Prácticas 0, 1 y 2. Introducción a los Métodos Numéricos

Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Mª Luz Muñoz Ruiz
José Manuel González Vida

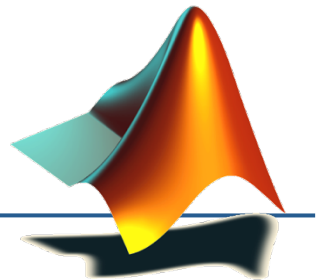
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Práctica 0. Introducción a Matlab

Práctica 1. Resolución de ecuaciones

Práctica 2. Interpolación y aproximación polinómica. Derivación e integración numérica

PRÁCTICA 0
INTRODUCCIÓN A MATLAB



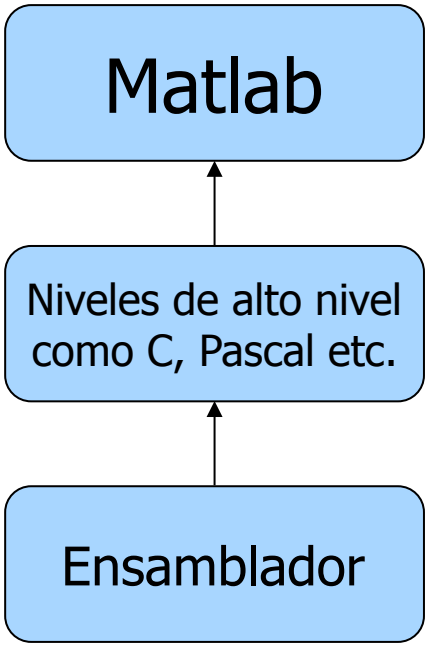
José Manuel González Vida
Mª Luz Muñoz Ruiz
Dpto. Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Indice

- Introducción
- Números y operaciones
- Vectores y matrices
- Operaciones con vectores y matrices
- Funciones para vectores y matrices
- Polinomios
- Gráficos 2D y 3D
- Programación
- Análisis numérico

Introducción

- ¿Qué es Matlab?: MATrix LABoratory. Creado por: MathWorks Inc
- Es un lenguaje de programación (inicialmente escrito en C) para realizar cálculos numéricos con **vectores y matrices**.



- Cuenta con paquetes de funciones especializadas (toolboxes)

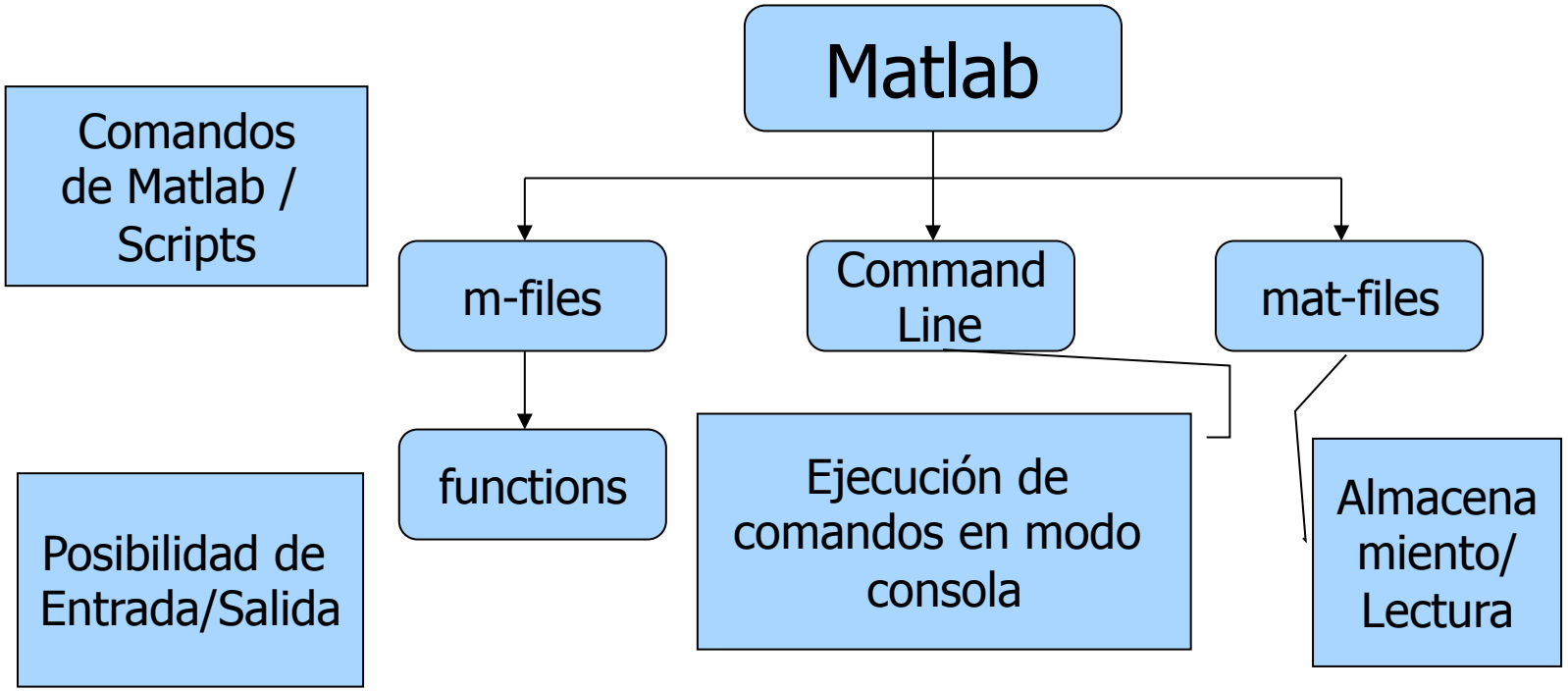
Introducción

Elementos básicos del escritorio de Matlab

- **Command Windows**: Donde se ejecutan todas las instrucciones y programas. Se escribe la instrucción o el nombre del programa y se da a Enter.
- **Command History**: Muestra los últimos comandos ejecutados en Command Windows. Se puede recuperar el comando haciendo doble
- **Current directory**: Situarse en el directorio donde se va a trabajar
- **Help** (también se puede usar desde comand windows)
- **Workspace**: Para ver las variables que se están usando y sus dimensiones (si son matrices)
- **Editor del Matlab**: Todos los ficheros de comandos Matlab deben de llevar la extensión .m

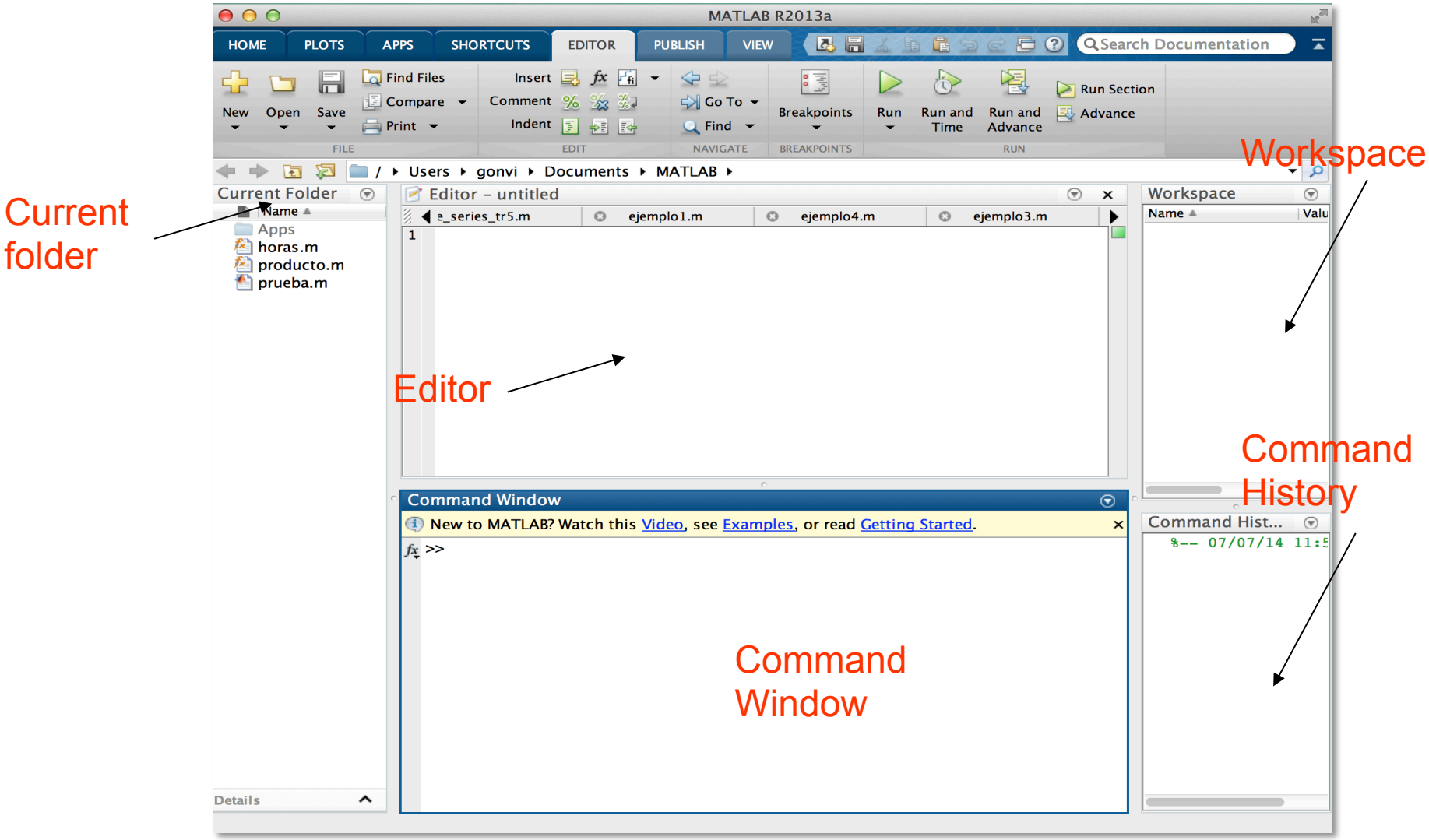
¿En qué estamos interesados?

- Matlab es muy complejo y consta de muchos módulos específicos (Toolboxes) para el propósito de este curso.
- Estas son las carácterísticas básicas que vamos a trabajar.



Introducción

Elementos básicos del escritorio de Matlab



Introducción

Elementos básicos del escritorio de Matlab

- **Command Window**: shell de ejecución directa de comandos
  Ejemplo: escribir en línea de comandos: x=6*4, y mirar en workspace la variable x
- **Current directory**: Directorio de trabajo
- **Help** (también se puede usar desde command window)
- (índice, search, DEMOS).
- **Workspace**: variables en uso. Doble clic en las variables para ver su información.
- **Editor del Matlab**: Todos los ficheros de comandos Matlab deben de llevar la extensión .m
- **Command History**: ver comandos ejecutados. Se puede guardar la sesión usando el comando diary.

Introducción

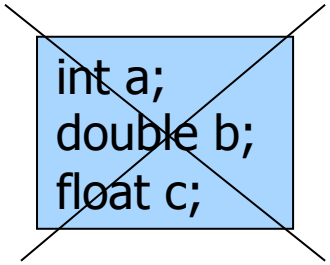
La ventana de comandos: aspectos prácticos

- Se pueden recuperar instrucciones con las teclas ↓↑
- Se puede mover por la línea de comandos con las teclas → ←. Ir al comienzo de la línea con la tecla Inicio y al final con Fin. Con Esc se borra toda la línea.
- **Importante: Se puede cortar la ejecución de un programa con Ctrl+C** (Muy útil cuando un programa no termina su ejecución debido a un error)

Variables

- No hace falta definir variables enteras, reales, etc.

como en otros lenguajes

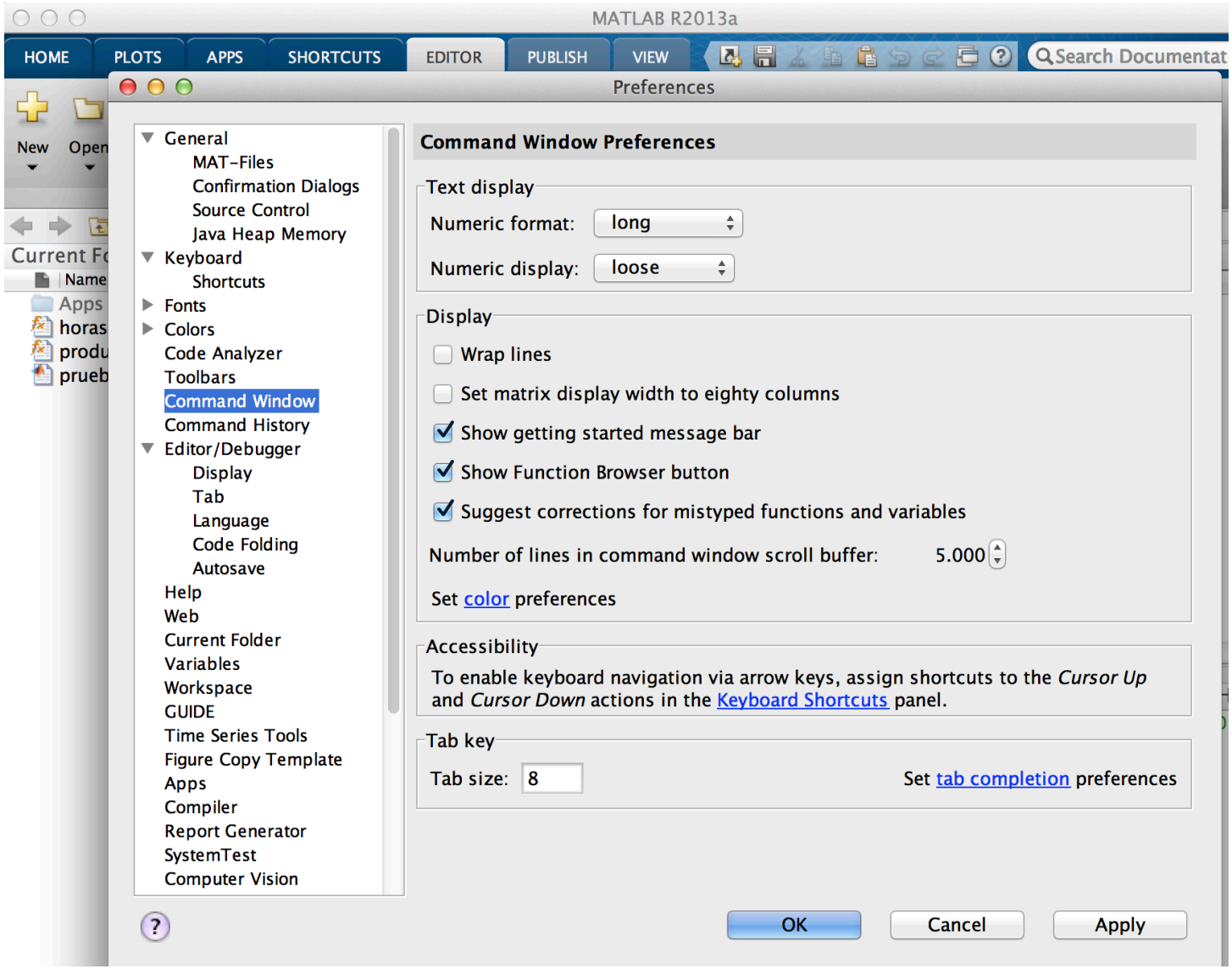


  - Números enteros: a=2
  - Números reales: x=-35.2
    - Máximo de 19 cifras significativas
    - 2.23e-3=2.23*10^{-3}

- **Por defecto las variables definidas serán matrices 1x1 con doble precisión.**
- **Precisión y formatos:** Por defecto tiene un formato corto, pero se pueden usar otros

  >> format long (14 cifras significativas)
  >> format short (5 cifras significativas)
  >> format short e (notación científica)
  >> format long e (notación científica)
  >> format rat (aproximación racional)

Preferencias (menú File)



Variables

Variables

- Los nombres son sensibles a las mayúsculas y minúsculas: x=5, X=7
- Información sobre variables que se están usando y sus dimensiones (si son matrices): **Workspace**. También tecleando

  >> who

  >> **whos** (da más información)

- Para eliminar alguna variable se ejecuta

  >> **clear** variable1 variable2

- Si se quieren borrar todas las variables: **>> clear o clear all**
- **Constantes características**: pi=π, NaN (not a number, 0/0), Inf=∞.
- **Números complejos**: i=sqrt(-1) (sólo se puede usar i o j), z=2+i*4, z=2+4i
- **Atención**: no usar luego 'i' como contador en un bucle trabajando con complejos.

Números y operaciones

Operaciones aritméticas elementales:

- Suma: +, Diferencia -
- Producto: *, Cociente: /
- Potencias: ^
- Orden de prioridad: Potencias, divisiones y multiplicaciones y por último sumas y restas. Usar la asociatividad, (), para cambiar la prioridad de una operación sobre otra.

Funciones

Funciones propias de Matlab:

- **exp(x), log(x), log2(x)** (en base 2)**, log10(x)** (en base 10), **sqrt(x)**
- **Funciones trigonométricas**: sin(x), cos(x), tan(x), asin(x), acos(x), atan(x), atan2(x) (entre –pi y pi)
- **Funciones hiperbólicas:** sinh(x), cosh(x), tanh(x), asinh(x), acosh(x), atanh(x)
- Otras funciones: **abs(x)** (valor absoluto), **int(x)** (parte entera), **round(x)** (redondea al entero más próximo), **sign(x)** (función signo)
- **Funciones para números complejos**: real(z) (parte real), imag(z) (parte imaginaria), abs(z) (módulo), angle(z) (ángulo), conj(z) (conjugado)

Vectores y matrices

Definición de vectores:

- **Vectores fila**; elementos separados por espacios o comas

  >> v =[2 3 4] o [2,3,4]

- **Vectores columna**: elementos separados por **punto y coma** (;)

  >> w =[2;3;4;7;9;8]

- Dimensión de un vector w: **length(w)**
- Generación de vectores fila (notación ":") :
  - Especificando el incremento **h** de sus componentes **v=a:h:b**
  - Especificando su dimensión **n: linspace(a,b,n)** (por defecto n=100)
  - Componentes logarítmicamente espaciadas **logspace(a,b,n)** (n puntos logarítmicamente espaciados entre 10^a y 10^b.

Vectores y matrices

Definición de matrices:

- Asignación dinámica de memoria: no hace falta establecer de antemano su tamaño (se puede definir un tamaño y cambiarlo posteriormente).
- **Las matrices se definen por filas**; los elementos de una misma fila están separados por blancos o comas. Las filas están separadas por punto y coma (;).

```
» M=[3 4 5; 6 7 8; 1 -1 0]
```

- **Matriz vacía**: M=[ ];

- Información de un elemento: M(1,3), de una fila M(4,:), de una columna M(:,2).
- Cambiar el valor de algún elemento: M(1,3)=1;
- Eliminar una columna: M(:,1)=[ ], una fila: M(2,:)=[ ];

Vectores y matrices

Definición de matrices:

- Generación de matrices:
  - Generación de una matriz de ceros, **zeros(n,m)**
  - Generación de una matriz de unos, **ones(n,m)**
  - Inicialización de una matriz identidad **eye(n,m)**
  - Generación de una matriz de elementos aleatorios **rand(n,m)**

  Nota:

  Los comandos anteriores también se pueden usar con un solo argumento: ejemplo **zeros(n)=zeros(n,n)**
- Añadir matrices: [X Y] columnas, [X; Y] filas

Operaciones con vectores y matrices

Operaciones de vectores y matrices con escalares:

v: vector, k: escalar:

- v+k adición o suma
- v-k sustracción o diferencia
- v*k producto
- v/k divide cada elemento de v por k
- k./v divide k por cada elemento de v
- v.^k potenciación de cada componente de v a k
- k.^v potenciación k elevado a cada componente de v

Operaciones con vectores y matrices

Operaciones con vectores y matrices:

- + adición o suma
- – sustracción o diferencia
- * producto matricial
- .* producto elemento a elemento
- ^ potenciación
- .^ elevar a una potencia elemento a elemento
- \ división-izquierda
- / división-derecha
- ./ y .\ división elemento a elemento
- matriz traspuesta: **B=A'** (en complejos calcula la traspuesta conjugada, sólo la traspuesta es **B=A.')**

Funciones para vectores y matrices

Funciones de matlab para vectores y matrices:

- **sum(v)** suma los elementos de un vector
- **prod(v)** producto de los elementos de un vector
- **dot(v,w)** producto escalar de vectores
- **cross(v,w)** producto vectorial de vectores
- **mean(v)** (hace la media)
- **diff(v)** (vector cuyos elementos son la resta de los elemento de v)
- **[y,k]=max(v)** valor máximo de las componentes de un vector (k indica la posición), **min(v)** (valor mínimo). El valor máximo de una matriz M se obtendría como **max(max(M))** y el mínimo **min(min(v))**

- Aplicadas algunas de estas funciones a matrices, realizan dichas operaciones por columnas.

Funciones para vectores y matrices

Funciones de Matlab para vectores y matrices

- [n,m]=**size(M)** te da el número de filas y columnas¡
- matriz inversa**: B=inv(M),** rango: **rank(M)**
- **diag(M):** Obtención de la diagonal de una matriz. **sum(diag(M))** calcula la traza de la matriz A**. diag(M,k)** busca la k-ésima diagonal.
- **norm(M)** norma de una matriz (máximo de los valores absolutos de los elementos de A)
- **flipud(M)** reordena la matriz, haciendo la simétrica respecto de un eje horizontal**. fliplr(M))** reordena la matriz, haciendo la simétrica respecto de un eje vertical
- **[V, lambda]=eig(M)** da una matriz diagonal **lambda** con los autovalores y otra **V** cuyas columnas son los autovectores de M

Funciones para vectores y matrices

- Comandos básicos para guardar las variables del entorno en ficheros y recuperar datos:
  - **save** nombre_fichero nombre_matriz1, nombre_matriz2
  - **load** nombre_fichero nombre_matriz1, nombre_matriz2
  - **save** nombre_fichero nombre_matriz1 –ascii (guarda 8 cifras decimales)
  - **save** nombre_fichero nombre_matriz1 –ascii –double (guarda 16 cifras decimales)

Polinomios

- Los polinomios se representan en Matlab por un vector fila de dimensión n+1 siendo n el grado del polinomio. Ejemplo: x^4+x-8 se representa por

  >> pol=[1 0 0 1 8]

- Cálculo de las raíces: **roots** (da un vector columna, aunque pol es un vector fila)

  >>raices=roots(pol)

- Un polinomio puede ser reconstruido a partir de sus raíces con el comando **poly**

  >> p=poly(raices) (dar un vector fila) *

  - Si el argumento de poly es una matriz se obtiene el polinomio característico de la matriz.

Polinomios

Funciones de Matlab para polinomios

- Calcular el valor de un polinomio p en un punto dado x: **polyval**

```
>> y=polyval(p,x)
```

- Multiplicar y dividir polinomios: **conv(p,q)** y **deconv(p,q)**

- Calcular el polinomio derivada**: polyder(p)**

Gráficos 2D y 3D

Funciones gráficas 2D y 3D elementales

- **2D: plot()** crea un gráfico a partir de vectores con escalas lineales sobre ambos ejes,

  >> plot(X,Y,'opción') (opción: permite elegir color, tipo de línea de la curva, etc)

  - **hold on:** permite pintar más gráficos en la misma figura (se desactiva con **hold off)**
  - **Grid on** activa una cuadrícula en el dibujo. Escribiendo de nuevo grid o grifd off se desactiva.

- **2D: loglog()** escala logarítmica en ambos ejes, **semilogx():** escala lineal en el eje de ordenadas y logarítmica en el eje de abscisas, **semilogy():** escala lineal en abscisas y logarítmica en ordenadas

Gráficos 2D y 3D

Funciones gráficas 2D y 3D elementales

- **2D: subplot(n,m,k)** subdivide una ventana gráfica se puede en **m** particiones horizontales y **n** verticales y **k** es la subdivisión que se activa.
- **2D: polar(ángulo,r)** para pintar en polares
- **2D: fill(x,y,'opción')** dibuja una curva cerrada y la rellena del color que se indique en 'opción'
- **3D: plot3** es análoga a su homóloga bidimensional **plot**.

  » plot3(X,Y,Z, 'opción')

Gráficos 2D y 3D

Elección de la escala de los ejes

- **axis**([x0 x1 y0 y1]) (2D), **axis**([x0 x1 y0 y1 z0 z1]) (gráficas 3D)
- **axis auto**: devuelve la escala a la de defecto
- **axis off**: desactiva los etiquetados de los ejes desapareciendo los ejes, sus etiquetas y la malla, **axis on**: lo activa de nuevo
- **axis equal**: los mismos factores de escala para los dos ejes
- **axis square**: cierra con un cuadrado la región delimitada por los ejes de coordenadas actuales.
- Para elegir las etiquetas que aparecen en los ejes:

  - set(gca, 'XTick',-pi:pi/2,pi) %gca:get current axis
  - set(gca, 'XTicklabel',({'-pi','-pi/2',0,'pi/2','pi'})

Gráficos 2D y 3D

Funciones para añadir títulos a la gráfica

- **title('título')** añade un título al dibujo. Para incluir en el texto el valor de una variable numérica es preciso transformarla mediante :
  - **int2str(n)** convierte el valor de la variable entera n en carácter
  - **num2str(x)** convierte el valor de la variable real o compleja x en carácter. Ejemplo: title(num2str(x))
- **xlabel('texto')** añade una etiqueta al eje de abscisas. Con **xlabel off** desaparece. Lo mismo **ylabel('texto')** o **zlabel('texto')**
- **text(x,y,'texto')** introduce 'texto' en el lugar especificado por las coordenadas x e y. Si x e y son vectores, el texto se repite por cada par de elementos.
- **gtext('texto')** introduce **texto** con ayuda del ratón.

Gráficos 2D y 3D

Funciones de Matlab para gráficos 2D y 3D

- Imprimir gráficos: **Print** (botón imprimirr en la ventana gráfica)
- Guardar gráficos: **Save** (botón de grabar en la ventana gráfica): Se crea un fichero .fig que podrá volver a editarse y modificarse
- Exportar gráficos: **Export** (botón File en ventana gráfica. Existen multitud de formatos de grabado tanto vectoriales como en mapa de bits.)
- **figure(n):** Llamar una nueva figura o referirnos a una figura ya existente
- **close all** borra todas las figuras, **close(figure(n))** cierra la figura “n” en concreto

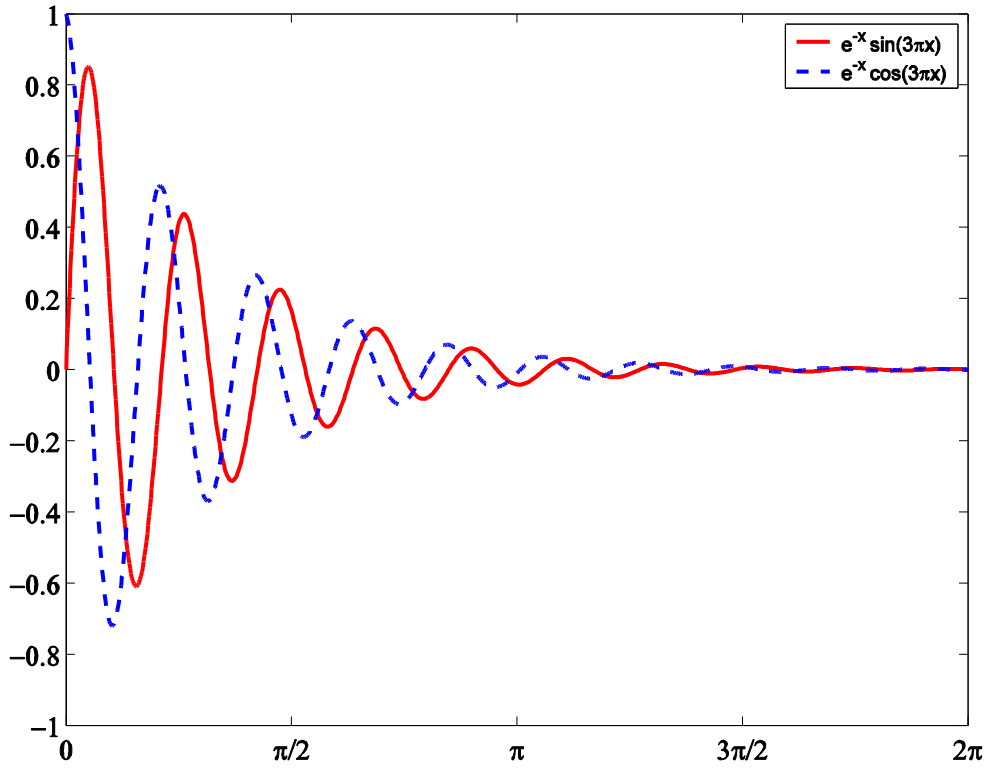
Ejemplos

Representar las funciones:

$$y_1 = \sin(3\,\pi\, x)/e^x$$

$$y_2 = \cos(3\pi\, x)/e^x$$

con x variando entre 0 y 3 π,obteniendo una única figura de la forma:



Ejemplos

a) Obtener la solución del sistema de ecuaciones:

$$3x+2y-z=1$$
$$5x+y+3z=-2$$
$$3y-4z=3$$

b) Sea A de coeficientes del sistema anterior. Calcular el máximo autovalor de A y su autovector asociado como salida del programa

Gráficos 2D y 3D

Representación gráfica de superficies

- Creación de una malla a partir de vectores **[X,Y]=meshgrid(x,y)**
- Gráfica de la malla construida sobre la superficie Z(X,Y): **mesh(X,Y,Z)**, **meshc(X,Y,Z)** (dibuja además líneas de nivel en el plano z=0)
- Gráfica de la superficie Z(X,Y): **surf(X,Y,Z)**, **surfc(X,Y,Z)**
- **pcolor(Z)** dibuja proyección con sombras de color sobre el plano (la gama de colores está en consonancia con las variaciones de Z)
- **contour(X,Y,Z,v)** y **contour3(X,Y,Z,v)** generan las líneas de nivel de una superficie para los valores dados en **v**. Para etiquetar las líneas, primero **cs=contour(Z)** (para saber los valores del contorno) y luego **clabel(cs)** o directamente **clabel(cs,v)**

Gráficos 2D y 3D

Representación gráfica de superficies

- Diferentes formas de representar los polígonos coloreados:
  - **shading flat:** sombrea con color constante para cada polígono.
  - **shading interp**: sombrea calculado por interpolación de colores entre los vértices de cada polígono
  - **shading faceted**: sombreado constante con líneas negras superpuestas (opción por defecto)
- **hidden off** (desactiva la desaparición de líneas escondidas), **hidden on** (lo activa)
- Manipulación de gráficos
  - **view(azimut, elev), view([xd,yd,zd])**
  - **rotate(h,d,a)** o **rotate(h,d,a,o),** 'h' es el objeto, 'd' es un vector que indica la dirección, 'a' un ángulo y 'o' el origen de rotación
  - En ventana gráfica: **View (camera toolbar)**

Gráficos 2D y 3D

Transformación de coordenadas

- [ang,rad]=**cart2pol(x,y),** de cartesianas a polares
- [ang,rad,z]=**cart2pol(x,y,z),** de cartesianas a cilíndricas

- [x,y]=**pol2cart(ang,rad),** de polares a cartesianas
- [x,y,z]=**pol2cart(ang,rad,z),** de cilíndricas a cartesianas

- [angx,angz,rad]=**cart2sph(x,y,z),** de cartesianas a esféricas
- [x,y,z]=**aph2cart(angx,angz,rad),** de esféricas a cartesianas

Gráficos 2D y 3D

Creación de películas

- Una película se compone de varias imágenes (frames)
- **getframe** se emplea para guardar todas esas imágenes. Devuelve un vector columna con la información necesaria para reproducir la imagen que se acaba de representar, por ejemplo con la función **plot.** Esos vectores se almacenan en una matriz **M**.
- **movie(M,n,fps)** representa **n** veces la película almacenada en **M** a una velocidad de **fps** imágenes por segundo

```
x=0:0.01:2*pi;
for j=1:10
   plot(x,sin(j*x)/2)
   M(j)=getframe;
end
movie(M,4,6)
```

Programación con Matlab

Ficheros de Matlab

- **Ficheros de programa (scripts):** Se construyen mediante una secuencia de comandos. El fichero principal se llamará **nombre.m**
- **Ficheros de función:** para crear funciones propias. Son llamados por los ficheros de programa.
  - La primera línea es ejecutable y empieza por la palabra clave function de la forma:

  function arg_salida = funcion_nombre(arg_entrada)

  - El fichero se debe guardar como **funcion_nombre.m**
- **Comandos de entrada y salida:**
    - **input:** permite introducir datos: ae=input('Teclee valor de a');
    - **disp:** muestra un texto por pantalla: disp('El algoritmo no ha convergido')

Programación con Matlab

Funciones de funciones

- **fzero(‘nombre_funcion’,x0):** Calcula el cero de una función más próximo al valor de la variable x0
- **fminsearch(‘funcion’,x0):** calcula el mínimo relativo de una función tomando como semilla del método el punto x0
- **fminbnd(‘funcion‘,a,b):** calcula un mínimo de la función en el intervalo [a,b]

Programación con Matlab

Bucles

```
for k=n1:incre:n2

end
```

```
for k=vector_columna

end
```

```
while

end
```

Programación con Matlab

Estructuras de control condicionadas

- **Operaciones lógicas:**
  - >, <, >=,<=,== (igual)
  - | (or), &(and)
  - ~ (no), ~= (no igual)

```
if
end
```

```
if
else
end
```

```
if
elseif
else
end
```

Programación con Matlab

Interpolación

- **1D:**
  - Se define un polinomio de un cierto grado (ejemplo, **n=2,** ax^2+bx +c), para hacer la interpolación: **p=polyfit(x,y,n).** Si se quiere la interpolación en ciertos valores 'xi'**: yi=polyval(p,xi).**
  - **yi = interp1(x,Y,xi,metodo).** Métodos: **'linear**' (interpolación lineal), **'cubic'** (cúbica), **'spline (**spline cúbica)

- **2D:**
  - **matriz_Z=interp2(X,Y,Z,matriz_X,matriz_Y,metodo).** Métodos: **'bilinear' (**interpolación lineal), **'bicubic'** (cúbica)

Análisis numérico

Integración

- **1D: quad, quadl**: integran una función en un intervalo [a,b]

  quad(‘funcion’,a,b)

- **2D: dblquad**: integran una función en un intervalo [xmin,xmax]x[ymin,ymax]

  dblquad('y*sin(x)+x*cos(y)',xmin,xmax,ymin,ymax)

Análisis numérico

Resolución de ecuaciones diferenciales

- Resolución de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs)

- [T,Y]=solver('F',tspan,Y0)
  - **solver:** algoritmo de resolución de ODEs, ode45, ode23, ode113, ode15s,ode23s.
  - **F:** función que contiene las ecuaciones diferenciales en forma matricial
  - **Tspan:** vector de tiempos [t0 tfinal] de integración.
  - **Y0:** vector columna de condiciones iniciales en t0

Práctica 1. Resolución de ecuaciones

Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Mª Luz Muñoz Ruiz
José Manuel González Vida

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Consideremos la función $f(x) = 2x - 5\cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

(a) Dibujar la gráfica de la función en ese intervalo usando el comando `plot` y el comando `fplot`.

(b) Aproximar la raíz de f en $[-\pi, \pi]$ utilizando el método de Newton y el comando `fzero`.

Práctica 2. Interpolación y aproximación polinómica. Derivación e integración numérica

Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Mª Luz Muñoz Ruiz
José Manuel González Vida

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

La siguiente tabla recoge la temperatura a distintas distancias de uno de los extremos de un conducto de metal de 4 metros de longitud:

x_i	0	1	2	3	4
$T(x_i)$	50	48	44	38	30

(a) Calcular el polinomio de interpolación correspondiente a los datos de la tabla.

(b) Calcular el polinomio de aproximación mínimo-cuadrática de grado uno correspondiente a los datos de la tabla.

(c) Dibujar en una misma gráfica los puntos de la tabla y las gráficas de los polinomios obtenidos en los apartados anteriores.

(d) Aproximar $T'(2)$ usando la fórmula de derivación centrada de dos puntos.

(e) La temperatura media del conducto viene dada por $\frac{1}{4}\int_0^4 T(x)\,dx$. Aproximarla usando el polinomio de interpolación obtenido en el apartado (a), y a continuación, usando el polinomio de aproximación obtenido en el apartado (b).

(f) Aproximar también la temperatura media usando la fórmula del trapecio. Tanto la última aproximación obtenida en el apartado anterior como la obtenida en éste se basan en la utilización de un polinomio de grado uno: justificar cuál de las dos ofrece *a priori* una mejor aproximación.