura 9).

- c) **Polarización dipolar** ( $\alpha_d$ ). Aparece en dieléctricos formados por moléculas con momento dipolar eléctrico permanente. Cuando se aplica un campo eléctrico los dipolos se orientan en la dirección del campo.

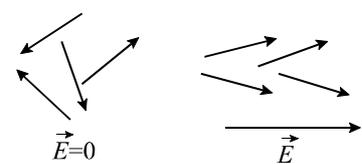


Figura 10

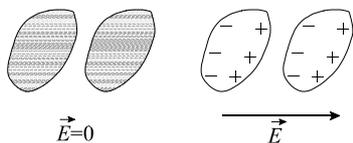


Figura 11

- d) **Polarización interfacial** ( $\alpha_f$ ).

Es una forma de polarización característica de materiales policristalinos que contienen cargas libres. La polarización surge como consecuencia de la acumulación de cargas libres en las superficies de los cristalitas favorecida por los bordes de grano.

De forma genérica, tal como ya hemos mencionado anteriormente, podemos decir que existen dos mecanismos moleculares básicos de polarización dieléctrica:

- ☞ **Polarización de desplazamiento (Dieléctricos de primera especie)** en la que se engloban los mecanismos de polarización electrónica, iónica e interfacial que hemos visto.
- ☞ **Polarización de orientación (Dieléctricos de segunda especie)** que incluye el mecanismo de polarización dipolar.

La diferencia fundamental entre los materiales que responden a uno u otro mecanismo es la dependencia de la susceptibilidad eléctrica (o de la constante dieléctrica) con la temperatura. En el caso de la *polarización de orientación* la alineación de los dipolos en el sentido del campo eléctrico aplicado puede verse alterada por la agitación térmica que se produce al aumentar la temperatura. En este caso, la teoría proporciona una relación entre la susceptibilidad y la temperatura en la forma:

$$\chi = \frac{n}{\epsilon_0} \left( \alpha + \frac{p^2}{3kT} \right)$$

siendo  $p$  el momento dipolar eléctrico permanente de la molécula,  $n$  el número de dipolos (moléculas) por unidad de volumen,  $k$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta.

Como veremos a continuación, en el caso de la *polarización de desplazamiento* la susceptibilidad no depende de la temperatura y se obtiene:

$$\chi = \frac{n\alpha}{\epsilon_0}$$

### 5.1. Relación entre polarizabilidad (magnitud microscópica) y constante dieléctrica (magnitud macroscópica)

La polarización de un dieléctrico se definió como el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen.

$$\vec{P} = n \vec{p}$$

siendo  $n$  el número de dipolos por unidad de volumen y  $\vec{p}$  el momento dipolar eléctrico dado por:  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ .

Además, en el caso de los dieléctricos de primera especie que sean homogéneos, isotrópicos y lineales existe la siguiente relación entre la polarización y el campo eléctrico, como ya hemos visto:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Por tanto:

$$\epsilon_0 \chi \vec{E} = n \alpha \vec{E} \quad \rightarrow \quad \chi = \frac{n\alpha}{\epsilon_0}$$

Podemos expresar  $n$  en función de magnitudes medibles como la masa molecular  $M$ , y la densidad  $\rho$ , esto es:

$$n = \frac{\rho}{M} N_A$$

donde  $N_A$  es el número de Avogadro.

De esta forma, despejando la polarizabilidad  $\alpha$  y teniendo en cuenta la relación  $\epsilon_r = 1 + \chi$ , llegamos a:

$$\alpha = \frac{M}{N_A \rho} \epsilon_0 \chi = \frac{M}{N_A \rho} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)$$

Esta ecuación, que relaciona la polarizabilidad  $\alpha$  con las propiedades moleculares del dieléctrico, se conoce como **ecuación de Burniston-Brown** y ha dado buen resultado al aplicarla a gases. Sin embargo, en materiales de densidad superior no se puede despreciar el efecto mutuo entre los dipolos. En estos casos es necesario considerar la **relación de Clausius-Mossoti**

$$\alpha = \frac{M}{N_A \rho} \frac{3\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)}$$

que coincide con la de Burniston-Brown cuando  $\epsilon_r \approx 1$ .

En el caso de sólidos cristalinos las interacciones entre dipolos producen polarizaciones mucho más complicadas y la ecuación de Clausius-Mossoti no es válida.

### 5.2. Energía almacenada en los dipolos

La fuerza eléctrica ejercida sobre cada carga  $q$  de un dipolo que se encuentra en el interior de un campo eléctrico será:

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

que puede ponerse en función del momento dipolar eléctrico y de la polarizabilidad como:

$$\vec{F} = q \frac{\vec{p}}{\alpha}$$

y, a su vez, el momento dipolar eléctrico se puede poner en función de la carga del dipolo.

$$\vec{F} = q^2 \frac{\vec{\ell}}{\alpha}$$

Esta relación indica que las cargas están asociadas a una fuerza en la posición de equilibrio. Se trata de una fuerza similar a la fuerza elástica en la que dicha fuerza es proporcional a la elongación. Para separar las cargas e inducir la polarización la fuerza eléctrica ha realizado un trabajo que se ha almacenado en el dipolo en forma de energía potencial, esto es:

$$W = \int_0^{\ell} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\ell} \frac{q^2}{\alpha} \vec{\ell} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha} \ell^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\alpha} = \frac{1}{2} p E$$

Ésta es la energía potencial almacenada en un dipolo de momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  en el seno de un campo eléctrico  $\vec{E}$ .

¡¡Ojo!! Esta energía es la asociada al proceso de polarización de la unidad polarizable, en tanto que la energía  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$  es la energía de un dipolo en el seno de un campo eléctrico en virtud de su posición en relación a ese campo.

## 6. DENSIDAD DE ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO EN UN DIELECTRICO

La energía almacenada en un condensador viene dada por la conocida expresión

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

Vamos a obtener la energía potencial electrostática almacenada en el caso especial de un condensador plano al que hemos insertado un dieléctrico de constante dieléctrica  $\epsilon_r$ . Tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} \\ V = E d \end{array} \right\} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \vartheta$$

Por tanto, la densidad de energía almacenada entre las láminas del condensador será:

$$\eta_E = \frac{U}{\vartheta} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D E$$

Obsérvese que hubiéramos encontrado el mismo resultado en el caso de un dieléctrico inmerso en el interior de un campo eléctrico uniforme, independientemente de cuál sea la causa que lo origine. Por tanto, el resultado es válido como densidad de energía almacenada en una región de un dieléctrico inmerso en un campo eléctrico.

La expresión anterior podemos también usarla en la forma:

$$\eta_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Este resultado se puede interpretar considerando que dicha densidad de energía proviene de la densidad de energía almacenada por el campo en ausencia de dieléctrico más la energía debida a la polarización de los dipolos del dieléctrico. ¡¡Comprobémoslo!!

$$\eta_E = (\eta_E)_0 + (\eta_E)_{dipolos} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + n \frac{1}{2} p E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} P E$$

$$\eta_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (1 + \chi) E^2 = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \overline{D} \cdot \overline{E}$$

## 7. POLARIZACIÓN EN AUSENCIA DE CAMPOS ELÉCTRICOS EXTERIORES

– Ciertos materiales dieléctricos presentan la peculiaridad de que se encuentran polarizados incluso en ausencia de campos exteriores. Es decir, presentan polarización espontánea. Estos materiales se denominan **ferroeléctricos**, por analogía con los materiales ferromagnéticos. Esta polarización se debe al desplazamiento de los iones de la estructura cristalina como consecuencia de la presencia de campos eléctricos locales. Estos campos locales son producidos por desplazamientos de iones que dan lugar a fuerzas sobre otros iones que, para pequeños desplazamientos, son mayores que las fuerzas eléctricas restauradoras en el cristal. De esta forma, las posiciones de equilibrio de los iones son tales que el cristal presenta una polarización neta.

Las sustancias ferroeléctricas presentan generalmente susceptibilidades elevadas. También presentan histéresis en la polarización provocada por campos exteriores, y pierden su polarización espontánea por encima de una temperatura crítica.

### Utilidad

- 1) Uno de los ferroeléctricos más conocidos es el BaTiO<sub>3</sub> (Titanato de Bario), que, debido a su alta constante dieléctrica se utiliza en la construcción de condensadores, sobre todo si se necesita una gran capacidad y un tamaño pequeño.
- 2) También se usan para la fabricación de memorias de almacenamiento de información (memorias ferroeléctricas).

– Cuando un dieléctrico se polariza se produce en el material una variación de volumen. Los dipolos dispuestos uno tras otro en la dirección del campo ejercen una atracción mutua debido a que detrás del polo negativo de un dipolo se encuentra el positivo del siguiente. Como consecuencia de estas interacciones eléctricas las moléculas (los dipolos) se aproximan hasta que las fuerzas elásticas que aparecen en el material equilibran a las primeras. Este cambio de volumen causado por la polarización del material se llama **electrostricción**.

La aplicación de un campo eléctrico alterno produce en un dieléctrico oscilaciones de deformación, lo que se utiliza en el emisor ultrasónico electrostrictivo.

– Si se deforma un cristal, constituido por iones, con un eje polar dicho cristal se polariza, debido a que pueden aparecer momentos dipolares o modificarse los ya existentes, y esto hace que en la superficie del material aparezcan cargas. Este fenómeno se denomina **piezoelectricidad**, Este comportamiento lo presenta de forma especial la turmalina, el cuarzo, y el tartrato sódico-potásico entre otros.

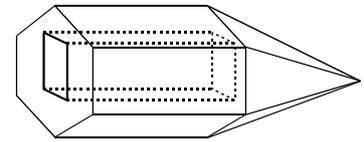


Figura 12

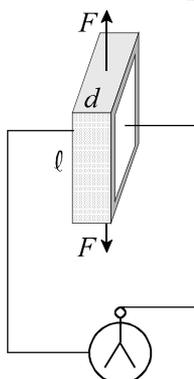


Figura 13

Si se corta una placa fina en un cristal de cuarzo como se indica en la figura 12, y sobre las caras anterior y posterior se colocan cubiertas metálicas unidas a un electrómetro (figura 13), al aplicar una tracción en dirección longitudinal se observa una diferencia de potencial entre las cubiertas. Existe una relación entre la carga superficial que aparece debido a la polarización del cuarzo y la fuerza de tracción empleada:

$$Q = k \frac{\ell}{d} F$$

siendo  $\ell$  la longitud de la cubierta,  $d$  el espesor de la placa y  $k$  es una constante característica del material.

### Utilidad

- 1) Este fenómeno se utiliza para la medida eléctrica de tensiones o de presiones y es especialmente ventajoso en el caso de presiones de rápida variación (detonaciones).
- 2) Por otro lado, si se aplica una tensión alterna a las cubiertas cuya frecuencia coincida con la de oscilación fundamental mecánica del cristal de cuarzo se producirán en él oscilaciones resonantes. Por esto el cuarzo ha alcanzado gran importancia como emisor ultrasónico.

3) También se usan como estabilizadores de la frecuencia en circuitos oscilantes.

- Si en vez de una deformación elástica en un cristal piezoeléctrico con eje polar se produce una variación de temperatura, que origina también una variación de volumen, logramos igualmente polarizar el material con lo que aparece una carga en superficie. Este fenómeno se conoce con el nombre de piroelectricidad.

Utilidad:

- 1) Detectores piroeléctricos para alarmas, bien para detectar intrusos o fuego.
- 2) También se usan en la formación de imágenes térmicas.