Ampliación de Cálculo

Año: 2012
Prueba. Tema 7.

Pablo Alberca Bjerregaard

Integral de superficie. Teorema de Stokes.

Problema 1 *Sea F el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (-2xz, 0, y^2)$. Calcule $\nabla \times F$. Demuestre que $\displaystyle\iint_S \nabla\times F\cdot n\, dS = 0$ para cualquier porción S de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2 = 1$. Demuestre que $\displaystyle\oint_C F\cdot d\gamma = 0$ para cualquier curva simple cerrada C sobre la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2 = 1$.*

Problema 2 *Para una distribución de carga estacionaria y una distribución de corriente de divergencia cero de modo que los campos magnético y eléctrico son $H(x,y,z) = -xyi + xj + yzk$ y $E(x,y,z) = zj + yk$, la radiación que los campos producen a través de una superficie S está determinada por un campo vectorial de densidad del flujo de radiación, llamado el campo vectorial de Poynting $P = E\times H$. Hallar el flujo del vector de Poynting a través de la superficie $x^2+y^2+z^2 = 25$ con $y > 0$.*

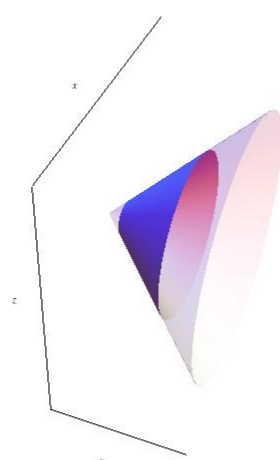
Problema 3 *En la siguiente fotografía puede verse la escalera de forma helicoidal que se encuentra en la planta principal del museo del Louvre, París,*

que podemos parametrizar mediante $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta/2)$, $r\in[1,2]$, $\theta\in[0,2\pi]$.

a) Determine la longitud de las curvas que se obtienen manteniendo r constante.

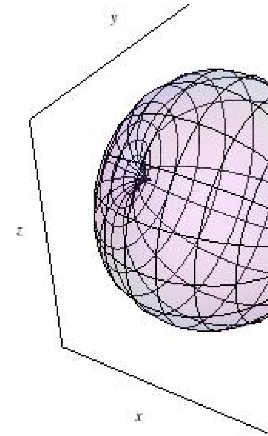
b) Calcule el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,-y,1)$ que la atraviesa, indicando la orientación utilizada.

Problema 4 *Calcule el flujo exterior del rotacional del campo vectorial $G(x,y,z) = (xye^{y^2}, y, z)$ a través del cono truncado $x^2+z^2 = y^2$, $1\le y\le 5$.*



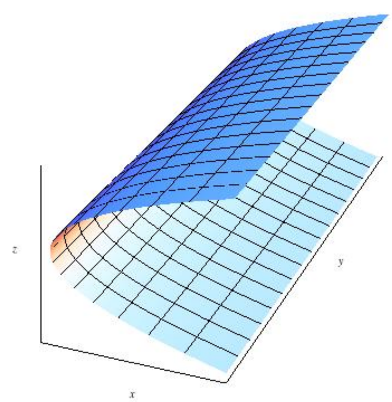
Problema 5 *Considere la superficie generada al girar parte de la cardioide $\rho = 2a(1+\cos\theta)$, $\theta\in[0,\pi]$, $a>0$.*

a) Parametrice la superficie de revolución que se obtiene al girar dicha curva alrededor del eje X.



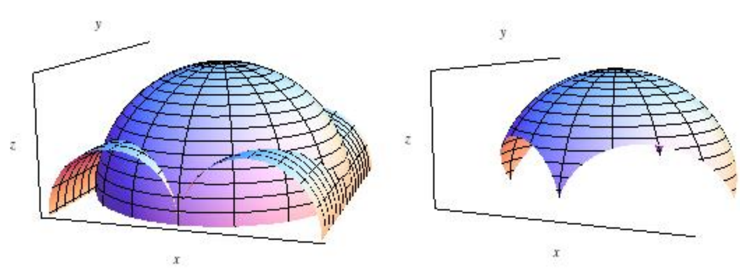
b) Demuestre que el área de la superficie obtenida es $\dfrac{128}{5}a^2\pi$.

Problema 6 *La parte superior de la tribuna principal del circuito de Fórmula 1 de Montmeló se puede aproximar por la superficie de la siguiente figura*



que puede venir parametrizada por $S \equiv \Phi(y,z) = (2z^2, y, z),\ y \in [-3,3],\ z \in [-1,1]$. *Demuestre que su área es* $\text{Área}(S) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+16z^2}\,dz$ *y calcule el flujo del campo vectorial* $F(x,y,z) = (1, x+y+z, 1)$ *a través de la grada* S*, para lo que deberá especificar una orientación.*

Problema 7 *Siguiendo un problema clásico del siglo XVII, debido a Vincenzo Viviani, se pide calcular el área de la semiesfera* $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$, *después de quitar los dos trozos interiores a los cilindros* $x^2+z^2 = 2x$ *y* $x^2+z^2 = -2x$. *Una ilustración puede verse en la siguiente figura:*



Problema 8 *Calcule*

$$\iint_S F \cdot dS, \tag{1}$$

donde $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{2az - z^2}}(x, y, z-a)$ *y* S *es la parte de la esfera* $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ *interior al cilindro* $x^2 + y^2 = ay$ *y bajo el plano* $z = a$. *(Recuerde que* $(\operatorname{arcsen}(t/a))' = 1/\sqrt{a^2 - t^2}$*).*

Problema 9 *Calcule el área de la región limitada por los hiperboloides* $x^2+y^2-z^2 = 1$ *y* $x^2+y^2-2z^2 = -2$.

Problema 10 *Calcule el flujo del rotacional del campo vectorial*

$$F(x,y,z) = (y^3, x^4, z^{27} - \cos^8(\operatorname{sen} y))$$

en $\mathbb{R}^3$ *a través del sombrero mejicano de la Figura* **??**, *superficie de ecuación* $z = (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)$ *con* $x^2 + y^2 \leq 7/2$.

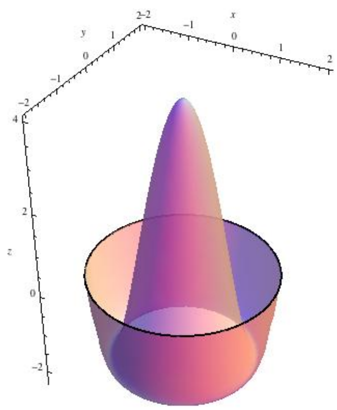


Figura 1: Un sombrero mejicano.

Problema 11 *Sea* M *la superficie obtenida al girar la curva* $z = \sqrt{2x}$, $x \in [0,1]$, *alrededor del eje* Z. *Calcule el flujo del campo vectorial* $F(x,y,z) = (y, -x, z)$ *a través de* M.

Problema 12 *Sea* Ω *la región en* $\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + z^2 \leq 1,\ -1 \leq y \leq z^2\}. \tag{2}$$

Calcule el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (x, y+1, z)$ *a través de la superficie* S *parte de la frontera de* Ω *contenida en* $y = z^2$.

Problema 13 *Calcule el área de la superficie* $x^2 + y^2 - az = 0$ *que está sobre la lemniscata* $4\rho^2 = a^2\cos(2\theta)$.

Problema 14 *Calcule el área de la superficie* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *que está sobre la cardioide* $\rho = 1 - \cos\theta$.

Problema 15 *Calcule*

$$\iint_S F \cdot dS, \tag{3}$$

donde

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2az - z^2}}(x, y, z-a)$$

y S *es la parte de la esfera* $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ *interior al cilindro* $x^2 + y^2 = ay$ *y bajo el plano* $z = a$, *orientada exteriormente.*

Problema 16 *Determine el flujo exterior del campo vectorial F en $\mathbb{R}^3$ dado por*

$$F(x,y,z) = -\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \tag{4}$$

para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, a través de la superficie de ecuación $x^2+y^2+z^8=1$.

Problema 17 *Calcule el flujo exterior del campo vectorial*

$$F(x,y,z) = (y^2\cos(xz), x^3e^{yz}, -e^{-xyz})$$

que atraviesa el trozo del cono $x^2+y^2=(z-2)^2$ que descansa sobre el plano XY.