

TEMA 1

CAMPO ELECTROSTÁTICO

1.- Concepto de Campo. Campo de fuerzas

Si en una región del espacio existe una magnitud física definida en cada uno de sus puntos, la *función que asocia a cada punto el valor que la magnitud toma en él* recibe el nombre de **Campo**.

Supongamos una habitación que tiene una estufa en un lugar determinado. Si midiéramos la temperatura estacionaria en diferentes puntos de ella encontraríamos, en general, valores diferentes (las regiones más próximas a la estufa tendrían temperaturas más altas que las más alejadas). Si a cada punto de la habitación le asignamos la temperatura a la que se encuentra, la habitación constituye un Campo de temperaturas.

Imaginemos un recipiente grande que contiene agua. Diferentes puntos del recipiente tendrán diferente presión (los más próximos al fondo tendrán mayor presión que los más próximos a la superficie). La asociación de la presión a cada punto del recipiente constituye un Campo de presiones.

Igualmente, los diferentes puntos de una montaña se encuentran a diferente altura sobre el nivel del mar. Si a cada punto de la montaña le asignamos la altura a la que se encuentra, tendremos un campo de alturas. En todos los ejemplos que hemos puesto hasta ahora, la *magnitud física* que hemos *asociado a cada punto era una magnitud escalar*, razón por la cual el campo correspondiente recibe el nombre de **campo escalar**. *Si a cada punto le asociamos una magnitud vectorial*, el campo correspondiente es un **campo vectorial**.

Supongamos un río que discurre por su cauce. En distintos puntos del mismo la velocidad del agua será, en general, diferente. Si a cada punto le asociamos la velocidad, tendremos un Campo de velocidades, ejemplo característico de campo vectorial. Un cuerpo situado en los alrededores de la Tierra se encuentra sometido a una cierta fuerza. Si a cada punto de los que rodean a la Tierra le asignamos la fuerza que en él experimenta un determinado cuerpo patrón, tendremos un campo de fuerzas.

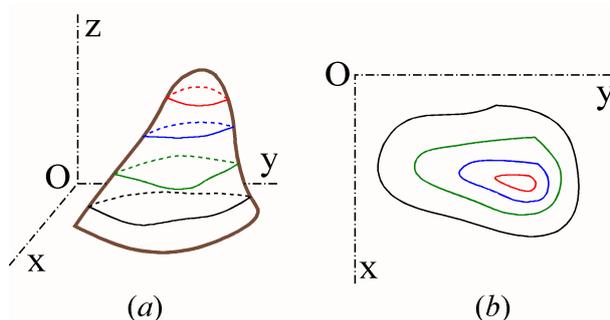


Figura 1

Para visualizar cómo varía la magnitud asociada a cada punto en la región en la que está definida, se recurre a representar los campos gráficamente. Veamos en primer lugar cómo se representan los campos escalares. Consideremos el campo de alturas en una montaña; la forma más sencilla de ver cómo varía la altura es unir, mediante una línea, todos los puntos de la montaña que se encuentran a la misma altura (Figura 1a): tendremos así un conjunto de curvas situadas espacialmente. Proyectando estas curvas sobre el plano XOY, tendremos representadas las conocidas curvas de nivel (Figura 1b).

Observemos que las curvas de nivel suministran rápidamente información: hacia la izquierda las curvas están más espaciadas que hacia la derecha, lo que indica que la montaña tiene menor pendiente por la izquierda

que por la derecha.

Consideremos ahora el ejemplo del campo de presiones definido en un recipiente con agua: cada plano paralelo a la base del recipiente es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a idéntica presión (Figura 2a). La proyección de estos planos horizontales sobre un plano vertical da lugar a un conjunto de rectas paralelas de igual presión (Figura 2b): son las líneas isóbaras.

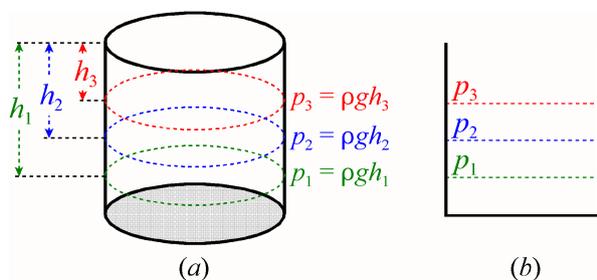


Figura 2

En general, los campos escalares se representan gráficamente mediante *superficies en las que el escalar toma idéntico valor (isosuperficies)* o bien mediante *isolíneas*, que son las que *resultan de proyectar las isosuperficies sobre un plano*.

La forma más frecuente de representar gráficamente un campo vectorial es dibujar las **líneas de campo**. Dichas líneas se dibujan de forma que *el vector que caracteriza al campo vectorial sea tangente a ellas en cada uno de sus puntos*. En caso de los campos de fuerza, las líneas de campo suelen llamarse líneas de fuerza. En la figura 3 hemos representado las líneas de campo del campo de velocidades en la superficie de un río.

Supongamos una partícula pequeña, cargada eléctricamente. Si en sus proximidades existe otra partícula cargada, se puede comprobar que entre ambas existe una fuerza de interacción, cuya dirección es la de la recta que une ambas partículas. También resulta útil estudiar las interacciones eléctricas basándose en el hecho de que una partícula cargada crea un campo eléctrico y que cualquier otra partícula interacciona con la primera a través del campo eléctrico existente.

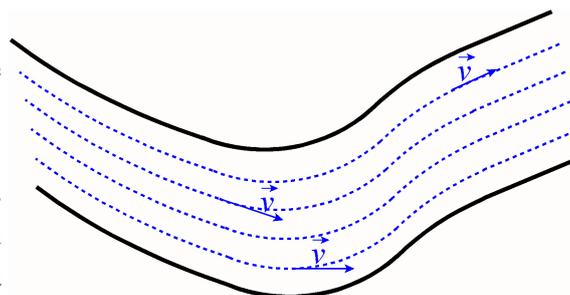


Figura 3

2.- Carga eléctrica. Electrización por inducción y por contacto

Las observaciones sobre la atracción eléctrica se remontan a la Grecia antigua. Thales de Mileto observó que cuando se frotaba el ámbar (elektrón), atraía pequeños objetos tales como plumas o pajitas. Confundió esta atracción con la atracción magnética del hierro por la piedra imán (magnetita).

En el siglo XVI, Gilbert estudió sistemáticamente los efectos eléctricos (aparentemente, no detectó la repulsión eléctrica) y magnéticos (descubrió que la Tierra es un inmenso imán, con su polo Norte y su polo Sur). Fue el primero que entendió claramente la diferencia entre la atracción eléctrica y magnética e introdujo los conceptos de fuerza eléctrica, atracción eléctrica y polo magnético.

Alrededor de 1729, el inglés Stephen Gray descubrió que la atracción y la repulsión eléctrica puede transferirse de un cuerpo a otro si se conectan mediante determinadas sustancias, especialmente metales (así pues, no solamente frotando puede electrizarse un cuerpo). Charles François du Fay (1698-1739) observó que una varilla de vidrio, previamente frotada, atraía a una laminilla de oro. Si se ponían en contacto, entonces se repelían. Pero la laminilla de oro era atraída por otras sustancias previamente electrificadas como el ámbar o

la resina. Por ello, sugirió la existencia de dos tipos de electricidad: la *vítrea* y la *resinosa*.

En 1747, Benjamín Franklin propuso que todo cuerpo tiene una cantidad de electricidad *normal*. Cuando un cuerpo se frota contra otro, parte de la electricidad se transfiere de uno a otro, con lo que uno de ellos tendrá un exceso de electricidad y el otro un defecto de la misma igual al exceso del primero, pudiendo escribirse el exceso con un *más* y el defecto con un *menos* (Hoy sabemos que lo que se transfieren son electrones y, por tanto, al exceso lo caracterizamos con un *menos* y el defecto con un *más*).

- Electrización por inducción.- En la figura 4a pueden observarse dos esferas, inicialmente en estado neutro, suspendidas y en contacto directo. Debido a la presencia de una varilla cargada, adquieren cargas opuestas sobre cada extremo. Si las esferas son separadas y la varilla retirada, cada esfera retiene su carga: la carga neta de las dos esferas es cero, pero hemos sido capaces de aislar las cargas positivas en una esfera y las negativas en la otra.

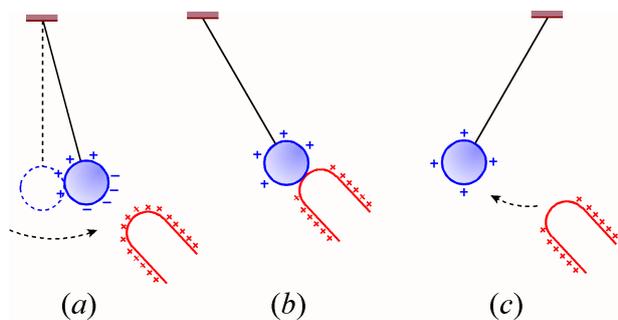


Figura 5

Electrización de una esfera por contacto con una varilla cargada

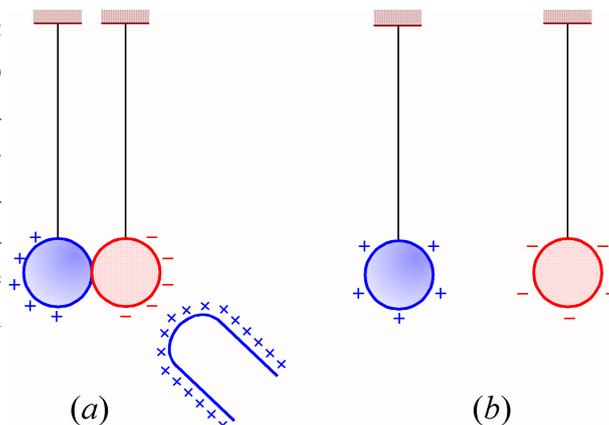


Figura 4. Se puede colocar una carga neta sobre un cuerpo, sin que exista contacto, mediante inducción electrostática. (a) Cuando un cuerpo cargado se acerca a uno neutro, la cara próxima adquiere carga opuesta. (b) Si se separan las esferas y se retira la varilla cargada, cada esfera conserva su carga. Evidentemente, la suma total de cargas es cero.

- Electrización por contacto.- Si una varilla de vidrio cargada positivamente se acerca a una esfera metálica suspendida de un hilo no conductor, los electrones de la esfera próximos a la varilla son atraídos a la superficie, dejando la zona opuesta con un exceso de carga positiva (es la inducción electrostática). Si ponemos en contacto la varilla y la esfera (Figura 5b), las cargas negativas de la esfera son neutralizadas por algunas de las cargas positivas de la varilla, con lo que la esfera quedará cargada positivamente (por el contacto con la varilla) y será repelida por la varilla (Figura 5c).

3.- El experimento de la cubeta de hielo de Faraday. Conservación de la carga

Las experiencias relatadas en el epígrafe anterior (incluidas las de Benjamín Franklin) demuestran que la carga total se conserva. La presencia de carga se midió cuantitativamente por medio de un electroscopio, que consta de dos hojas laminares metálicas unidas. Cuando adquirían carga, la repulsión mutua originaba que las hojas se separaran.

En el año 1843, Michael Faraday utilizó un electroscopio para realizar el sencillo, pero ilustrativo, experimento de la *cubeta de hielo* mostrado en la figura 6. Cuando un cuerpo conductor cargado se introduce en el interior de un conductor cerrado y aislado, aparece una cantidad igual de carga en el exterior del conductor, como lo evidencia el hecho de que se separen las hojas del electroscopio (Figura 6b). Si se retira el cuerpo

cargado, la carga en el interior y en el exterior cae súbitamente a cero y la situación vuelve a ser la de la figura 6a. Sin embargo, si el cuerpo cargado se pone en contacto con la pared interior (Figura 6c), el cuerpo se descarga (al ser neutralizadas sus cargas positivas con las negativas de la pared interior) y el conductor queda cargado con carga positiva (carga por contacto). Al retirar el cuerpo inicialmente cargado (Figura 6d), el electroscopio seguirá con sus hojas separadas mostrando la existencia de carga en el conductor. Si este proceso se repite, la carga sobre el conductor (que era una cubeta de hielo cuando Faraday realizó el experimento) puede acumularse indefinidamente. Éste es el principio de los generadores electrostáticos, donde grandes cantidades de carga son almacenadas por el continuo depósito de pequeñas cantidades de carga. Esta gran acumulación de carga da lugar a una gran fuerza sobre cualquier otra carga próxima, razón por la que los generadores electrostáticos se han utilizado para acelerar partículas cargadas a velocidades muy altas.

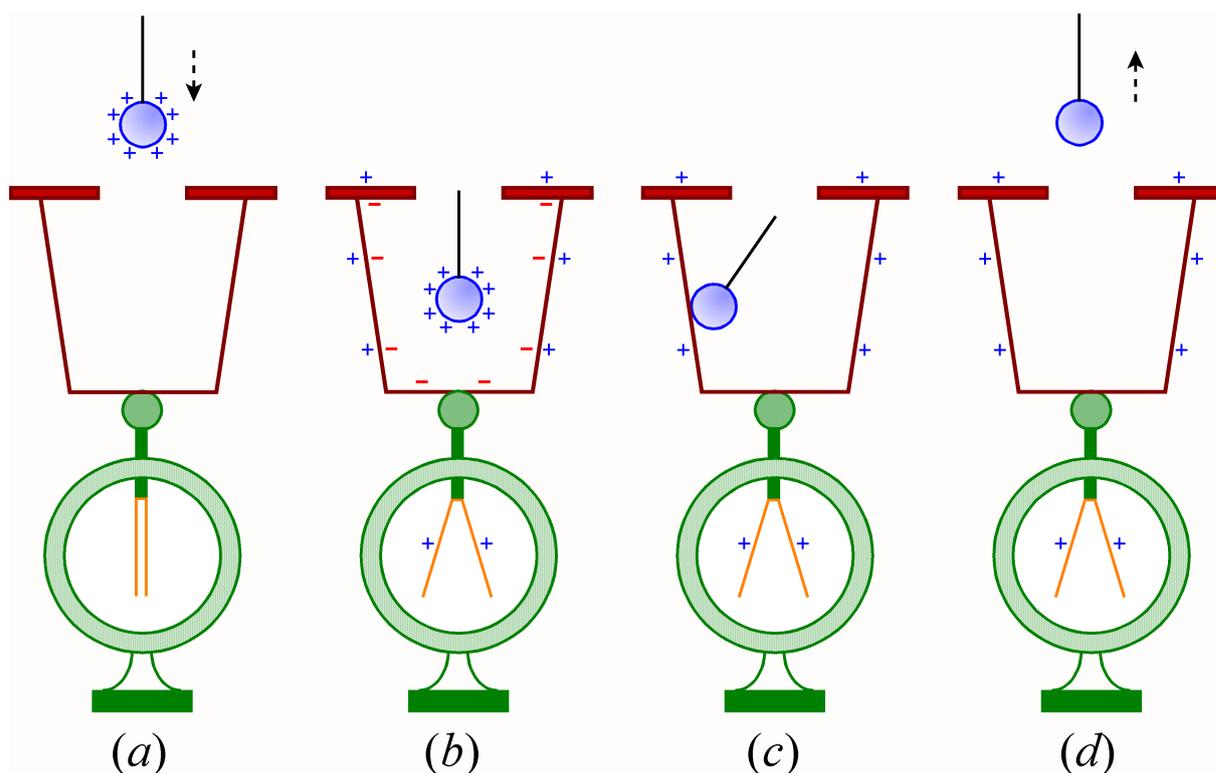


Figura 6. Faraday fue el primero en demostrar el principio de conservación de la carga utilizando un electroscopio y una cubeta de hielo inicialmente descargada

4.- El experimento de Millikan. Cuantización de la carga

Robert A. Millikan (1868-1953) midió la carga del electrón en su famoso experimento de la gota de aceite dando, además, evidencia convincente de que el electrón era parte constitutiva de los átomos.

En su experimento, Millikan dejaba caer gotitas de aceite mineral entre dos placas conductoras y paralelas (Figura 7). Ajustó el valor del campo eléctrico entre las placas hasta que la gotita quedó suspendida en el espacio; en ese momento, el peso de la gotita quedaba exactamente equilibrado por la fuerza eléctrica. A partir de

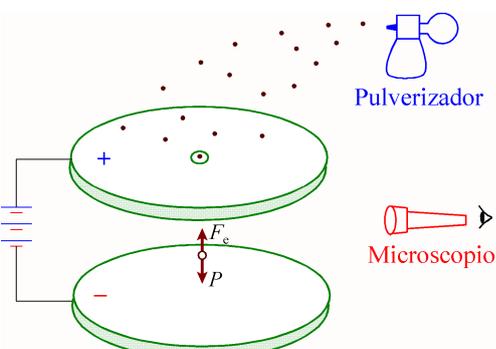


Figura 7. Experimento de Millikan

esta igualdad de fuerzas, Millikan encontró que la carga de cada gota era un múltiplo muy pequeño y entero de $1,6 \cdot 10^{-19}$ C y nunca observó un valor más pequeño que éste. La carga de la gota era unas veces positiva y otra negativa, lo que indicaba que la gota había perdido o ganado electrones, respectivamente (presumiblemente, por frotamiento al ser emitida por el pulverizador). Millikan interpretó que su experimento entrañaba que la menor carga que se puede encontrar en la naturaleza es $1,6 \cdot 10^{-19}$ C, carga que designó por e y que, en forma negativa, atribuyó al electrón. Como además, la carga de la gota era siempre un múltiplo de e , llegó a la conclusión de que *la carga está cuantizada, siendo la del electrón el cuanto elemental*.

5.- Ley de Coulomb

Charles Augustin Coulomb (1736-1806) midió por primera vez, en 1785, las atracciones y repulsiones eléctricas en forma cuantitativa y enunció la ley que las rige. Para ello, utilizó una balanza de torsión (Figura 8), dispositivo que, con algunas modificaciones, fue usado más tarde por Cavendish para medir las atracciones gravitatorias y determinar el valor de la constante de gravitación universal.

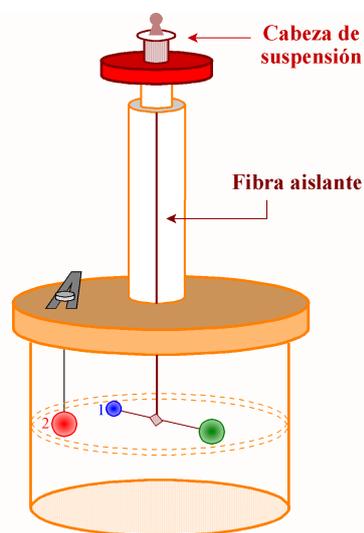


Figura 8. Balanza de torsión de Coulomb

Si se cargan las esferas 1 y 2 de la figura 8, la fuerza eléctrica sobre 1 tenderá a torcer la fibra de suspensión. Coulomb contrarrestó este efecto de torsión girando la cabeza de suspensión un ángulo θ , necesario para mantener las cargas a la distancia que le interesaba: dicho ángulo es, pues, una medida relativa de la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga de 1. Los primeros resultados experimentales de Coulomb pueden representarse así:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

donde F es la magnitud de la fuerza eléctrica que actúa sobre cada una de las dos cargas y r es la distancia que las separa. Estas fuerzas, según el principio de acción y reacción de Newton, actúan en la recta que une las cargas, son de igual módulo y de sentidos opuestos.

Coulomb también estudió cómo variaba la fuerza eléctrica con el valor relativo de las cargas existentes en las esferas de su balanza de torsión. Siguiendo la técnica de electrización por contacto, amplió la relación de la inversa de los cuadrados a

$$F \propto \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Actualmente, la **ley de Coulomb** se enuncia así: *La fuerza de interacción entre dos cargas puntuales en reposo tiene la dirección de la recta que une las cargas y es directamente proporcional al producto de las mismas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa*. Matemáticamente, si llamamos \vec{u}_{12} a un vector unitario en la dirección de la recta que une las cargas, orientado hacia q_2 (Figura 9), \vec{u}_{21} a su opuesto, \vec{F}_2 a la fuerza que actúa sobre q_2 y \vec{F}_1 a la que actúa sobre q_1 , tendremos:

$$\vec{F}_1 = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{21} \quad [1.1]$$

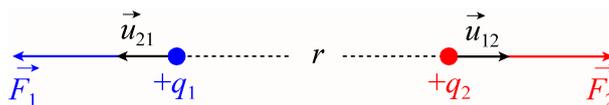


Figura 9

$$\vec{F}_2 = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} = -\vec{F}_1 \quad [1.2]$$

$$F = F_1 = F_2 = k_0 \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad [1.3]$$

La ley de Coulomb presenta varias restricciones contenidas en su propio enunciado y formulación:

1º) Sólo es aplicable a cargas puntuales, es decir, a cuerpos cargados cuyos tamaños sean mucho menores que la distancia que los separa.

2º) Dichas cargas han de estar en reposo.

3º) La formulación matemática dada sólo es aplicable en el vacío.

Para racionalizar las fórmulas, es costumbre escribir la constante de proporcionalidad k_0 (el subíndice *cero* hace referencia al vacío) como

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad [1.4]$$

donde ϵ_0 es una constante denominada **permitividad dieléctrica del vacío**.

Hemos introducido una nueva magnitud, la carga, y por tanto hemos de hablar de sus unidades. Asimismo, tenemos que determinar el valor de k_0 . Tenemos dos opciones:

1ª) Asignar un valor arbitrario a k_0 y, en función de él, definir la unidad de carga.

2ª) Definir arbitrariamente la unidad de carga y, en función de ella, determinar el valor de k_0 .

El primer camino es el que se sigue en el sistema electrostático de unidades y el segundo en el sistema Internacional.

En el sistema electrostático de unidades (que no es más que el CGS ampliado), se asigna a k_0 el valor arbitrario 1 (sin unidades). Así pues

$$\text{S.E.E. : } k_0 = 1 \quad [1.5]$$

La unidad de carga de dicho sistema recibe el nombre de **franklin**, definida por la ley de Coulomb como *la carga que, situada en el vacío a una distancia de un centímetro de otra idéntica, interacciona con ella con una fuerza de una dina*. Así pues:

$$\text{dina} = \frac{fk \cdot fk}{\text{cm}^2} \quad \Rightarrow \quad fk = \text{cm} \sqrt{\text{dina}} \quad [1.6]$$

En el Sistema Internacional de unidades, como dijimos anteriormente, se define arbitrariamente la unidad

de carga. Desgraciadamente, aún no estamos en condiciones de definir dicha unidad (lo haremos en un tema posterior) y, por ahora, nos conformaremos con su nombre: **culombio**. Situando en el vacío dos cargas de 1 culombio, separadas una distancia de 1 metro y midiendo la fuerza con que interaccionan, podemos averiguar el valor de k_0 en el Sistema Internacional. Dicho valor resulta ser:

$$\text{S.I. : } k_0 = 8,9875 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \quad [1.7]$$

De la fórmula [1.4] podemos deducir el valor de ϵ_0 en ambos sistemas de unidades.

$$\text{S.E.E.: } \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \quad [1.8]$$

$$\text{S.I.: } \epsilon_0 = 8,85418 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad [1.9]$$

Vamos a determinar ahora la equivalencia entre ambas unidades de carga, para lo que nos basaremos en el valor que toma k_0 en ambos sistemas de unidades.

$$\left. \begin{cases} k_0 = 1 \\ k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \end{cases} \right\} \Rightarrow 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \approx 1 \Rightarrow 1 \text{ C} \approx \sqrt{9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 10^9 \cancel{\text{N}} \times 10^5 \frac{\text{dinas}}{\cancel{\text{N}}} \cancel{\text{m}^2} \times 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\cancel{\text{m}^2}}} = \sqrt{9 \cdot 10^{18} \text{ dinas cm}^2} = 3 \cdot 10^9 \text{ cm} \sqrt{\text{dina}} = 3 \cdot 10^9 \text{ fk}$$

$$1 \text{ C} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ fk} \quad [1.10]$$

Digamos para finalizar que el aire se comporta, desde el punto de vista electrostático, prácticamente igual que el vacío (sus permitividades dieléctricas son muy similares) por lo que la tercera restricción de la ley de Coulomb debe quedar así:

3º) La formulación matemática dada sólo es aplicable al vacío y al aire.

6.- Campo eléctrico

Definimos campo eléctrico como *cualquier región del espacio en la que una carga eléctrica experimenta una fuerza eléctrica, que, evidentemente, se debe a la presencia en dicha región de, al menos, otra carga.*

Definimos **intensidad de campo eléctrico** (\vec{E}) en un punto de la región (o **campo eléctrico**, sin más) como la *fuerza que el campo ejercería sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto* (lo que es equivalente a decir "la opuesta de la fuerza que el campo ejercería sobre la unidad de carga negativa situada en dicho punto"). Matemáticamente

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \quad [1.11]$$

donde admitimos que la presencia de q' (llamada carga-testigo o carga-prueba) no modifica la distribución original de la carga o cargas creadoras del campo. En la práctica, esto es cierto si q' es de valor tan pequeño que su influencia es despreciable. Por ello, podríamos formular con más rigor la ecuación [1.11] en la forma

$$\vec{E} = \lim_{q' \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q'} \quad [1.11bis]$$

De la formulación matemática de la intensidad de campo deducimos que los vectores intensidad de campo y fuerza son de la misma dirección y sentido si la carga-testigo es positiva y de sentidos opuestos si dicha carga-testigo es negativa.

7.- Campo eléctrico creado por una carga puntual. Líneas de Campo

Si el **campo eléctrico** está **creado por una única carga puntual**, la aplicación simultánea de la ley de Coulomb y de la ecuación [1.11] nos lleva a:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = k_0 \frac{q q'}{r^2 q'} \vec{u}_r = k_0 \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad [1.12]$$

donde \vec{u}_r es un vector unitario cuya dirección es la de la recta que une la carga creadora del Campo q con el punto en el que se evalúa la intensidad de Campo y cuyo sentido es "hacia afuera".

La presencia de un Campo eléctrico en una región puede indicarse fácilmente dibujando las llamadas líneas de fuerza o **líneas de Campo**, que son líneas imaginarias que tienen la propiedad de que *el vector Campo es tangente a ellas en cada uno de sus puntos*. Para obtener estas líneas de Campo se utilizan, además, las siguientes reglas:

- * El número de líneas de Campo que atraviesan la unidad de superficie situada perpendicularmente a ellas (**densidad de líneas de Campo**) es proporcional al valor del Campo en la región. Consecuentemente, el Campo es intenso cuando las líneas están muy próximas entre sí y débil si están muy separadas.
- * Las líneas de Campo se dibujan siempre saliendo de las cargas positivas (manantiales de líneas de Campo) y entrando en las negativas (sumideros de líneas de Campo). Es una consecuencia obvia del hecho de que el vector \vec{E} es tangente a ellas en cada punto.
- * El número de líneas de Campo que se dibujen saliendo de un manantial o entrando en un sumidero es proporcional al valor de la carga.
- * No pueden cortarse 2 líneas de Campo en un punto en el que no exista carga, pues ello supondría la existencia en dicho punto de 2 vectores Campo diferentes.

Esta representación del Campo eléctrico es absolutamente coherente con la Ley de Coulomb. En efecto, consideremos una superficie esférica de radio r en cuyo centro haya una carga puntual. En cualquier punto de dicha superficie el Campo tiene el mismo valor. El número de líneas de Campo que salen (si $q > 0$) o llegan (si $q < 0$) a la carga deben atravesar la superficie esférica, por lo que la densidad de líneas será $N/S = N/4\pi r^2$. Como la intensidad de Campo es proporcional a la densidad de líneas, $E = CN/S = CN/4\pi r^2 = C'/r^2$, y ésta es, precisamente, la ley de Coulomb.

En la figura 10 pueden observarse las líneas de Campo cuando el Campo lo crea una carga puntual positiva (Figura 10a), una carga puntual negativa (Figura 10b) y las correspondientes a un Campo uniforme (Figura 10c) como el que existe entre las placas de un condensador. Nótese que en este último caso, de acuerdo con las propiedades enunciadas para las líneas de Campo, las líneas son paralelas y equiespaciadas.

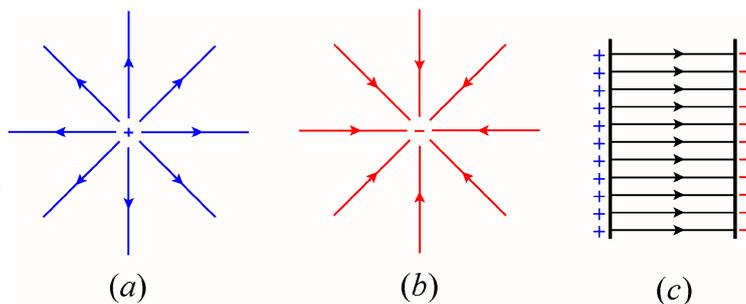


Figura 10

El modelo de las líneas de Campo presenta tres inconvenientes destacables:

1º) Pueden hacernos creer que las líneas de Campo son algo material y ello es absolutamente falso: constituyen, sólo, un artificio para dar una descripción cualitativa del Campo eléctrico.

2º) El hecho de que sólo se dibujen algunas líneas puede hacernos pensar que el campo está cuantizado y que sólo actúa en determinadas direcciones, lo cual también es falso. El Campo es continuo y existe en todo punto.

3º) Puesto que los dibujos son bidimensionales, podemos perder la perspectiva espacial del campo eléctrico.

8.- Principio de superposición

¿Qué ocurre si el Campo eléctrico está creado por más de una carga puntual o por una distribución continua de ellas (como ocurre en la figura 10c)? La respuesta está en el llamado **principio de superposición** (de carácter empírico) que, literalmente, dice: *La fuerza con que interaccionan 2 cargas no se ve alterada por la presencia de una tercera carga*. Como consecuencia, la fuerza neta que recibe una carga puntual cuando se introduce en un Campo creado por n cargas puntuales será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad [1.13]$$

donde \vec{F}_i es la fuerza que la carga i -ésima ejerce sobre ella como si dicha carga i -ésima fuese la única que existiera. De la ecuación [1.13] y de la definición de intensidad de campo, deducimos que el Campo total creado en un punto por n cargas puntuales es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad [1.14]$$

En la figura 11 podemos apreciar las líneas de campo del campo creado por dos cargas opuestas (Figura 11a) y por dos cargas de distinto signo y diferente valor absoluto (Figura 11b).

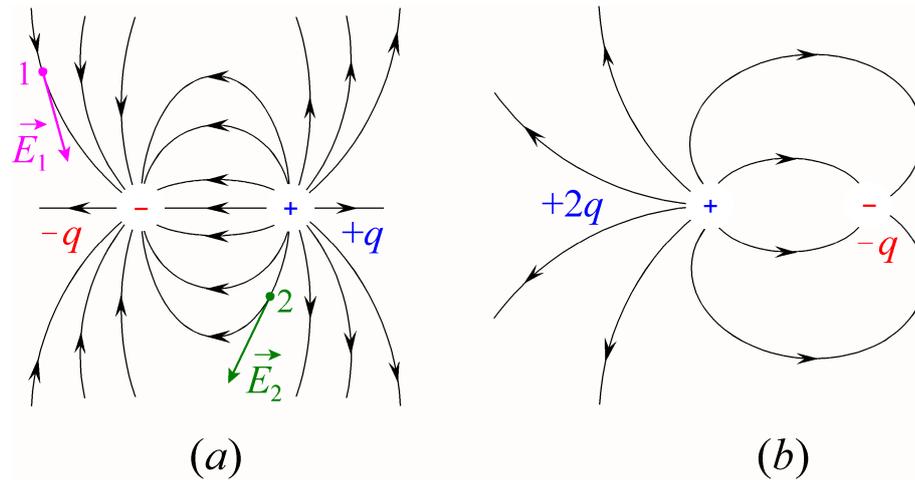


Figura 11

El principio de superposición no sólo se aplica a la fuerza y al campo, magnitudes como el trabajo, el flujo, la energía potencial electrostática y el potencial eléctrico también lo cumplen

9.- Campo eléctrico creado por distribuciones continuas de carga

Si la distribución de carga es continua, el campo que se produce en un punto P cualquiera se puede calcular dividiendo la carga en elementos infinitesimales dq . El campo que produce cada elemento de carga $d\vec{E}$ se calcula tratándolo como si fuese una carga puntual, es decir,

$$d\vec{E} = k_0 \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r \quad [1.15]$$

donde r es la distancia de dq al punto P (Figura 12). Por tanto, el campo total creado por la distribución será

$$\vec{E} = k_0 \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r \quad [1.16]$$

Si la distribución de carga es espacial, definimos la densidad cúbica de carga como

$$\rho = dq/d\vartheta \quad [1.17]$$

siendo dq la carga existente en el volumen $d\vartheta$. De la ecuación anterior,

$$dq = \rho d\vartheta \quad [1.18]$$

Si la distribución de carga es superficial (como en las armaduras de un condensador), definimos la densidad superficial de carga, σ , como

$$\sigma = dq/dS \quad [1.19]$$

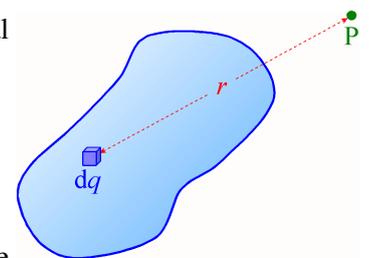


Figura 12

donde dq es la carga existente en la superficie dS . De la ecuación anterior,

$$dq = \sigma dS \quad [1.20]$$

Si la distribución de carga es lineal (como, por ejemplo, un alambre muy fino cargado), definimos la densidad lineal de carga, λ , como

$$\lambda = dq/d\ell \quad [1.21]$$

siendo dq la carga existente en una longitud $d\ell$. De la ecuación anterior,

$$dq = \lambda d\ell \quad [1.22]$$

Si las distribuciones de carga son homogéneas, es decir, si la densidad de carga de la distribución es constante, la ecuación [1.16] se transforma en

$$\text{- Distribución cúbica: } \vec{E} = \left(k_0 \rho \int_{\vartheta} \frac{d\vartheta}{r^2} \right) \vec{u}_r \quad [1.23]$$

$$\text{- Distribución superficial: } \vec{E} = \left(k_0 \sigma \int_s \frac{dS}{r^2} \right) \vec{u}_r \quad [1.24]$$

$$\text{- Distribución lineal: } \vec{E} = \left(k_0 \lambda \int_{\ell} \frac{d\ell}{r^2} \right) \vec{u}_r \quad [1.25]$$

Veamos ahora cómo se aplican las ecuaciones anteriores a casos prácticos concretos:

10.- Campo creado por una distribución lineal uniforme de carga de longitud ℓ

Como la carga está uniformemente distribuida, tendremos una densidad lineal de carga λ . Y supongamos que tenemos que calcular el campo eléctrico en un punto P que está situado a una distancia a de la distribución de carga, como se indica en la figura 13.

Tomaremos una carga elemental $dq = \lambda dx$, y descompondremos el vector $d\vec{E}$ en sus componentes cartesianas, tomando el eje X paralelo a la distribución lineal (y el eje Y perpendicular a ella).

$$d\vec{E}_x = -dE \sin \theta \vec{i} = -k_0 \frac{\lambda dx}{r^2} \sin \theta \vec{i}$$

$$d\vec{E}_y = dE \cos \theta \vec{j} = k_0 \frac{\lambda dx}{r^2} \cos \theta \vec{j}$$

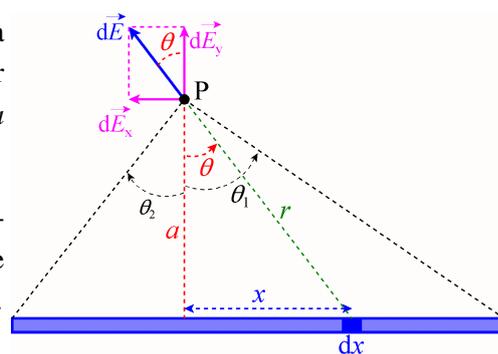


Figura 13

Puesto que tenemos tres variables (x , r y θ), escribiremos todas ellas en función de θ .

$$x = a \operatorname{tg} \theta \rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \quad * \quad r = \frac{a}{\cos \theta}$$

Sustituyendo en las expresiones de $d\vec{E}_x$ y $d\vec{E}_y$, tenemos,

$$d\vec{E}_x = - \left(k_0 \frac{\lambda \cancel{\cos^2 \theta} \operatorname{sen} \theta d\theta}{a \cancel{\cos^2 \theta}} \right) \vec{i} = - \left(k_0 \frac{\lambda}{a} \operatorname{sen} \theta d\theta \right) \vec{i}$$

$$d\vec{E}_y = \left(k_0 \frac{\lambda \cancel{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta}{a \cancel{\cos^2 \theta}} \right) \vec{j} = \left(k_0 \frac{\lambda}{a} \cos \theta d\theta \right) \vec{j}$$

Para obtener \vec{E}_x y \vec{E}_y , integramos las expresiones anteriores entre los límites de θ , es decir entre $\theta = -\theta_2$ y $\theta = \theta_1$.

$$\vec{E}_x = \left(\int_{-\theta_2}^{\theta_1} -k_0 \frac{\lambda}{a} \operatorname{sen} \theta d\theta \right) \vec{i} = \left(k_0 \frac{\lambda}{a} [\cos \theta]_{-\theta_2}^{\theta_1} \right) \vec{i} = k_0 \frac{\lambda}{a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{i}$$

donde hemos tenido en cuenta la relación trigonométrica: $\cos(-\theta_2) = \cos \theta_2$.

$$\vec{E}_y = \left(\int_{-\theta_2}^{\theta_1} k_0 \frac{\lambda}{a} \cos \theta d\theta \right) \vec{j} = \left(k_0 \frac{\lambda}{a} [\operatorname{sen} \theta]_{-\theta_2}^{\theta_1} \right) \vec{j} = k_0 \frac{\lambda}{a} (\operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2) \vec{j}$$

donde, en este caso, hemos tenido en cuenta la relación trigonométrica: $\operatorname{sen}(-\theta_2) = -\operatorname{sen} \theta_2$.

Por tanto, el campo eléctrico en el punto P, debido a la distribución lineal de carga finita será:

$$\vec{E} = k_0 \frac{\lambda}{a} \left[(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{i} + (\operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2) \vec{j} \right] \quad [1.26]$$

Si la distribución de carga es indefinida (longitud infinita), $\theta_2 \approx \theta_1 \approx \pi/2$, con lo que

$$\vec{E} = 2k_0 \frac{\lambda}{a} \vec{j} \quad [1.27]$$

es decir, el campo es perpendicular al conductor.

Si la distribución lineal de carga es finita y el punto P pertenece a la recta sobre la que se apoya la distribución y suponemos que se encuentra a la derecha de la misma, es fácil demostrar que

$$\vec{E} = k_0 \frac{Q}{d(d+\ell)} \vec{i} \quad [1.28]$$

siendo, en este caso, d la distancia del punto al extremo más cercano del conductor.

11.- Campo creado por un anillo de carga uniforme en un punto de su eje

Sea Q la carga total del anillo (uniformemente distribuida), R su radio y a la distancia del punto P al centro del anillo (Figura 14).

Debido a la simetría, el campo resultante sólo tiene coordenada x , ya que el elemento situado al otro extremo del diámetro produce en P un campo cuya coordenada y anula a la anterior. Así pues, sólo hay que sumar las coordenadas x .

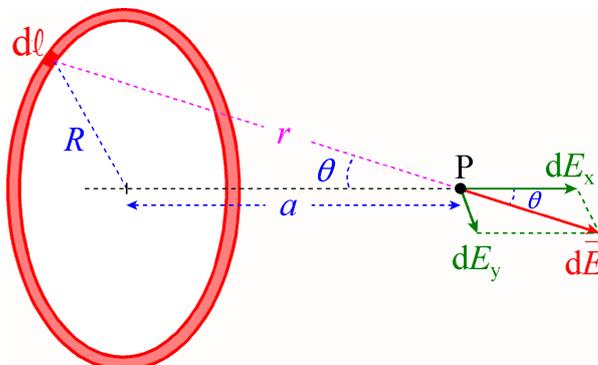


Figura 14

$$dE_x = dE \cos \theta = k_0 \frac{\lambda d\ell}{r^2} \cos \theta$$

Aunque r y θ son variables, varían para cada punto y no dependen de ℓ . Así pues

$$E_x = \oint dE_x = k_0 \frac{\lambda \cos \theta}{r^2} \int_0^{2\pi R} d\ell = k_0 \frac{\lambda 2\pi R}{r^2} \cos \theta$$

y teniendo en cuenta que $r^2 = R^2 + a^2$, que $\cos \theta = a/r$ y que $Q = \lambda 2\pi R$ llegamos a:

$$E_x = \frac{k_0 Q}{(R^2 + a^2)} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = k_0 \frac{Qa}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}$$

Por tanto, el vector Campo eléctrico será, finalmente, igual a:

$$\vec{E} = k_0 \frac{Qa}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \vec{i} \quad [1.29]$$

Si $a = 0$ (centro de la espira), $\vec{E}_c = 0$ [1.30]

Si a es muy grande comparada con R , $(R^2 + a^2)^{3/2} = \sqrt{(R^2 + a^2)^3} \approx \sqrt{(a^2)^3} = a^3$, con lo que

$$\vec{E}_{a \gg R} \approx k_0 \frac{Q}{a^2} \vec{i} \quad [1.31]$$

es decir, igual al campo creado por una carga puntual igual a la del anillo y situada en su centro (como era de esperar, ya que si $a \gg R$, las dimensiones del anillo son despreciables y el anillo se comporta como una carga puntual).

12.- Integral de superficie. Flujo

Consideremos un campo eléctrico uniforme en una cierta región del espacio y una superficie de área S perpendicular al campo (Figura 15). Puesto que la densidad de líneas de campo (N/S) es proporcional a la intensidad de campo, evidentemente se cumplirá que

$$N \propto E S \quad [1.32]$$

Al producto de la intensidad de campo uniforme por el área de una superficie perpendicular al mismo se la denomina **flujo** (Φ) del campo a través de dicha superficie.

$$\Phi = E S \quad [1.33]$$

Dada la definición de flujo, se cumple que el número de líneas de campo que atraviesan la superficie es proporcional al flujo a través de dicha superficie. Es decir,

$$N \propto \Phi \quad [1.34]$$

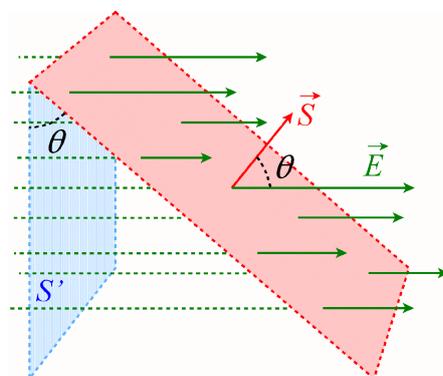


Figura 16

Supongamos ahora que la superficie no es perpendicular al campo, sino que el vector superficie forma con él un ángulo θ (Figura 16). El número de líneas de campo que atraviesan la superficie S es el mismo que las que atraviesan la superficie S' ($S' = S \cos \theta$, S' es la proyección de S sobre un plano perpendicular a las líneas de campo). Por lo explicado anteriormente,

$$N \propto E S' = E S \cos \theta \quad [1.35]$$

Al producto de la intensidad de campo uniforme por el área de una superficie plana cualquiera y por el coseno del ángulo que forman los vectores \vec{E} y \vec{S} (es decir, al producto escalar de \vec{E} por \vec{S} se le denomina flujo del campo a través de dicha superficie.

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad [1.36]$$

Evidentemente, sigue cumpliéndose la ecuación [1.34].

Generalicemos las situaciones anteriores al caso de que la superficie no sea plana, sino curva, y el campo no sea uniforme, de modo que el campo pueda variar en módulo, en dirección o en ambos a la vez (o en ninguno) en los distintos puntos de la superficie. Si elegimos un elemento infinitesimal de superficie dS , podemos considerarlo como una superficie plana en la que la intensidad de campo es constante en todos sus puntos (Figura 17). En estas condiciones, el flujo elemental a través de dicha superficie elemental vendría dado por la ecuación [1.36], es decir,

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [1.37]$$

Para determinar el flujo total a través de toda la superficie, tendremos que sumar todos los flujos elementales (principio de superposición) en forma algebraica (el flujo es un escalar) y extender dicha suma a

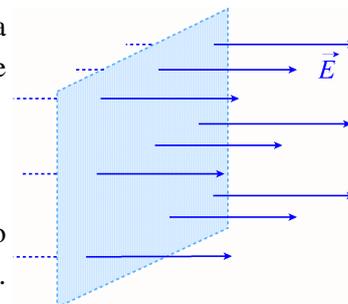


Figura 15

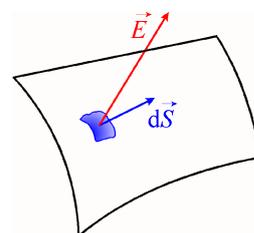


Figura 17

toda la superficie. Dicha extensión supone la introducción de un nuevo tipo de integral: la integral de superficie. Así pues,

$$\Phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [1.38]$$

La ecuación [1.38] constituye la **definición general de flujo**. Como hemos dicho reiteradamente, es una magnitud proporcional al número de líneas que atraviesan la superficie.

La unidad de flujo eléctrico en el Sistema Internacional es $\text{Nm}^2/\text{C} = \text{Jm}/\text{C}$. Cuando hablemos de potencial eléctrico, veremos que $\text{J}/\text{C} = \text{V}$ (Voltio), por lo que el flujo eléctrico también se expresa en Vm .

13.- Ángulo sólido. Ley de Gauss

Un **ángulo sólido** es una *región del espacio comprendida dentro de una superficie cónica*.

Consideremos un casquete esférico de área igual a S (Figura 18). El ángulo sólido subtendido desde el centro de la esfera por dicho casquete se define

$$\Omega = S/r^2 \quad [1.39]$$

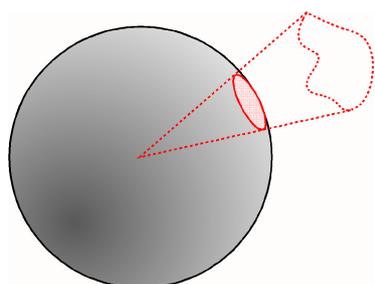


Figura 18

siendo r el radio de la esfera. Si analizamos la ecuación [1.39], comprobaremos que Ω es adimensional. Su unidad, en el Sistema Internacional, es el estereorradián.

Puesto que el área de una esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido total subtendido desde cualquier punto es

$$\Omega = S/r^2 = (4\pi r^2)/r^2 = 4\pi \text{ srad} \quad [1.40]$$

Cuando la superficie es pequeña, S se convierte en dS y no ha de ser necesariamente un casquete esférico (puede ser plana). Si r es perpendicular a la superficie, entonces el ángulo sólido subtendido desde un punto vale (Figura 19)

$$d\Omega = dS/r^2 \quad [1.41]$$

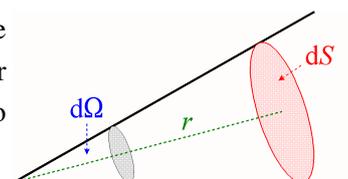


Figura 19

Si el vector $d\vec{S}$ no es paralelo a r , es preciso proyectar la superficie sobre un plano perpendicular a r de forma que r y $d\vec{S}'$ sean paralelos (Figura 20). En esta situación,

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad [1.42]$$

Aunque la ecuación [1.40] la hemos deducido para el caso concreto de una esfera, puede demostrarse (aunque nosotros no lo haremos) que *el ángulo sólido total subtendido desde cualquier punto interior de una superficie cerrada cualquiera vale 4π srad*.

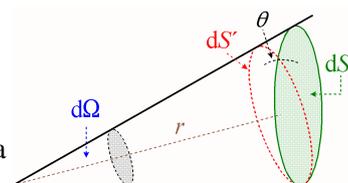


Figura 20

* **Ley de Gauss para el campo eléctrico.**- Supongamos una superficie cerrada cualquiera en cuyo interior se encuentra una carga puntual q (Figura 21). El flujo elemental a través de una superficie elemental será (Ecuación [1.37])

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = k_0 \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{S} = k_0 q \frac{dS \cos \theta}{r^2} = k_0 q d\Omega$$

El flujo a través de toda la superficie será (ecuación [1.38])

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S k_0 q d\Omega = k_0 q \oint_S d\Omega = k_0 q 4\pi$$

Como $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$ nos quedará:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Si en lugar de una sola carga tenemos n cargas, el flujo, según el principio de superposición será

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad [1.43]$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a la carga neta encerrada por la superficie dividida por la permitividad dieléctrica del vacío.

Las cargas exteriores no contribuyen al flujo porque sus líneas de campo siempre atravesarán la superficie un número par de veces, con lo que el número neto de líneas de campo, para las cargas exteriores, será cero (Figura 22).

Si el flujo es negativo, es porque entran más líneas de campo de las que salen y si es positivo es porque salen más que entran (No olvidemos que el flujo es proporcional al número neto de líneas de campo).

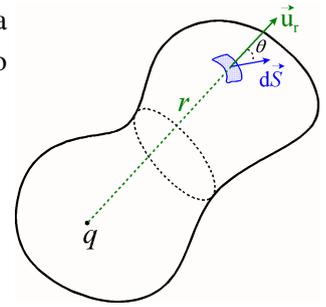


Figura 21

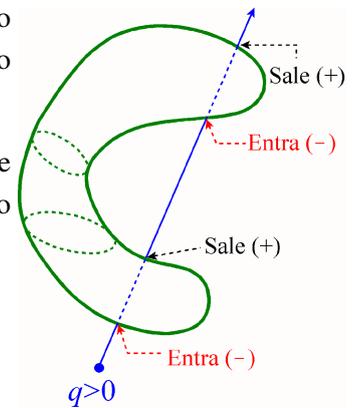


Figura 22. Las cargas exteriores no contribuyen al flujo eléctrico

14.- Aplicaciones de la ley de Gauss

Aún siendo válida, la ley de Gauss sólo es útil cuando existe un alto grado de simetría en la distribución de la carga. La superficie gaussiana (recibe ese nombre la superficie cerrada a través de la cual se calcula el flujo) debe escogerse con la misma simetría que la distribución de cargas.

14.1.- Campo creado por una distribución esférica de carga

Supongamos una distribución esférica y uniforme de carga (Figura 23). Distinguiremos entre el cálculo del campo en un punto exterior a la distribución ($r > R$) o interior a la misma ($r < R$).

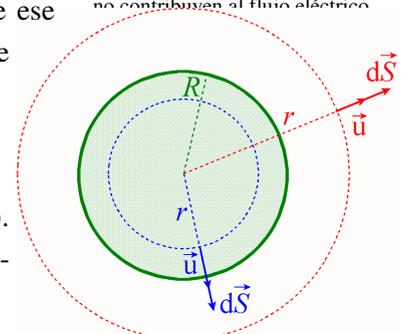


Figura 23

a) **En el exterior ($r > R$).**- En un punto cualquiera del exterior de la esfera, que dista r del centro de la misma, el campo debe tener el mismo módulo si la esfera es uniforme. Puesto que \vec{u} y $d\vec{S}$ tienen el mismo sentido, $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$, con lo que el flujo a través de la superficie externa será:

$$\Phi = \oint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{ext}} E dS = E 4\pi r^2$$

Según el teorema de Gauss, este flujo es igual a Q/ϵ_0 , siendo Q la carga encerrada por la superficie gaussiana (en nuestro caso, la de toda la distribución, $Q = 4\pi R^3 \rho/3$). Así pues,

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \vec{u}$$

b) **En el interior ($r < R$).**- Ahora la carga encerrada por la superficie gaussiana no es la total de la distribución, sino la que existe en un volumen dado por $4\pi r^3/3$ ($Q_{inte} = \rho 4\pi r^3/3$). Así pues,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{inte}}{r^2} \vec{u} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{u}$$

Es de destacar que, dentro de la distribución, el campo no disminuye con el cuadrado de la distancia, sino que es función lineal de la propia distancia. Evidentemente, $\vec{E}_{(r=0)} = 0$; es decir, el campo en el centro de la distribución es nulo.

Demostraremos ahora que el campo es continuo, para lo cual analizaremos el comportamiento del mismo en la superficie de la distribución ($r = R$).

- En el exterior, tomando $r = R$ queda:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \vec{u} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{R^2} \vec{u} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R \vec{u}$$

- En el interior, tomando también $r = R$, obtenemos el mismo resultado.

Por tanto, efectivamente, el campo es continuo para todo valor que tome r

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \vec{u} & \text{si } r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{inte}}{r^2} \vec{u} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{u} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

14.2.- Campo creado por una distribución plana e indefinida

Supongamos una distribución uniforme, plana e indefinida de carga (Figura 24), siendo σ la densidad superficial. La superficie gaussiana más conveniente es un cilindro perpendicular al plano, de altura $2r$ y de área de la base S . Dada la simetría, \vec{E} es perpendicular

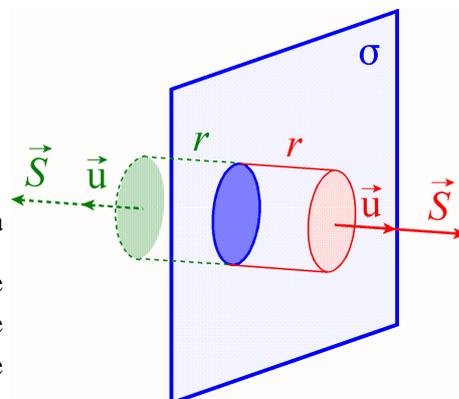


Figura 24

a las bases y el flujo a través de la superficie lateral del cilindro es nulo. Así pues,

$$\oint_{S_{\text{cilindro}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Bases}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \int_{\text{Base}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \int_{\text{Base}} E \vec{u} \cdot d\vec{S} = 2ES$$

Según la ley de Gauss este flujo será igual a $q_{\text{círculo}}/\epsilon_0$, y como $q_{\text{círculo}} = \sigma S$, tendremos finalmente que $2ES = \sigma S/\epsilon_0 \Rightarrow E = \sigma/(2\epsilon_0)$.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u} \quad [1.44]$$

Es de destacar el hecho de que el campo es uniforme (no depende de la distancia). Aún cuando no existen distribuciones infinitas como la propuesta, la ecuación [1.44] proporciona resultados válidos para distribuciones finitas si el punto no está muy alejado (en comparación con las dimensiones de la distribución) y no está próximo a los bordes.

15.- Trabajo necesario para mover una carga puntual. Energía potencial electrostática

Puesto que la fuerza eléctrica que una carga puntual ejerce sobre otra es central y su módulo depende de la distancia entre ambas, dicha fuerza será conservativa y, por tanto, existirá una energía potencial electrostática asociada a ella, de forma que la relación entre ambas es:

$$\vec{F}_C = -\vec{\nabla}U$$

donde con \vec{F}_C hemos querido indicar la fuerza realizada por el campo. Si tomamos la distancia r como única variable, la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$F_C = -\frac{dU}{dr} \quad [1.45]$$

A continuación estudiaremos el caso particular en que una carga puntual q' se mueve en el seno de un campo electrostático creado por otra carga puntual Q . En primer lugar obtendremos $U_A - U_B$.

$$-dU = F_C dr \quad \Rightarrow \quad -\int_{U_A}^{U_B} dU = \int_{r_A}^{r_B} F_C dr \quad \Rightarrow \quad U_A - U_B = \int_{r_A}^{r_B} k_0 \frac{Qq'}{r^2} dr = k_0 Qq' \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$U_A - U_B = k_0 Qq' \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad [1.46]$$

y como el trabajo realizado por la fuerza conservativa es igual a la variación de la energía potencial con signo cambiado

$$W_C (A \rightarrow B) = -\Delta U = U_A - U_B = k_0 Qq' \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad [1.47]$$

donde con W_C queremos indicar trabajo realizado por el campo. Si el campo está creado por varias cargas puntuales, Q_1, Q_2, \dots, Q_n , el trabajo necesario para mover una carga-testigo q' vendrá dado, según el principio de superposición, por

$$W_C (A \rightarrow B) = k_0 \sum_{i=1}^n Q_i q' \left(\frac{1}{r_{iA}} - \frac{1}{r_{iB}} \right)$$

Analicemos el signo del segundo miembro de la ecuación [1.47]

a) Si el signo de Q es igual al signo de q' , lo que equivale a decir que la fuerza de interacción es repulsiva,

a.1) Si $r_B > r_A$ (las partículas se alejan), entonces ambos miembros son positivos, lo que quiere decir que el sistema ha perdido energía potencial y, por tanto, el trabajo será realizado por el campo ($W_C > 0$).

a.2) Si $r_B < r_A$ (las partículas se acercan), entonces se produce un aumento de la energía potencial del sistema y eso sólo es posible si se realiza un trabajo sobre el mismo; por tanto, el trabajo será realizado por un agente exterior sin cambiar la Energía cinética ($W_C < 0 \Rightarrow W_{\text{ext}} = -W_C + \Delta E_C > 0$).

b) Si el signo de Q es diferente del signo de q' , lo que equivale a decir que la fuerza de interacción es atractiva,

b.1) Si $r_B > r_A$, el sistema aumenta de energía potencial y, por tanto, el trabajo tendrá que ser realizado por un agente exterior sin cambiar la Energía cinética ($W_C < 0 \Rightarrow W_{\text{ext}} = -W_C + \Delta E_C > 0$).

b.2) Si $r_B < r_A$, el sistema disminuye de energía potencial y, por tanto, el trabajo será realizado por el propio campo ($W_C > 0$).

Si tomamos el origen de energías potenciales en el infinito ($U_\infty = 0$), lo que parece lógico ya que en esas condiciones la fuerza de interacción es nula, entonces la ecuación [1.46] se transforma en

$$U = k_0 \frac{Qq'}{r} \quad [1.48]$$

Establecido así el origen de energías potenciales, la **energía potencial de un sistema de dos cargas puntuales** representa el trabajo que debe realizar el campo para separar las cargas una distancia infinita ¿Cuánto valdrá la energía potencial de un sistema de 3 cargas? Como se han de separar una distancia infinita las cargas 1 y 2 ($k_0 Q_1 Q_2 / r_{12}$), las cargas 1 y 3 ($k_0 Q_1 Q_3 / r_{13}$) y las cargas 2 y 3 ($k_0 Q_2 Q_3 / r_{23}$), tendremos

$$U = k_0 \left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} \right)$$

En general, si el sistema está constituido por n cargas, la energía potencial será

$$U = k_0 \sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{pares } i \neq j}}^n \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \quad [1.49]$$

El valor de la energía potencial de un sistema de cargas representa el trabajo que deben realizar las fuerzas del campo para separar todas las cargas una distancia mutua infinita. Como el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es igual a la variación de la energía cinética más la variación de la energía potencial ($W_{\text{ext}} = \Delta E_C + \Delta U$), la energía potencial de un sistema de cargas representa también el trabajo que debe realizar un agente exterior para traer las cargas desde el infinito hasta su localización definitiva sin cambiar la energía cinética de las mismas.

16.- Diferencia de potencial y función potencial electrostático. Superficies equipotenciales

Consideremos una carga-testigo q' en el interior de un campo eléctrico de intensidad \vec{E} creado por algún sistema de cargas: la fuerza eléctrica que actúa sobre q' será $q'\vec{E}$ y es conservativa. El trabajo realizado por esta fuerza será:

$$W(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B q' \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q' \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = U_A - U_B$$

Puesto que la circulación entre A y B de la fuerza no depende del camino al ser la fuerza conservativa, las igualdades anteriores nos dicen que la circulación del campo tampoco depende del camino y, por tanto, podemos suponer que existe una función escalar, que simbolizaremos por V , tal que dicha circulación quede evaluada por la diferencia que toma la función escalar en A y en B: definimos la **diferencia de potencial entre dos puntos** como la circulación del campo entre dichos puntos.

$$V_A - V_B = -\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad [1.50]$$

Como el trabajo es igual a la variación de la energía potencial con signo cambiado,

$$V_A - V_B = \frac{W(A \rightarrow B)}{q'} = \frac{U_A - U_B}{q'} \quad [1.51]$$

es decir, la diferencia de potencial entre dos puntos representa el trabajo que el campo realiza (agente exterior) para trasladar la unidad de carga positiva del primer punto al segundo (del segundo al primero, sin cambiar la Energía cinética de la misma). También representa el cambio de energía potencial que experimenta la unidad de carga positiva al ser trasladada por las fuerzas del campo del primer punto al segundo.

Al igual que ocurría con la energía potencial, no pueden medirse potenciales absolutos sino diferencias de potencial (y ello, por definición). Si queremos medir potenciales "absolutos", es preciso tomar un origen arbitrario de potenciales: como en el infinito la fuerza de interacción es nula, tomaremos dicho punto como origen (además, de esa forma el potencial y la energía potencial tienen el mismo origen). Así pues, el potencial de un punto representa el trabajo que debe realizar el campo (agente exterior) para trasladar la unidad de carga positiva desde ese punto hasta el infinito (desde el infinito hasta dicho punto, sin cambiar la Energía cinética de la misma). De esta forma,

$$V_P = \frac{U_P}{q'} \quad [1.52]$$

$$V_P = \frac{W(P \rightarrow \infty)}{q'} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad [1.52.1]$$

La unidad de potencial electrostático en el Sistema Internacional es el voltio, definido como la diferencia de potencial que existe entre dos puntos de un campo eléctrico cuando las fuerzas del campo deben realizar un trabajo de un julio para trasladar una carga de un culombio desde el primer punto hasta el segundo.

Definimos superficie equipotencial como el lugar geométrico de todos los puntos de un plano en los que el potencial toma el mismo valor.

De la ecuación [1.50] deducimos que

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad [1.50.1]$$

Recordemos la expresión matemática de la diferencial de una función escalar, como V , en función de su gradiente:

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} \quad [1.50.2]$$

De las ecuaciones [1.50.1] y [1.50.2] deducimos que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad [1.53]$$

Sabemos de un tema anterior que el vector $\vec{\nabla}V$ es perpendicular a las superficies equipotenciales y tiene el sentido de los potenciales crecientes; por ello, la ecuación [1.53] nos dice que *el campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales y tiene el sentido de los potenciales decrecientes*.

La ecuación [1.48] nos da la energía potencial de un sistema de dos cargas: utilizándola en la ecuación [1.52] obtendremos el **potencial creado por una carga puntual Q en un punto que dista r de ella**.

$$V = \frac{U}{q'} = \frac{k_0 \frac{Qq'}{r}}{q'} = k_0 \frac{Q}{r} \quad [1.54]$$

17.- Cálculo del potencial eléctrico para diversas distribuciones continuas de carga

Para calcular el potencial creado por distribuciones continuas de carga tenemos dos caminos:

a) Dividir la distribución en elementos infinitesimales de carga dq , que pueden tratarse como cargas puntuales. Según la ecuación [1.54], el potencial elemental creado por dq será $dV = k_0 dq/r$, donde r representa la distancia de dq al punto en el que se pretende calcular el potencial. Según el principio de superposición, el potencial total creado por la distribución será la suma de todos los potenciales elementales, es decir,

$$V = k_0 \int \frac{dq}{r} \quad [1.55]$$

donde la integral será de línea, de superficie o de volumen según sea la distribución.

b) Calcular el valor del campo mediante algún procedimiento (aplicando la ley de Gauss, por ejemplo) y aplicar la definición dada por la ecuación [1.50].

17.1.- Potencial creado por una distribución lineal de carga uniforme e indefinida

En su momento, dedujimos (Ecuación [1.27]) que el campo creado por una distribución lineal de carga uniforme e indefinido a una distancia a de la misma era

$$\vec{E} = \frac{2k_0\lambda}{a} \vec{j}$$

Puesto que sólo tiene coordenada y (a juega el papel de y),

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow E = -\frac{dV}{da} \Rightarrow dV = -Eda = -\frac{2k_0\lambda}{a} da$$

Usaremos integrales indefinidas en vez de definidas con objeto de no presuponer el origen de potenciales

$$V = -2k_0\lambda \int \frac{da}{a} = -2k_0\lambda \ln a + C$$

A la vista de la expresión matemática que hemos obtenido, parece lógico elegir el origen de potenciales a una distancia unidad ($a = 1$) del conductor, con lo que $C = 0$ y el potencial queda en la forma

$$V = -2k_0\lambda \ln a \quad [1.56]$$

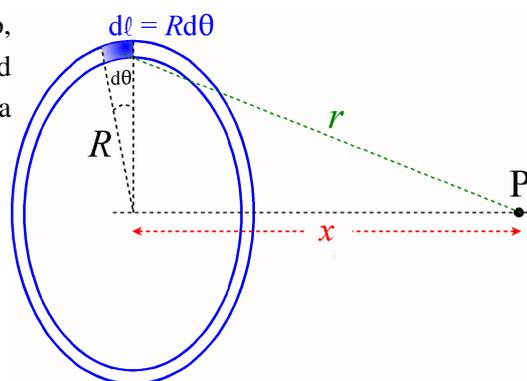


Figura 25

17.2 Potencial creado por un anillo en un punto de su eje

El potencial creado por una carga elemental del anillo (Figura 25) viene dado por

$$dV = \frac{k_0\lambda d\ell}{r} = \frac{k_0\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

El potencial total será

$$V = \frac{k_0\lambda R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{k_0\lambda R}{\sqrt{R^2 + x^2}} 2\pi = \left\{ \lambda = \frac{Q}{2\pi R} \right\} = \frac{k_0 R}{\sqrt{R^2 + x^2}} 2\pi \frac{Q}{2\pi R} = \frac{k_0 Q}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad [1.57]$$

17.3.- Potencial creado por un disco en un punto de su eje

Tomemos como carga elemental la contenida en una corona circular de radio r y anchura dr (Figura 26).

$$dV = k_0 \frac{\sigma dS}{\ell} = \left\{ S = \pi r^2 \Rightarrow dS = 2\pi r dr \right\} = k_0 \frac{2\pi\sigma r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$V = k_0 \pi \sigma \int_0^R \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = k_0 \pi \sigma \left[2\sqrt{r^2 + x^2} \right]_0^R = 2\pi k_0 \sigma \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x \right)$$

$$V = 2\pi k_0 \sigma \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x \right) \quad [1.58]$$

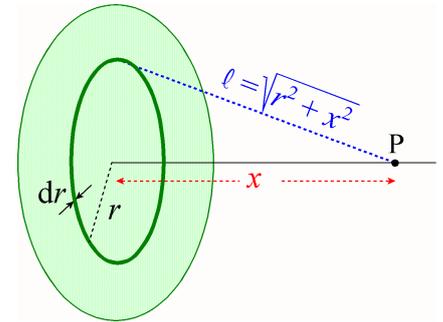


Figura 26

18.- El dipolo eléctrico. Momento dipolar eléctrico

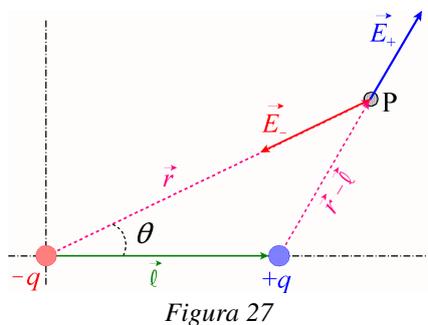


Figura 27

De particular interés es el estudio de un sistema formado por *dos* cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto separadas por una pequeña distancia (el significado de "pequeña distancia" es porque se considera el efecto de este sistema a distancias grandes comparadas con la distancia entre las cargas). A este par de cargas opuestas muy próximas entre sí se le denomina **dipolo eléctrico**.

Un dipolo eléctrico viene caracterizado por una magnitud vectorial, \vec{p} , denominada **momento dipolar eléctrico**, definida como el *producto de la carga positiva por el vector cuyo origen está en la carga negativa y cuyo extremo está en la positiva* (Figura 27).

$$\vec{p} = q\vec{\ell} \quad [1.59]$$

19.- Dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme

La figura 28a muestra un dipolo colocado en un campo eléctrico externo uniforme de forma que el momento dipolar forma un ángulo θ con el vector campo. Sobre cada una de las cargas que constituyen el dipolo, actúan fuerzas de igual módulo y dirección pero opuestas ($\vec{F}_+ = q\vec{E}, \vec{F}_- = -q\vec{E} = -\vec{F}_+$) por lo que la fuerza neta que actúa sobre el dipolo es nula. No obstante, ese par de fuerzas tienen un momento no nulo respecto del punto O (punto medio del segmento que une las cargas). Dicho momento de torsión vale

$$\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}_+ = \vec{\ell} \times q\vec{E} = q\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad [1.60]$$

Este par de fuerzas tiende a colocar el dipolo paralelamente al campo, de forma que θ sea nulo y \vec{p} y \vec{E} sean paralelos, con lo que el momento neto será nulo y el dipolo se encontrará en una posición de equilibrio (y de equilibrio estable pues si se supera dicha posición, el par tenderá, nuevamente, a situar el dipolo

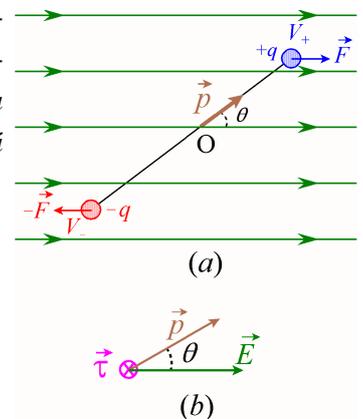


Figura 28: (a) Dipolo en un campo externo uniforme. (b) Vista en perspectiva para ilustrar $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

paralelamente al campo).

Si llamamos V_- y V_+ a los potenciales creados por el campo externo uniforme en los puntos en los que se encuentran, respectivamente, la carga negativa y la positiva, la energía potencial del dipolo será

$$U = U_+ + U_- = qV_+ + (-q)V_- = q(V_+ - V_-) \quad [1.61]$$

Aplicando la definición de diferencia de potencial (Ecuación [1.50]).

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_-^+ E \cos \theta d\ell = - E \cos \theta \int_-^+ d\ell = - E \ell \cos \theta$$

con lo que la energía potencial del dipolo será:

$$U = q(V_+ - V_-) = -q \ell E \cos \theta = -p E \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad [1.62]$$

La ecuación [1.62] nos dice que la energía potencial es mínima cuando \vec{p} y \vec{E} tienen la misma dirección y el mismo sentido y sabemos que eso significa equilibrio estable, tal y como habíamos razonado al hablar del momento de torsión que el campo ejerce sobre el dipolo.

Si bien la expresión [1.62] ha sido deducida para el caso particular de que el campo externo sea uniforme, puede demostrarse su validez general como aproximación de la realidad: la validez de dicha aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea la similitud del dipolo a la de un dipolo puntual ideal, esto es ($\ell \rightarrow 0$ y $q \rightarrow 0$).

Las propiedades de los dipolos en campos externos tienen importantes aplicaciones. Por ejemplo, cuando una sustancia iónica (por ejemplo NaCl) se disuelve en agua, cada ión en la disolución (Cl^- y Na^+) polariza las moléculas del agua existentes a su alrededor (Figura 29). Estas moléculas orientadas se ligan más o menos al ión, aumentando su masa efectiva y disminuyendo su carga efectiva: si introducimos 2 electrodos en la disolución (uno positivo y otro negativo), la pantalla que forman la moléculas orientadas disminuyen la movilidad de los iones, apantallando el campo eléctrico externo creado por los electrodos.

Cuando un sólido, cuyas moléculas forman dipolos permanentes (enlace covalente polar) se coloca en un lugar en el que existe un campo eléctrico, las moléculas tienden a alinearse con sus dipolos paralelos al campo externo. En esta situación, decimos que la sustancia está polarizada (volveremos sobre este punto en el próximo tema).

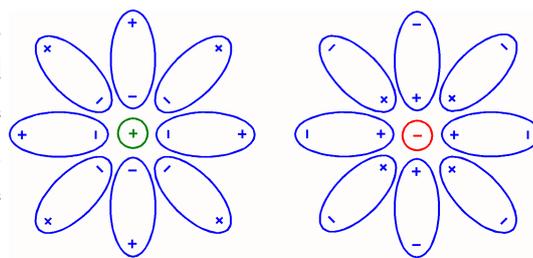


Figura 29