Matemáticas III
Tema 3
Geometría diferencial

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

• Denotamos el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

• La norma o módulo de un vector es la raíz cuadrada (positiva) del producto escalar por sí mismo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

• Una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal si cada cada par vectores distintos son ortogonales y cada vector es unitario, es decir:

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ para cada $i \neq j$, y
2. $\|\vec{e}_i\| = 1$ para cada $i = 1, 2, 3$.

• El producto escalar y la norma, respecto de una base ortonormal, toman las expresiones

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = v^t w$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

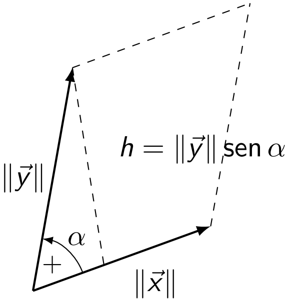
• Si α es el ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se tiene la siguiente expresión

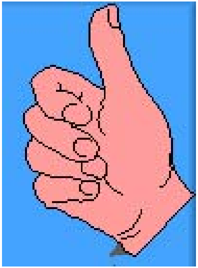
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos \alpha$$

Orientación

Dos bases tienen la misma orientación cuando sus determinantes tienen el mismo signo.
Elegida una base diremos que tiene orientación positiva si está en la clase de la base canónica (determinante positivo) y orientación negativa en caso contrario.

- Si una base de $\mathbb{R}^2$ $\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ tiene orientación positiva el giro del primer vector hacia el segundo se hace en *sentido contrario a las agujas del reloj*. Un giro de esta forma se dice que es un **giro (o ángulo) positivo**.
- En $\mathbb{R}^3$, a veces se usa la llamada "*regla del sacacorchos*" para determinar si una base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ tiene orientación positiva: "*si al girar $\vec{x}_1$ hacia $\vec{x}_2$ (por el ángulo menor) un sacacorchos sigue la dirección de $\vec{x}_3$*". También es muy conocida "*la regla de la mano derecha*"





Regla del "sentido horario"
en el plano

Regla de la "mano derecha"
en el espacio

Observamos que el *seno del ángulo* (en sentido positivo) de dos vectores independientes, junto con sus normas, nos determina el área del paralelogramo que definen. Así, si α es el ángulo entre ellos, tenemos

$$\mathrm{Area}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \ \mathrm{sen}\, \alpha$$

Nota. Señalemos que (en $\mathbb{R}^3$) el determinante de una base orientada positivamente es el volumen del paralelepípedo que determinan: $\mathrm{Volumen}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Definición

Definimos el producto vectorial de dos vectores $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ de $\mathbb{R}^3$ como el único vector $\vec{x} \times \vec{y}$ que verifica:

1. $\vec{x} \times \vec{y}$ es ortogonal a ambos vectores,
2. Si $\vec{x}, \vec{y}$ son independientes, $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ es una base orientada positivamente.
3. $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \ \mathrm{sen}\, \alpha$.

Propiedades inmediatas del producto vectorial.

1. El producto vectorial es antisimétrico: $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.
2. Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $\vec{y} \neq 0$, entonces $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$ son linealmente dependientes.

Expresión analítica del producto vectorial.

Dada una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ orientada positivamente, con vectores $\vec{x}, \vec{y}$ de coordenadas, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Entonces, el producto escalar tiene las siguientes coordenadas, respecto a dicha base ortonormal

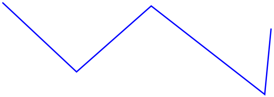
$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Curvas diferenciables

Llamaremos curva parametrizada a una función continua de un intervalo $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$

$$\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$$

admitiendo la posibilidad de que $a = -\infty$ o/y $b = +\infty$.



Toda curva parametrizada en el espacio se puede entender, entonces, como un vector cambiante, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, llamado vector de posición, donde x, y, z son funciones reales definidas en el intervalo $I = (a, b)$ y al valor $t \in I$ se le llama parámetro.

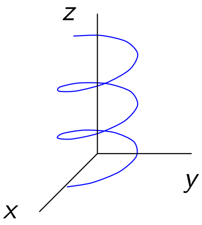
Cuando α es diferenciable, las funciones x, y, z son derivables (por tanto, continuas). La derivada del vector de posición $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es un **vector tangente a la curva** α en t. En un sentido físico a $\alpha'(t)$ se le llama **velocidad** en t.

Al subconjunto $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ (entendido como conjunto de puntos) se le llama **traza de la curva** α, que es la "*imagen*" que tenemos de la curva. Dos curvas son equivalentes si tienen la misma traza.

Ejemplo. La *hélice* es una curva $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida

$$\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, b\,t)$$

con $a > 0$ y $b > 0$, que está definida en todo el intervalo real y cuya traza está contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$.



Curvas planas

Son aquellas curvas cuya traza está contenida en un plano de $\mathbb{R}^3$. Se pueden entender también como curvas definas en $\mathbb{R}^2$, es decir

$$\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$$

Las funciones $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continuas se pueden entender como curvas parametrizadas si se expresan como $\alpha(t) = (t, f(t))$.
Las curvas de $\mathbb{R}^3$ que no son planas se llaman **curvas alabeadas**.

Ejemplo.

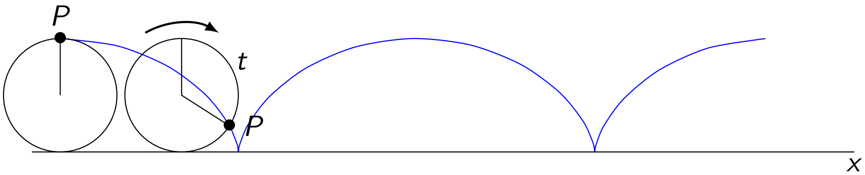
La semicircunferencia de radio 1 es una curva plana la podemos expresar con dos parametrizaciones (con sentido contrario)

$$\alpha\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \text{definida } \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$\beta\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^2,\ \text{definida } \beta(t) = (t, +\sqrt{1-t^2})$$

Ejercicio

Encuentra una curva parametrizada cuya traza sea *la cicloide* que son los puntos del plano que recorre un punto fijo P sobre una circunferencia (de radio 1) que se desliza girando sobre una recta.



Derivada del producto escalar

El siguiente teorema nos dice que esta función es derivable y nos da una expresión para la derivada similar a la *regla de Leibniz*.

Teorema

Si $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ *son curvas diferenciables, entonces la función real* $\alpha \cdot \beta$ *es derivable y*

$$(\alpha \cdot \beta)'(t) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$$

Corolario

Si α *es una curva parametrizable diferenciable que no se anula, su norma es una función derivable y además*

$$\frac{d\,\|\alpha(t)\|}{dt} = \frac{\alpha(t) \cdot \alpha'(t)}{\|\alpha(t)\|}$$

Ejercicio (M. do Carmo).

Prueba que si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ es una curva que no se anula en ningún punto y $\alpha(t_0)$ es un punto más cercano al origen, entonces $\alpha'(t_0)$ es ortogonal a $\alpha(t_0)$. *(En estas codiciones, se dice que la velocidad es ortogonal a la posición en un punto).*

Derivada del producto vectorial

Dadas dos curvas diferenciables α y β definidas en un mismo intervalo $I = (a, b)$ tiene sentido la nueva curva definida por el producto vectorial

$$\alpha \times \beta \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

definida de manera natural $(\alpha \times \beta)(t) = \alpha(t) \times \beta(t)$, que también será diferenciable y se cumple de nuevo la regla de Liebniz.

Teorema

Si $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ son curvas diferenciables, entonces la curva $\alpha \times \beta$ es diferenciable y

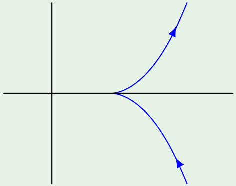
$$(\alpha \times \beta)'(t) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$$

Curvas regulares

Una curva diferenciable $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ tiene un punto singular en $t_0 \in I$ si $\alpha'(t_0) = 0$. Una curva α se dice que es regular si no tiene puntos singulares, es decir, $\alpha'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$.

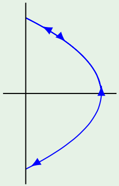
Ejemplo

Algunas curvas diferenciables no son regulares, como muestran los siguientes ejemplos



$\alpha(t) = \left(\sqrt{t^2+1}, t^3\right)$

P. singular en $t = 0$



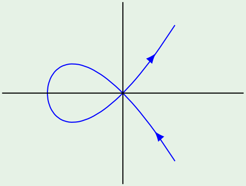
$\alpha(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \cos t), t \in (-\pi/2, \pi)$

P. singular en $t = 0$

Ejemplo

Una curva regular no necesariamente es inyectiva.
Este ejemplo muestra la traza de la curva plana

$$\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$$



que, efectivamente, es regular, como se puede comprobar y, claramente, no es inyectiva porque $\alpha(-1) = \alpha(1) = (0, 0)$.

Caminos

Un **camino** entre dos puntos p, q de $\mathbb{R}^3$ a la traza de cualquier *curva* α definida en un intervalo *cerrado* $[a, b]$ sobre $\mathbb{R}^3$ que cumple $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

Si $p = q$ se dice que es un **camino cerrado**, en caso contrario se dice que es un **camino abierto**.

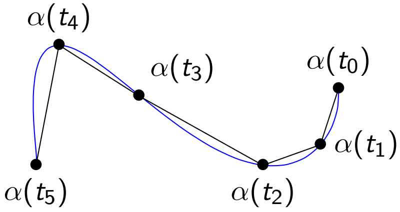
Un camino abierto se dice que es **simple** si se parametriza con una función inyectiva. Un camino cerrado $\alpha \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se dice que es simple si α es inyectiva restringida al intervalo abierto (a, b).

Un camino cerrado simple también se llama **curva de Jordan**.

Un camino o una curva α definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, diremos que es diferenciable cuando es restricción de una curva diferenciable definida en un intervalo abierto (a', b') que contiene al cerrado, $\alpha\colon (a', b') \supseteq [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Algunos caminos están definidos como "*curvas a trozos*" y tiene sentido, entonces, hablar del vector tangente $\alpha'(t)$, siempre que t sea del interior de uno de los intervalos que define un "trozo".

Si $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable, una partición del intervalo,
$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$,
define una poligonal P próxima a la curva α de puntos es próxima a la longitud de α entre a y b.



Se puede probar que si α es una curva regular, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede encontrar una partición P de forma que

$$\left| \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt - \ell(P) \right| \leq \varepsilon$$

que justifica la definición de curvas diferenciables en un intervalo cerrado y además nos permite dar la definicón de longitud de una curva.

Longitud de una curva regular.

Si $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular se define su longitud como

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Ejemplo

La circunferencia de radio $r$tiene longitud $2\pi r$.

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$ la longitud de la curva que define la gráfica de f en el intervalo $[a,b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

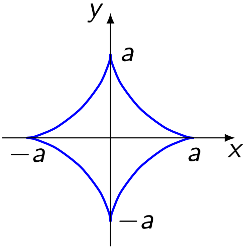
- Si una curva regular plana se expresa mediante su ecuación en polares $r = r(\theta)$ en el intervalo $[\theta_0, \theta_1]$, su longitud es

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$

Calculemos la longitud del astroide

que se paremetriza como $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$

$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\,\mathrm{sen}^3\, t$$



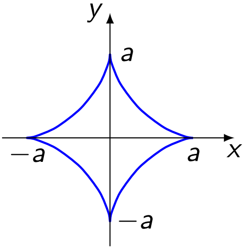
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 0 \neq L$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Calculemos la longitud del astroide

que se paremetriza como $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$

$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\,\mathrm{sen}^3\, t$$



$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 0 \neq L$$

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 6a$$

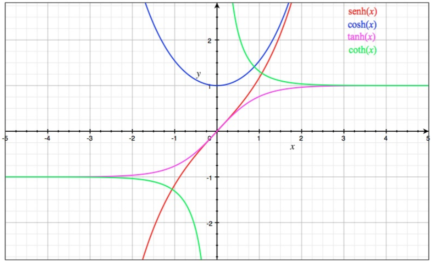
Funciones hiperbólicas.

Se define el seno y el coseno hipérbólico

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad y \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

y el resto de las funciones hiperbólicas

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \ \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}, \ \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \ \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$



- Se verificaa la siguiente fórmula (parecida al teorema fundamental de la trigonometría)

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

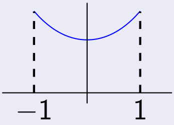
- Se verifica

$$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x \quad \text{y} \quad (\cosh x)' = \operatorname{senh} x$$

Catenaria

Representa un cable que cuelga de dos postes a la misma altura tiene por ecuación

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

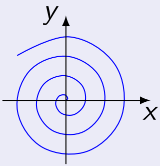


donde a es una constante que depende de la tensión y del peso del cable.

Espiral de Arquímedes.

Calcula la longitud de n vueltas de la espiral de Arquímedes que tiene por ecuaciones polares

$$r = a\theta, \quad \text{con } \theta \in [0, 2n\pi]$$



Si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada en el abierto I y $u\colon I \to J$ es una función biyectiva entre abiertos, derivable y con inversa derivable (o sea, un difeomorfismo), entonces la función

$$\beta = \alpha \circ u^{-1}\colon J \to \mathbb{R}^3$$

es una nueva curva diferenciable que tiene la misma traza que α, y se dice que es una **reparametrización** de la curva.

Puesto que entre dos intervalos abiertos siempre se puede definir un difeomorfismo, una curva se puede reparametrizar a cualquier intervalo.

Ejemplo

Sea el arco de circunferencia $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ definido en $I = (0, \pi)$. La función $u(t) = \dfrac{t}{\pi}$ lo reparametriza al intervalo $(0, 1)$

$$\beta(u) = (cos(\pi u), \operatorname{sen}(\pi u)), \quad \text{con } u \in (0, 1)$$

Parametrización por longitud de arco

Si $t_0 \in (a, b)$ es un punto cualquiera del intervalo abierto la función

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(x)\| \, dx$$

es una función derivable y biyectiva de I en $J = s(I)$ puesto que $\|\alpha'(t)\| > 0$, que implica que s es estrictamente creciente.

A $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ se le llama **parametrización por longitud de arco** de la curva desde el punto $\alpha(t_0) = \beta(0)$. Toda curva regular es parametrizable por longitud de arco.

Teorema

Una curva regular está parametrizada por longitud de arco si y solo si los vectores tangentes en cada punto son unitarios.

Corolario

Si una curva regular está parametrizada por longitud de arco, entonces el valor del parámetro nos da la longitud de la curva desde un punto inicial $\alpha(0)$ *hasta el punto determinado por el parámetro.*

Ejemplo

La circunferencia de radio 1 parametrizada de la forma habitual $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una parametrización por longitud de arco puesto que

$$\|\alpha'(t)\| = \|(-\operatorname{sen} t, \cos t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$$

Ejecicio

Da una parametrización por longitud de arco de una circunferencia de radio $r > 0$.

Para las definiciones que vienen a continuación suponemos que la curva α es regular de clase C^∞ y está parametrizada por longitud de arco.

Curvatura

Si α es una curva regular parametrizada por longitud de arco en el intervalo (a, b), llamamos *curvatura* de α a la función $\kappa\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ definida

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Vector normal

Dada una curva regular α, en cada punto no singular de orden 1, se define el *vector normal unitario*

$$\vec{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$$

Plano osculador

En cada punto de curvatura no nula los vectores ortogonales $\vec{t}(s)$ y $\vec{n}(s)$ definen un plano que recibe el nombre de *plano osculador* en s.

Ejemplo

- La ecuación de una hélice parametrizada por longitud de arco es

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$$

siendo a, b positivos y $c^2 = a^2 + b^2$.

- Su vector tangente (unitario) es $\vec{t}(s) = \left(-\frac{a}{c}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$.
- El vector segunda derivada es $\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c}, 0\right)$ del que se obtiene la curvatura y el vector normal

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2} \quad \text{y} \quad \vec{n}(s) = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c}, 0\right)$$

Dejamos como ejercicio el cálculo del plano osculador.

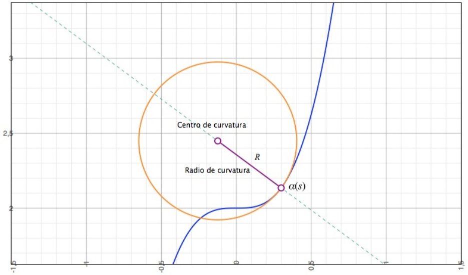
Radio de curvatura

Si una curva tiene curvatura distinta de cero en todos sus puntos, a la función $R = \dfrac{1}{\kappa}$ se le llama *radio de curvatura*.

Ejemplo. Una circunferencia de radio r tiene radio de curvatura constante $R = r$.

Círculo osculador

Definimos el *círculo osculador* como aquel que está contenido en el plano osculador, con centro sobre la recta normal (llamado centro de curvatura) en el sentido marcado por el vector normal y de radio $R = \frac{1}{\kappa}$ (radio de curvatura).



Vector binormal

El producto vectorial $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ es unitario y ortogonal a ambos vectores o, lo que es lo mismo, normal al plano osculador. Este vector recibe el nombre de *vector binormal*.

Su derivada $\vec{b}'(s)$ mide como cambia el plano osculador cuando se cambia de punto y tiene la dirección de $\vec{n}(s)$.

Torsión

Si α es una curva regular sin puntos singulares de orden 1, llamamos **torsión** a la función $\tau\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ que verifica

$$\vec{b}'(s) = -\tau(s)\vec{n}(s)$$

Por tanto $\tau(s) = \mp \left\| \vec{b}'(s) \right\|$ y su signo depende que $\vec{b}'$ tenga el mismo sentido o sentido contrario que el vector $\vec{n}$.

Las curvas planas tienen torsión nula y viceversa.

Ejemplo

El vector binormal de la hélice definida en el ejemplo anterior es

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) = \left(\frac{b}{c} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

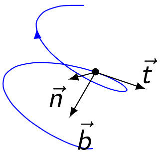
y su derivada es $\vec{b}'(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, 0 \right)$, de donde la torsión es $\tau(s) = \frac{b}{c^2}$.

El triedro de Frenet.

Para cada valor del parámetro s tenemos, entonces, una base ortonormal

$$\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$$

orientada positivamente que nos dan las direcciones *tangente, normal principal y binormal*, respectivamente. Esto se puede ver como un triedro en cada punto:



- El plano $\vec{t}(s)\vec{n}(s)$, que ya conocemos, es el plano osculador.
- El plano $\vec{t}(s)\vec{b}(s)$ es el plano rectificante.
- Y el plano $\vec{n}(s)\vec{b}(s)$ es el plano normal.

Ecuaciones de Frenet-Serret

$$\begin{cases} \vec{t}\,' = \kappa \vec{n} \\ \vec{n}' = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \\ \vec{b}\,' = -\tau \vec{n} \end{cases}$$

Por la teoría de ecuaciones diferenciales, la curvatura κ y la torsión τ son elementos suficientes para determinar una curva en el espacio.

Teorema (Teorema fundamental de la teoría local de curvas)

Dadas dos funciones reales derivables en un intervalo abierto I, $\kappa(s) > 0$ y $\tau(s)$ existe una curva parametrizada regular por longitud de arco α definida en dicho intervalo I que verifica que su curvatura es κ y su torsión es τ. Además esta curva es única salvo movimientos rígidos en el espacio.

Corolario

Una curva plana viene determinada por su curvatura, salvo traslaciones, rotaciones y simetrías.

El triedro de Frenet en una parametrización arbitraria

Representamos por $\alpha(t)$ una curva regular parametrizada de forma arbitraria.

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\vec{b} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \times \frac{1}{\|\alpha'\|}\alpha' = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|\alpha' \times \alpha''\| \, \|\alpha'\|} = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'\|}$$

$$\tau = \frac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

Para calcular la curvatura de una **curva plana** $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ expresamos los vectores α' y α'' de forma tridimensional, así

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\begin{vmatrix} y'(t) & y''(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} \right)$$

luego, para curvas en $\mathbb{R}^2$

$$\kappa = \frac{\mathrm{abs} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\|\alpha'\|^3} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejercicios

1. Calcula la curvatura de la rama de hipérbola parametrizada como:

$$x = a \cosh t$$
$$y = b \operatorname{senh} t$$

2. Encuentra una expresión para el vector normal $\vec{n}$ en cada punto de una curva plana.

Superficies

Podemos decir que una superficie es un subconjunto S no vacío de $\mathbb{R}^3$ en el que en cada punto $p \in S$ existe un entorno abierto U con $p \in U$ en S que es "*difeomorfo*" a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Entendemos por difeomorfismo una función que es diferenciable, invertible y su inversa es también diferenciable.

Dicho de otra manera, las superficies son subconjuntos de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que *localmente* son discos de $\mathbb{R}^2$ deformados en el propio espacio de una forma *lisa o suave* (sin picos).

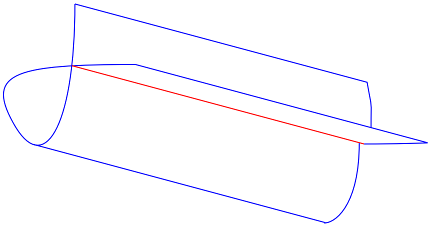
Ejemplo

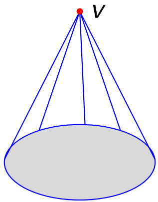
$\mathbb{S}^2(r)$ a la esfera de radio r centrada en el origen de coordenadas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

que es una superficie. Intuitivamente en cada punto de la esfera siempre hay un entorno abierto del punto que se puede considerar un disco del plano deformado. La esfera de radio 1 la representamos por $\mathbb{S}^2$.

Nos van a interesar las *superficies regulares*, aquellas en que en cada punto existe (sin ambigüedad) un plano tangente.





Estas superficies no son regulares por diferentes motivos.
Nota: Si se suprime el vértice en el cono obtenemos una superficie que sí es regular.

Proposición

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, entonces su gráfica

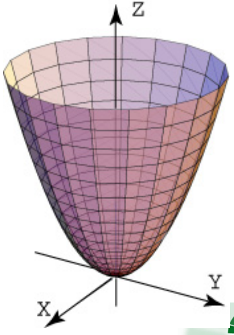
$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$$

es una superficie regular.

Ejemplo

El paraboloide definido $z = x^2 + y^2$ es una superficie regular, pues es la gráfica de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



Proposición

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable en U y $a \in f(U)$ es un valor regular de f (es decir, no es imagen de un punto crítico), entonces el conjunto

$$S = f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = a\}$$

es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo

Todos los elipsoides de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

son superficies regulares en $\mathbb{R}^3$, en particular la esfera $\mathbb{S}^2$.

Superficies parametrizadas.

Llamamos parametrización de una superficie a una función $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^3$, diferenciable en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ de forma que la la diferencial $d\Phi_q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en cada punto $q \in U$ sea un monomorfismo (inyectiva).

Si $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ la diferencial en $q = (u, v)$

$$d\Phi_q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tiene sus vectores columnas Φ_u y Φ_v linealmente independientes.

Ejemplo

La esfera (casi en su totalidad) se puede parametrizar como

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta)$$

siendo $(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

Parametrización trivial.

Si una superficie regular viene determinada por una campo diferenciable $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, siempre podemos encontrar una parametrización

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

de la superficie definida, para cada $(u, v) \in U$,

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= f(u, v) \end{aligned}$$

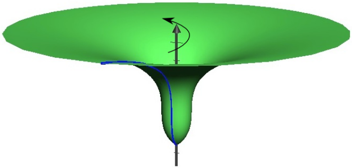
Superficies de revolución.

Se describe en el espacio a partir de una curva regular plana rotada por un eje. Si la curva está definida en uno de los semiplanos del eje z, parametrizada $x = f(t), z = g(t)$ con $t \in (a, b)$, y si hacemos girar el eje z queda

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$$x(u, v) = f(u) \cos v$$
$$y(u, v) = f(u) \operatorname{sen} v$$
$$z(u, v) = g(u)$$

$$\text{y } (u, v) \in (a, b) \times (0, 2\pi)$$



Ejercicios

- Determina la parametrización de una superficie de revolución determinada por una curva plana cuando se gira el eje x. Análogamente al girar el eje y.

- Determina una parametrización de la superficie de revolución generada por una parábola $y = x^2$ y comprueba que es un paraboloide

Ejemplo

El toro bidimensional $\mathbb{T}^2$.

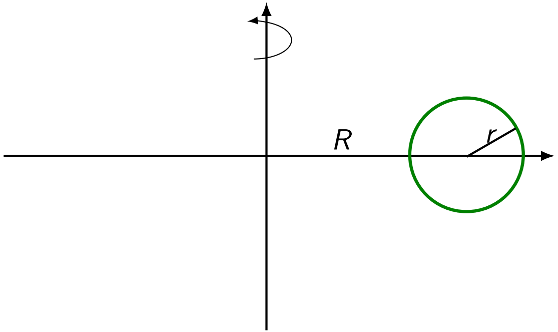
La superficie de revolución obtenida a partir de una circunferencia de radio r en el plano xz y centrada en el punto $(R, 0, 0)$, siendo $R > r$.
Como la circunferencia se puede parametrizar de la forma

$$x(t) = R + r\cos\theta;\ z(t) = R + \operatorname{sen}\theta,\ \text{con}\ \theta \in (0, 2\pi)$$

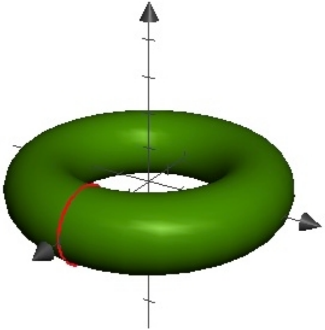
entonces una parametrización del toro será la siguiente:

$$\begin{aligned} x(\theta,\varphi) &= (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) &= (R + r\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi \\ z(\theta,\varphi) &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

con $(\theta,\varphi) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.



R
r



El plano tangente

Sea un punto p de una superficie regular S parametrizada por Φ de forma que $p = \Phi(u, v)$. El **plano tangente** de S en p, representado por $T_p(S)$, tiene como vectores de dirección las columnas de $d\Phi_q$, es decir,

$$\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}, \right)$$

y

$$\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}, \right)$$

llamados base de $T_p(S)$ referida a la parametrización Φ.

El plano tangente $T_p(S)$ será entonces el determinado por el punto p y la anterior base de dos vectories.

Ejemplo

Plano tangente a la esfera $\mathbb{S}^2$ parametrizada por

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

en el punto $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\pi/4, \pi/4)$.
Puesto que

$$\begin{aligned}\Phi_\theta &= (\cos\theta\ \cos\varphi, \cos\theta\ \operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta)\\ \Phi_\varphi &= (-\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\ \cos\varphi, 0)\end{aligned}$$

El plano tendrá como vectores directores

$$\Phi_\theta\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } \Phi_\varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

y pasa por el punto p, luego tiene por ecuación

$$\boxed{x + y + \sqrt{2}z = 2}$$

La primera forma fundamental

El producto escalar definido en $\mathbb{R}^3$, induce, respecto de una base asociada a una parametrización $\Phi\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, una forma cuadrática en cada plano tangente $\mathrm{I}_p\colon T_p(S) \to \mathbb{R}$ definida

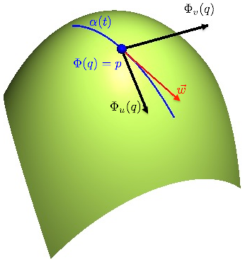
$$\mathrm{I}_p(\vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2$$

que recibe el nombre de primera forma fundamental de la superficie en el punto p.

Como cualquier forma cuadrática, respecto de una base, se puede expresar como una matriz (de orden 2×2) simétrica y definida positiva.

Proposición

Sea $p = \Phi(q)$ un punto de la superficie S. Si $\vec{w}$ es un vector del plano tangente $T_p(S)$ existe una única curva $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ definida $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ (por tanto, contenida en S) de forma que $\alpha(0) = \Phi(q) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{w}$.



Por la regla de la cadena, el vector tangente a dicha curva es

$$\alpha'(t) = u'(t)\Phi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\Phi_v(u(t), v(t))$$

luego

$$\vec{w} = \alpha'(0) = u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)$$

y, de aquí

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_p(\vec{w}) &= I_p(\alpha'(0)) = \\
&= \big(u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)\big) \cdot \big(u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)\big) = \\
&= u'(0)^2 E(q) + 2u'(0)v'(0)F(q) + v'(0)^2 G(q)
\end{aligned}
$$

siendo E, F y G campos diferenciables definidas en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Por tanto, la primera forma fundamental respecto a la base asociada a la parametrización Φ se expresa en forma matricial

$$
\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}
$$

siendo los coeficientes

$$
E = \Phi_u \cdot \Phi_u; \quad F = \Phi_u \cdot \Phi_v; \quad G = \Phi_v \cdot \Phi_v
$$

Ejemplos

- Un cilindro se puede parametrizar "elevando" en el eje z la circunferencia $\mathbb{S}^1$ apoyada en el plano xy.

  $$\Phi(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) \text{ con } 0 < \theta < 2\pi, \; -\infty < z < \infty$$

  La base del plano tangente $T_p(S)$ para esta parametrización es

  $$\Phi_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \quad \Phi_z = (0, 0, 1)$$

  por tanto la primera fundamental I_p es

  $$E = \Phi_\theta \cdot \Phi_\theta = 1; \quad F = \Phi_\theta \cdot \Phi_z = 0; \quad G = \Phi_z \cdot \Phi_z = 1$$

- Para la parametrización habitual de la esfera $\mathbb{S}^2(r)$

  $$\Phi(\theta, \varphi) = (r \operatorname{sen}\theta \, \cos\varphi, r \operatorname{sen}\theta \, \operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta)$$

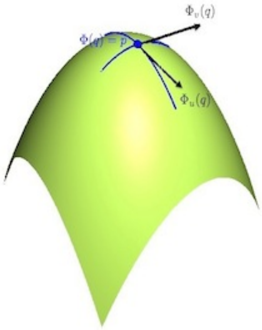
  la primera forma fundamental es

  $$E = r^2; \quad F = 0; \quad G = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Aplicaciones

Conociendo la primera forma fundamental de una superficie podemos conocer la longitud y ángulo de curvas sobre ella.

• Así, si $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ es una curva contenida en la superficie, su longitud de arco es



$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G} \, dt$$

Aplicaciones

- El ángulo que forman dos curvas α y β que se cortan en un punto en $t = t_0$ está definido por

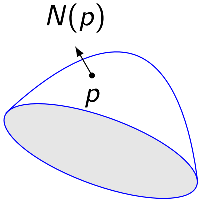
$$\cos\theta = \frac{\alpha'(t_0)\cdot\beta'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|\,\|\beta'(t_0)\|}$$

- Curvas coordenadas. Dado un punto $p = \Phi(q)$ de una superficie, las *curvas coordenadas* en p son las que tienen por vectores tangentes $\Phi_u(q)$ y $\Phi_v(q)$.

Por lo anterior, es fácil ver que las curvas coordenadas en un punto forman un ángulo ϕ tal que

$$\cos\phi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Dada una parametrización Φ de una superficie regular, en cada punto $\Phi(q) = p \in S$, el producto vectorial $\Phi_u(q) \times \Phi_v(q)$ define una función de S en $\mathbb{R}^3$ que recibe el nombre de **producto vectorial fundamental**.



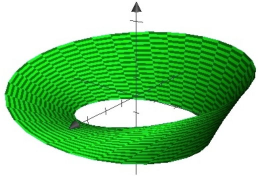
Este vector es ortogonal a $T_p(S)$ y nos permite definir un **vector normal unitario**

$$N_p = \frac{\Phi_u(q) \times \Phi_v(q)}{\|\Phi_u(q) \times \Phi_v(q)\|}$$

cuyo sentido depende de la parametrización elegida de la superficie en el entorno del punto p.

Decimos que una **superficie es orientable** si podemos encontrar una famila de parametrizaciones que recubran toda la superficie de forma que si un punto queda cubierto por dos parametrizaciones, éstas definen la misma orientación.

Existen superficies que no son orientables. Por ejemplo, la **cinta de Möbius**. Esta superficie se puede construir a partir de un rectángulo plano (una cinta) identificando dos lados opuestos pero en sentido invertido.



Teorema

Una superficie regular es orientable si y solo existe un campo vectorial diferenciable $N\colon S \to \mathbb{R}^3$ *donde cada* $N(p)$ *es un vector normal unitario.*

Obsérvese que las imágenes $N(p)$ son puntos de la esfera $\mathbb{S}^2$, por tanto se puede considerar que la aplicación N está definida

$$N\colon S \to \mathbb{S}^2$$

y recibe el nombre de aplicación de Gauss.
La diferencial de la aplicación de Gauss, también llamada **endomorfismo u operador de Weingarten** es una aplicación lineal entre los planos tangentes de ambas superficie

$$dN_p\colon\ T_p(S) \to T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) \approx T_p(S)$$

El operador de Weingarten, dN_p, mide la tasa de variación del vector normal unitario en las proximidades de p en las posibles direcciones del plano tangente en p.

Relación entre el operador de Weingarten y las segundas derivadas de Φ

Sea $\Phi \colon U \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S con $\Phi(u,v) = p$ y sea $N(u,v) = N_p$ la aplicación de Gauss, entonces

1. $N_u \cdot \Phi_u = -N \cdot \Phi_{uu}$
2. $N_u \cdot \Phi_v = N_v \cdot \Phi_u = -N \cdot \Phi_{uv}$
3. $N_v \cdot \Phi_v = -N \cdot \Phi_{vv}$

Teorema

La diferencial de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta, es decir, para dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p(S)$ se cumple $dN_p(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot dN_p(\vec{w})$. Esto implica que dN_p es diagonalizable.

Curvaturas

Al ser dN_p diagonalizable, tienen sentido:

1. La existencia de una base ortonormal de autovectores de dN_p, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, cuyos vectores reciben el nombre de direcciones principales.
2. Los valores k_1 y k_2, opuestos de los valores propios de dN_p reciben el nombre de curvaturas principales, es decir,

$$dN_p(\vec{e}_1) = -k_1\vec{e}_1, \quad dN_p(\vec{e}_2) = -k_2\vec{e}_2$$

3. El determinante de la diferencial de la aplicación de Gauss

$$K = \det dN_p = (-k_1)(-k_2) = k_1 k_2$$

   recibe el nombre de curvatura de Gauss. (**Nota**: La curvatura de Gauss K no depende de la orientación, es decir, de la elección del vector normal unitario N).
4. La media aritmética de las curvaturas principales recibe el nombre de curvatura media y se representa por H.

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Segunda forma fundamental y cálculo de las curvaturas

Segunda forma fundamental

Al ser dN_p autoadjunto define una nueva forma cuadrática en $T_p(S)$

$$\mathrm{II}_p(\vec{w}) = -dN_p(\vec{w}) \cdot \vec{w}$$

que recibe el nombre de segunda forma fundamental.

Si $\Phi(q) = p$ y α es una curva tal que $\alpha(0) = p$,

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_p(\vec{w}) &= -dN_p(\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0) = \\ &= -\left(N_u(q)u'(0) + N_v(q)v'(0)\right) \cdot \left(u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)\right) = \\ &= u'(0)^2 e(q) + 2u'(0)v'(0)f(q) + v'(0)^2 g(q)\end{aligned}$$

siendo e, f, g campos escalares definidos

$$
\begin{aligned}
e &= -N_u \cdot \Phi_u = N \cdot \Phi_{uu} \\
f &= -N_u \cdot \Phi_v = -N_v \cdot \Phi_u = N \cdot \Phi_{uv} \\
g &= -N_v \cdot \Phi_v = N \cdot \Phi_{vv}
\end{aligned}
$$

La segunda forma fundamental respecto a la base asociada a la parametrización Φ se expresa en forma matricial

$$
\mathrm{II}_p = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}
$$

Cálculo del operador de Weingarten

A partir de la segunda forma fundamental podemos calcular la matriz de la aplicación lineal dN_p que, respecto de la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, será una matriz

$$dN_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ y $\beta(t) = (\overline{u}(t), \overline{v}(t))$ son curvas que pasan por el punto p de la superficie, por la primera y segunda forma fundamental

$$dN_p(\alpha') \cdot \beta' = -\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{v}' \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{v}' \end{pmatrix}$$

de donde

$$dN_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Y de aquí obtenemos las fórmulas de las curvaturas

Curvatura de Gauss:

$$K = \det dN_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Curvatura media:

$$H = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Curvaturas principales:

$$k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Andalucía Tech

Ejemplo. Calculemos las curvaturas de la esfera $\mathbb{S}^2(r)$

Parametrizamos de la forma usual

$$\Phi(\theta,\varphi) = (r \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta), \quad (\theta,\varphi)\in(0,\pi)\times(0,2\pi)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\theta &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -r\operatorname{sen}\theta)\\
\Phi_\varphi &= (-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0)\\
\Phi_{\theta\theta} &= (-r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, -r\cos\theta)\\
\Phi_{\theta\varphi} &= (-r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta\cos\varphi, 0)\\
\Phi_{\varphi\varphi} &= (-r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, 0)
\end{aligned}$$

de donde un vector normal unitario es

$$N = \frac{\Phi_\theta\times\Phi_\varphi}{\|\Phi_\theta\times\Phi_\varphi\|} = (\operatorname{sen}\theta\ \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

Luego a primera forma fundamental:

$$E = r^2, \qquad F = 0, \qquad G = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

y la segunda forma fundamental:

$$e = N \cdot \Phi_{\theta\theta} = -r, \quad f = N \cdot \Phi_{\theta\varphi} = 0, \quad g = N \cdot \Phi_{\varphi\varphi} = -r \operatorname{sen}^2 \theta$$

por tanto la diferencial dN_p es

$$dN_p = -\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Las curvaturas principales (puesto que dN_p viene diagonalizada) son,

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{r}$$

y la curvatura de Gauss y curvatura media son, respectivamente,

$$K = \frac{1}{r^2}, \qquad H = -\frac{2/r}{2} = -\frac{1}{r}$$

Interpretación de la curvatura de Gauss

Un punto p de una superficie regular S se clasifica, según la curvatura de Gauss K_p en dicho punto. Decimos que p es:

- Un punto elíptico si $K_p > 0$.
- Un punto parabólico si $K_p = 0$ con $dN_p \neq 0$.
- Un punto hiperbólico si $K_p < 0$.
- Un punto llano si $dN_p = 0$.

Nota. Como hemos visto, en la esfera todos los puntos son elípticos.

Puntos umbílicos.

Un punto p de una superficie se dice que es umbílico (o umbilical) si sus curvaturas principales son iguales, es decir, ${k_1}_p = {k_2}_p$. En particular los puntos llanos son umbílicos.

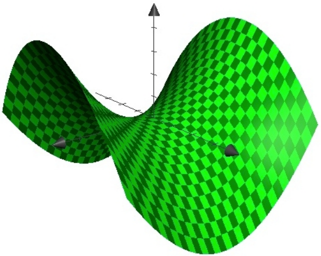
Nota. También hemos visto que todos los puntos de una esfera son umbílicos.

Ejercicios

- Comprueba que todos los puntos del paraboloide hiperbólico

$$z = x^2 - y^2$$

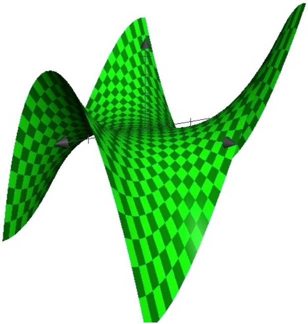
son puntos hiperbólicos.



- Comprueba que los puntos de la "silla del mono", que es una superficie definida por la gráfica de la función

$$z = x^3 - 3xy^2$$

son todos hiperbólicos, excepto el punto $p = (0, 0, 0)$, que es un punto llano.

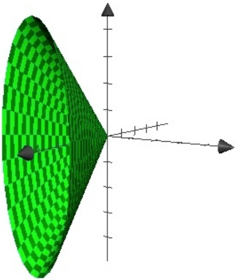


- Comprueba que los puntos de la rama del cono elíptico definido

$$z^2 = x^2 - 9y^2, x > 0$$

son todos parabólicos.

Nota: Usa la parametrización $\begin{cases} x = 3r \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 3r\cos\theta \end{cases}$ $\quad r \in (0, \infty), \theta \in (0, 2\pi)$



OCW UMA

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

2014.