

Matemáticas III

Tema 3

Geometría diferencial

Rodríguez Sánchez, F.J.

Muñoz Ruiz, M.L.

Merino Córdoba, S.



2014. OCW-Universidad de Málaga, <http://ocw.uma.es>. Bajo licencia Creative Commons Attribution- NonComercial-ShareAlike 3.0 Spain



Índice

1. Curvas regulares en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	1
1.1. Curvas diferenciables	3
1.2. Curvas regulares	6
1.3. Parametrización por longitud de arco	9
2. El triedro de Frenet	10
2.1. Curvatura y torsión	10
2.2. El triedro de Frenet en una parametrización arbitraria	14
3. Superficies	15
3.1. Superficies regulares	16
3.2. Superficies parametrizadas.	17
3.3. El plano tangente	18
4. Formas fundamentales y curvaturas	19
4.1. La primera forma fundamental	19
4.2. Segunda forma fundamental. Curvaturas	21
4.3. Interpretación de la curvatura de Gauss	27

1. Curvas regulares en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Como sabemos, los espacios \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , son espacios vectoriales euclídeos, es decir, espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{R} dotados de producto escalar, que denotamos $\vec{v} \cdot \vec{w}$. La *norma o módulo* de un vector es la raíz cuadrada (positiva) del producto escalar por sí mismo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de \mathbb{R}^3 es ortonormal si cada par de vectores distintos son ortogonales y cada vector es unitario, es decir: 1) $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ para cada $i \neq j$, y 2) $\|\vec{e}_i\| = 1$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Ejemplo. Las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 son bases ortonormales.

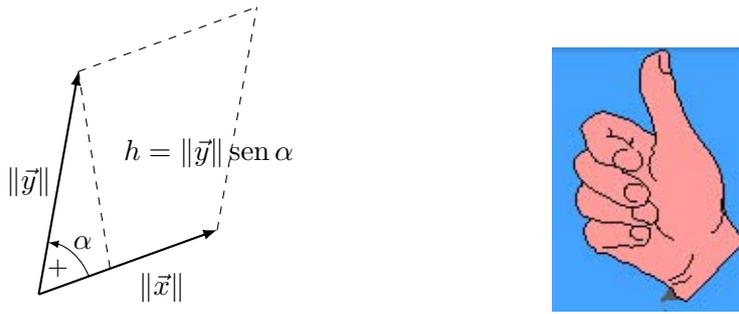


Figura 1: Reglas del “sentido horario” y de la “mano derecha”.

El producto escalar y la norma, respecto de una base ortonormal, toman las expresiones

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = v^t w$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

También sabemos que se define el coseno de un ángulo a partir del producto escalar y los módulos de los vectores que forman. Así, si α es el ángulo que forman los vectores \vec{v} y \vec{w} , se tiene la siguiente expresión

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha$$

Orientación. Cualquier base de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 tendrá determinante positivo o negativo (nunca nulo), y esto establece una relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases: “*dos bases están relacionadas cuando sus determinantes tienen el mismo signo*”. Elegida una base diremos que tiene **orientación positiva** si está en la clase de la base canónica (determinante positivo) y **orientación negativa** en caso contrario.

- Si una base de \mathbb{R}^2 $\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ de \mathbb{R}^2 tiene orientación positiva su determinante $x_1 y_2 - x_2 y_1$ nos da el área del paralelogramo definido por dicha base. Además, el giro del primer vector hacia el segundo se hace en *sentido contrario a las agujas del reloj*. Un giro de esta forma se dice que es un **giro (o ángulo) positivo**.
- En \mathbb{R}^3 , a veces se usa la llamada “*regla del sacacorchos*” para determinar si una base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ tiene orientación positiva: “*si al girar \vec{x}_1 hacia \vec{x}_2 (por el ángulo menor) un sacacorchos sigue la dirección de \vec{x}_3* ”. También es muy conocida “*la regla de la mano derecha*” (véase figura 1).

Producto vectorial. En un espacio euclídeo tridimensional orientado tenemos una operación añadida de vectores. Observamos que el *seno del ángulo* (en sentido positivo) de dos vectores independientes, junto con sus normas, nos determina el área del paralelogramo que definen. Así, si α es el ángulo entre ellos, tenemos

$$\text{Area}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \alpha$$

Nota. Señalemos que (en \mathbb{R}^3) el determinante de una base orientada positivamente es el volumen del paralelepípedo que determinan: $\text{Volumen}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Definimos el **producto vectorial** de dos vectores $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ del espacio euclídeo tridimensional como el único vector $\vec{x} \times \vec{y}$ que verifica:

1. $\vec{x} \times \vec{y}$ es ortogonal a ambos vectores,
2. Si \vec{x}, \vec{y} son independientes, $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ es una base orientada positivamente.
3. $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \alpha$.

Del punto 3 se deduce que si los vectores $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ son linealmente dependientes, entonces $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ y si \vec{x}, \vec{y} son independientes, $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \text{Area}(\vec{x}, \vec{y})$.

Propiedades inmediatas del producto vectorial.

1. El producto vectorial es antisimétrico: $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.
2. Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}, \vec{y}$ son linealmente dependientes.

Expresión analítica del producto vectorial. Dada una base ortonormal de \mathbb{R}^3 orientada positivamente, con vectores \vec{x}, \vec{y} de coordenadas, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Entonces, el producto escalar tiene las siguientes coordenadas, respecto a dicha base ortonormal

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Como consecuencia directa de esta expresión se tiene:

Más propiedades del producto vectorial.

1. El producto vectorial es una aplicación bilineal $V \times V \rightarrow V$, es decir,

$$\begin{aligned} \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} \\ \lambda \vec{x} \times \vec{y} &= \vec{x} \times \lambda \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) \end{aligned}$$

2. Regla de exclusión: $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$.
3. Identidad de Jacobi: $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{0}$.
4. Producto mixto: $\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1.1. Curvas diferenciables

Llamaremos **curva parametrizada** a una función continua de un intervalo $I = (a, b)$ de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

admitiendo la posibilidad de que $a = -\infty$ o/y $b = +\infty$.

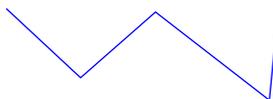


Figura 2: La poligonal es una curva continua y diferenciable a trozos.

En geometría diferencial interesa que la función α sea diferenciable, es más, salvo que se diga lo contrario se supone que α sea diferenciable un número infinito de veces. Si esto ocurre se dice que α es de clase C^∞ .

Toda curva parametrizada en el espacio se puede entender, entonces, como un vector cambiante, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, llamado *vector de posición*, donde x, y, z son funciones reales definidas en el intervalo $I = (a, b)$ y al valor $t \in I$ se le llama *parámetro*.

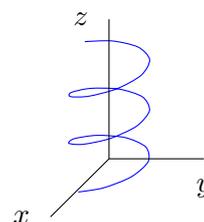
Cuando α es diferenciable, las funciones x, y, z son derivables (por tanto, continuas). La derivada del vector de posición $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es un **vector tangente a la curva** α en t . En un sentido físico a $\alpha'(t)$ se le llama **velocidad** en t .

Al subconjunto $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ (entendido como conjunto de puntos) se le llama **traza de la curva** α , que es la “*imagen*” que tenemos de la curva. Dos curvas son equivalentes si tienen la misma traza.

Ejemplo. La *hélice* es una curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

con $a > 0$ y $b > 0$, que está definida en todo el intervalo real y cuya traza está contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$.



Curvas planas Son aquellas curvas cuya traza está contenida en un plano de \mathbb{R}^3 . Se pueden entender también como curvas definidas en \mathbb{R}^2 , es decir

$$\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Las funciones $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continuas se pueden entender como curvas parametrizadas si se expresan como $\alpha(t) = (t, f(t))$. Evidentemente, si f es diferenciable también lo es α .

Ejemplo. La semicircunferencia de radio 1 es una curva plana la podemos expresar con dos parametrizaciones

$$\alpha: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ definida } \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

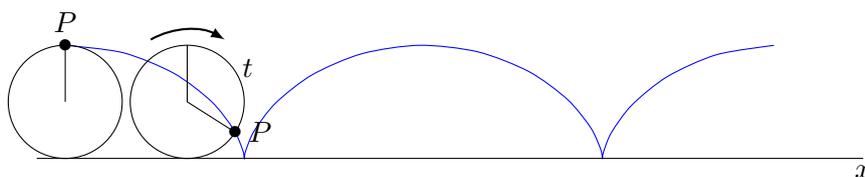
o bien

$$\beta: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ definida } \beta(t) = (t, +\sqrt{1-t^2})$$

Observa que los vectores tangentes en cada punto tienen la misma dirección (están en la misma recta), pero, en cambio, tienen sentido contrario. Cuando esto ocurre se dice que ambas curvas recorren su traza *en sentido contrario*.

Ejercicio. Representamos por $\mathbb{S}^1(r)$ a la circunferencia de radio r centrada en el origen de coordenadas. Encuentra dos parametrizaciones distintas de $\mathbb{S}^1(r)$ de forma que ambas recorran la circunferencia en el mismo sentido.

Ejercicio. Encuentra una curva parametrizada cuya traza sea *la cicloide* que son los puntos del plano que recorre un punto fijo P sobre una circunferencia (de radio 1) que se desliza girando sobre una recta.



Las curvas de \mathbb{R}^3 que no son planas se llaman **curvas alabeadas**.

1.1.1. Derivada del producto escalar

Dadas dos curvas α y β definidas en el mismo intervalo $I = (a, b)$ tiene sentido la función producto escalar

$$\alpha \cdot \beta: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida $t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$. El siguiente teorema nos dice que esta función es derivable y nos da una expresión para la derivada similar a la *regla de Leibniz*.

Teorema. Si $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ son curvas diferenciables, entonces la función real $\alpha \cdot \beta$ es derivable y

$$(\alpha \cdot \beta)'(t) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$$

Corolario. Si α es una curva parametrizable diferenciable que no se anula, su norma es una función derivable y además

$$\frac{d\|\alpha(t)\|}{dt} = \frac{\alpha(t) \cdot \alpha'(t)}{\|\alpha(t)\|}$$

Ejemplo. Como aplicación del corolario anterior probamos que las únicas curvas con traza contenidas en una esfera centrada en el origen son aquellas que no se anulan y en las que, en cada punto, su vector de posición es ortogonal a su vector tangente.

SOLUCIÓN: Si $\alpha(t)$ está contenida en una esfera centrada en el origen, entonces $\|\alpha(t)\| = r$ constante, por tanto

$$\frac{d\|\alpha(t)\|}{dt} = 0 \Rightarrow \alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \Rightarrow \alpha(t) \perp \alpha'(t)$$

Inversamente, si $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ en cada t , aplicando el corolario, tenemos que $\frac{d\|\alpha\|}{dt} = 0$, luego $\|\alpha\| = r$ es constante y, por tanto, $\alpha(t)$ está contenida en la esfera centrada en el origen y de radio r .

Ejercicio (M. do Carmo). Prueba que si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva que no se anula en ningún punto y $\alpha(t_0)$ es un punto más cercano al origen, entonces $\alpha'(t_0)$ es ortogonal a $\alpha(t_0)$. (En estas condiciones, se dice que la velocidad es ortogonal a la posición en un punto).

1.1.2. Derivada del producto vectorial

Dadas dos curvas diferenciables α y β definidas en un mismo intervalo $I = (a, b)$ tiene sentido la nueva curva definida por el producto vectorial

$$\alpha \times \beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definida de manera natural $(\alpha \times \beta)(t) = \alpha(t) \times \beta(t)$, que también será diferenciable y se cumple de nuevo la regla de Leibniz.

Teorema. Si $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ son curvas diferenciables, entonces la curva $\alpha \times \beta$ es diferenciable y

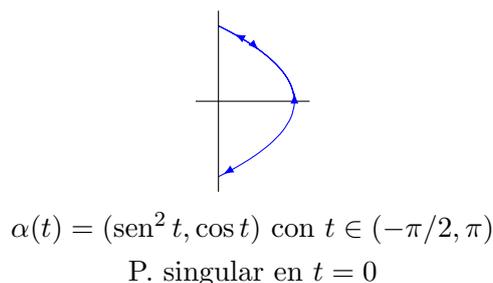
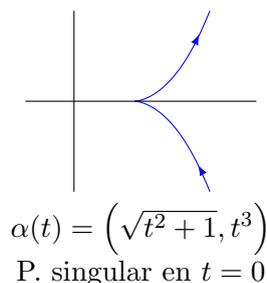
$$(\alpha \times \beta)'(t) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$$

1.2. Curvas regulares

Para muchas aplicaciones es muy importante que la curva tenga sentido una única recta tangente en cada punto. Para que esto se pueda garantizar es suficiente que la curva sea diferenciable y el vector tangente no se anule en cada punto.

Una curva diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene un **punto singular** en $t_0 \in I$ si $\alpha'(t_0) = 0$. Una curva α se dice que es **regular** si no tiene puntos singulares, es decir, $\alpha'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$.

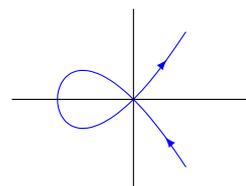
Ejemplos. Algunas curvas diferenciables no son regulares, como muestran los siguientes ejemplos



Los puntos singulares algunas veces se ven claramente en la traza porque se ven como “picos”. Otras veces no es tan evidente, en la segunda de las curvas anteriores, en un entorno de $t = 0$ la curva no es inyectiva y los vectores tangentes tienen un cambio de sentido.

Ejemplo. Una curva regular no necesariamente es inyectiva. Este ejemplo muestra la traza de la curva plana

$$\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$$



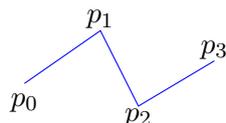
que, efectivamente, es regular, como se puede comprobar y, claramente, no es inyectiva porque $\alpha(-1) = \alpha(1) = (0, 0)$.

Ejercicio. Comprueba que la cicloide del ejercicio de la página 4 no es regular en \mathbb{R} . Restringe la curva a un intervalo abierto en la que no tenga puntos singulares.

1.2.1. Longitud de una curva regular

Comenzamos definiendo la longitud de un segmento \overline{pq} en el espacio \mathbb{R}^3 como la norma del vector que define, es decir

$$\ell(\overline{pq}) = \|q - p\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$



La longitud de una poligonal P es la suma de las longitudes de los segmentos que la forman:

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^n \ell(\overline{p_{i-1}p_i})$$

Caminos. Con mucha frecuencia se habla de *camino* entre dos puntos p, q de \mathbb{R}^3 a la traza de cualquier *curva* α definida en un intervalo *cerrado* $[a, b]$ sobre \mathbb{R}^3 que cumple $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Si $p = q$ se dice que es un **camino cerrado**, en caso contrario se dice que es un **camino abierto**. Evidentemente las poligonales son caminos. Un camino abierto se dice que es **simple** si se parametriza con una función inyectiva. Un camino cerrado $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice que es simple si α es inyectiva restringida al intervalo abierto (a, b) . Un camino cerrado simple también se llama **curva de Jordan**.

Un camino o una curva α definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, diremos que es diferenciable cuando es restricción de una curva diferenciable definida en un intervalo abierto (a', b') que contiene al cerrado, $\alpha: (a', b') \supseteq [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Algunos caminos están definidos como “*curvas a trozos*” y tiene sentido, entonces, hablar del vector tangente $\alpha'(t)$, siempre que t sea del interior de uno de los intervalos que define un “trozo”.

Partición. Si $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable, una partición del intervalo, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, define una poligonal P próxima a la curva α de puntos

$$\{\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)\}$$

cuya longitud

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

es próxima a la longitud de α entre a y b .

Se puede probar que si α es una curva regular, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede encontrar una partición P de forma que

$$\left| \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt - \ell(P) \right| \leq \varepsilon$$

que justifica la definición de curvas diferenciables en un intervalo cerrado y además nos permite dar la definición de longitud de una curva.

Longitud de una curva regular. Si $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular se define su longitud en intervalo como

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Ejemplo. La circunferencia de radio r se puede considerar como una curva parametrizada cerrada

$$\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{con } \alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

su longitud será entonces

$$l = \int_0^{2\pi} \|(-r \sin t, r \cos t)\| dt = \int_0^{2\pi} r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2\pi r$$

Expresiones de la longitud de una curva.

- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$ (es decir, podemos extenderla a un intervalo abierto $I \supset [a, b]$ en el que f sea derivable), entonces la longitud de la curva que define la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

- Si una curva regular plana se expresa mediante su ecuación en polares $r = r(\theta)$ en el intervalo $[\theta_0, \theta_1]$, comprueba que su longitud es

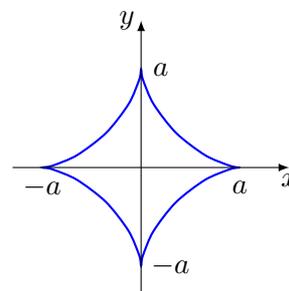
$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

Ejemplo. Calculemos la longitud del astroide de ecuación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ parametrizada como:

$$\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

Como no es una curva regular la consideramos dividida en cuatro trozos en la sí es regular. Por tanto (por simetría) la longitud total L será:

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt = 12a \left[-\frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a \end{aligned}$$



Funciones hiperbólicas. En ingeniería son importantes las llamadas funciones hiperbólicas o también funciones trigonométricas hiperbólicas. A partir del *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* definidos

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad y \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

se derivan el resto de las funciones hiperbólicas

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

La figura 3 representa las gráficas de las principales funciones hiperbólicas.

Ejercicio. Verifica la siguiente fórmula (parecida al teorema fundamental de la trigonometría)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Además comprueba que $(\sinh x)' = \cosh x$ y $(\cosh x)' = \sinh x$. Encuentra las derivadas de las restantes funciones hiperbólicas.

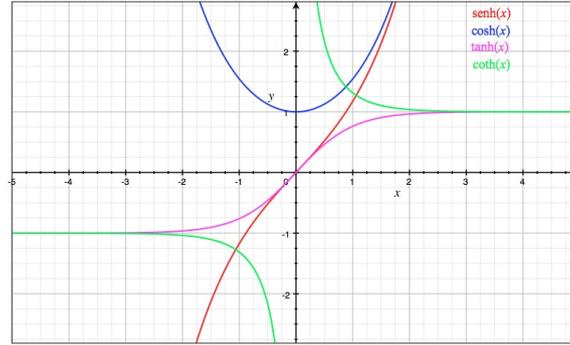


Figura 3: Funciones hiperbólicas.

Catenaria. Una catenaria que representa un cable que cuelga de dos postes a la misma altura tiene por ecuación

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

El diagrama muestra una curva azul simétrica respecto al eje y, representando un cable colgando entre dos postes. Los postes están representados por líneas verticales discontinuas en x = -1 y x = 1. El eje x está etiquetado con -1 y 1.

donde a es una constante que depende de la tensión y del peso del cable. Parametriza la catenaria y calcula la longitud de su arco entre los valores $x = -1$ y $x = 1$.

Espiral de Arquímedes. Calcula la longitud de n vueltas de la espiral de Arquímedes que tiene por ecuaciones polares

$$r = a\theta, \quad \text{con } \theta \in [0, 2n\pi]$$

El diagrama muestra una espiral azul que comienza en el origen (0,0) y se enrolla hacia afuera en sentido horario. El eje x y el eje y están etiquetados.

INDICACIÓN: Usa CAS.

1.3. Parametrización por longitud de arco

Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada en el abierto I y $u: I \rightarrow J$ es una función biyectiva entre abiertos, derivable y con inversa derivable (o sea, un difeomorfismo), entonces la función

$$\beta = \alpha \circ u^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es una nueva curva diferenciable que tiene la misma traza que α , y se dice que es una **reparametrización** de la curva.

Puesto que entre dos intervalos abiertos siempre se puede definir un difeomorfismo, una curva se puede reparametrizar a cualquier intervalo.

Ejemplo. Vamos a reparametrizar el arco de circunferencia $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ desde el intervalo $I = (0, \pi)$ al intervalo $(0, 1)$. La función $u(t) = \frac{t}{\pi}$ es un difeomorfismo $(0, \pi) \rightarrow (0, 1)$. Como $t = \pi u$ tenemos que

$$\beta(u) = (\cos(\pi u), \sin(\pi u)), \quad \text{con } u \in (0, 1)$$

es la curva reparametrizada buscada.

Para curvas regulares existe una reparametrización especial que nos facilitará el estudio de las curvas. Si $t_0 \in (a, b)$ es un punto cualquiera del intervalo abierto la función

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(x)\| dx$$

es una función derivable y biyectiva de I en $J = s(I)$ puesto que $\|\alpha'(t)\| > 0$, que implica que s es estrictamente creciente. A la reparametrización

$$\beta = \alpha \circ s^{-1}$$

se le llama **parametrización por longitud de arco** de la curva desde el punto $\alpha(t_0) = \beta(0)$. Nótese que toda curva regular es parametrizable por longitud de arco.

Teorema. Una curva regular está parametrizada por longitud de arco si y solo si los vectores tangentes en cada punto son unitarios.

PRUEBA: Supongamos que β es una reparametrización de α por longitud de arco, entonces $\|\beta'(s)\| = \frac{1}{s'(t)}\|\alpha'(t)\|$. Por el teorema fundamental del cálculo tenemos $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, luego $\|\beta'(s)\| = 1$.

Inversamente, si α es una curva regular que cumple $\|\alpha'\| = 1$, tenemos que la función longitud de arco es

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$$

luego, el parámetro coincide con la longitud de arco medido desde un cierto punto $\alpha(t_0)$. \square

Corolario. Si una curva regular está parametrizada por longitud de arco, entonces el valor del parámetro nos da la longitud de la curva desde un punto inicial $\alpha(0)$ hasta el punto determinado por el parámetro.

Ejemplo. La circunferencia de radio 1 parametrizada de la forma habitual $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ es una parametrización por longitud de arco puesto que

$$\|\alpha'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

Ejercicio. Da una parametrización por longitud de arco de una circunferencia de radio $r > 0$.

2. El triedro de Frenet

2.1. Curvatura y torsión

Para las definiciones que vienen a continuación suponemos que la curva $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular de clase C^∞ y está parametrizada por longitud de arco, entonces los vectores tangentes en cada punto $\alpha'(s)$ son unitarios y podemos calcular los vectores $\alpha''(s)$ que son ortogonales con los tangentes.

Curvatura. Si α es una curva regular parametrizada por longitud de arco en el intervalo (a, b) , llamamos *curvatura* de α a la función $\kappa: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Observación. La curvatura es una función no negativa, pero podría ser cero en algún punto. Un punto donde la curvatura se anula se dice que es un punto **singular de orden 1**. En este contexto, los puntos con $\alpha'(s) = 0$ se dicen *singulares de orden 0*.

Las curvas de curvatura constante cero son las rectas. Observa que una recta se puede representar como $\alpha(s) = s\vec{t} + \vec{v}$ donde \vec{t} y \vec{v} son vectores constantes y $\|\vec{t}\| = 1$, que define una parametrización por longitud de arco. De aquí que las rectas tienen curvatura 0 en todos sus puntos.

Inversamente, si una curva tiene curvatura 0 en todos sus puntos el vector tangente $\alpha'(s) = \vec{t}$ es constante, luego la curva tiene ecuación $\alpha(s) = s\vec{t} + \vec{v}$, cuya traza es una recta (o un segmento recto).

Vector normal. Dada una curva regular α , en cada punto no singular de orden 1, se define el *vector normal unitario* $\vec{n}(s)$ como el vector de módulo 1 ortogonal al vector tangente $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$, es decir,

$$\vec{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$$

Plano osculador. En cada punto de curvatura no nula los vectores ortogonales $\vec{t}(s)$ y $\vec{n}(s)$ definen un plano que recibe el nombre de *plano osculador* en s .

Más observaciones.

1. Si se cambia de parametrización por longitud de arco, el vector \vec{t} puede cambiar de signo, pero el vector \vec{n} siempre se conserva (ejercicio).
2. En los puntos singulares de orden 1 (curvatura nula) no existe el plano osculador.
3. Si una curva es plana, el plano osculador en cada punto es el plano que contiene la curva.

Ejemplo. La ecuación de una hélice parametrizada por longitud de arco es

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right)$$

siendo a, b positivos y $c^2 = a^2 + b^2$. Su vector tangente (unitario) es

$$\vec{t}(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right).$$

El vector segunda derivada es $\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right)$ del que se obtiene la curvatura y el vector normal

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2} \quad \text{y} \quad \vec{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right)$$

Dejamos como ejercicio el cálculo del *plano osculador*.

Radio de curvatura. Si una curva tiene curvatura distinta de cero en todos sus puntos, a la función $R = \frac{1}{\kappa}$ se le llama *radio de curvatura*. Obsérvese que si la curvatura es pequeña ($\kappa \rightarrow 0$), el radio de curvatura tiende a ∞ .

Ejemplo. Una circunferencia de radio r tiene radio de curvatura constante $R = r$.

Círculo osculador. En cada punto de curvatura no nula de la curva, definimos el *círculo osculador* como aquel que está contenido en el plano osculador, con centro sobre la recta normal (llamado *centro de curvatura*) en el sentido marcado por el vector normal y de radio $R = \frac{1}{\kappa}$ (radio de curvatura).

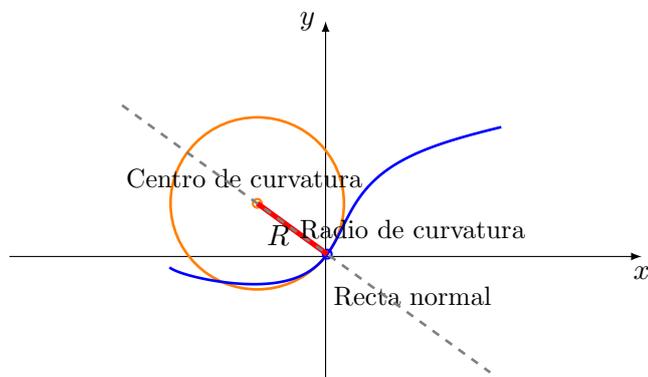


Figura 4: El círculo osculador.

Vector binormal. En caso de existir el plano osculador en un punto s , el vector resultante del producto vectorial $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ es unitario y ortogonal a ambos vectores o, lo que es lo mismo, normal al plano osculador.

Este vector recibe el nombre de *vector binormal*, y su derivada $\vec{b}'(s)$ mide como cambia el plano osculador cuando se cambia de punto. La regla de Liebniz nos permite calcular \vec{b}' :

$$\vec{b}'(s) = \vec{t}'(s) \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s)$$

que nos dice que $\vec{b}'(s)$ tiene la dirección de $\vec{n}'(s)$.

Torsión. Si $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular sin puntos singulares de orden 1, llamamos **torsión** a la función $\tau: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

$$\vec{b}'(s) = -\tau(s)\vec{n}(s)$$

Por tanto $\tau(s) = \mp \|\vec{b}'(s)\|$ y su signo depende que \vec{b}' tenga el mismo sentido o sentido contrario que el vector \vec{n} .

Las curvas planas son de torsión nula. El plano osculador de una curva plana es invariante en cada punto, por tanto, el vector binormal \vec{b} es constante. Esto nos dice que *las curvas planas tienen torsión nula*.

Inversamente, si una curva tiene torsión nula en todos sus puntos quiere decir que $\vec{b} = \vec{v}$ constante. Por tanto los vectores $\vec{t}(s)$ y $\vec{n}(s)$ están todos contenidos en el plano ortogonal \vec{v}^\perp , por tanto la curva α está contenida en dicho plano, es decir, *es una curva plana*.

Ejemplo. El vector binormal de la hélice definida en el ejemplo anterior es

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

y su derivada es $\vec{b}'(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right)$, de donde la torsión es $\tau(s) = \frac{b}{c^2}$.

El triedro de Frenet. Para cada valor del parámetro s tenemos, entonces, una base ortonormal

$$\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$$

orientada positivamente que nos dan las direcciones *tangente*, *normal principal* y *binormal*, respectivamente. Esto se puede ver como un triedro en cada punto:

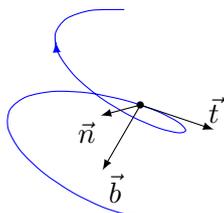


Figura 5: Triedro de Frenet

- El plano $\vec{t}(s)\vec{n}(s)$, que ya conocemos, es el plano osculador.
- El plano $\vec{t}(s)\vec{b}(s)$ es el plano rectificante.
- Y el plano $\vec{n}(s)\vec{b}(s)$ es el plano normal.

dicho triedro se conoce con el nombre de *triedro de Frenet*.

Por otro lado, las derivadas de los vectores \vec{t} y \vec{b} nos determinan, respectivamente, la curvatura y la torsión de una curva. La derivada del vector \vec{n} no aporta ningún nuevo elemento, puesto que, como $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{n}'(s) &= \vec{b}'(s) \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \vec{t}'(s) = \\ &= -\tau(s)\vec{n}(s) \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \kappa(s)\vec{n}(s) = \\ &= \tau(s)\vec{b}(s) - \kappa(s)\vec{t}(s) \end{aligned}$$

Así el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales es conocido como **las ecuaciones de Frenet-Serret**

$$\begin{cases} \vec{t}' = \kappa\vec{n} \\ \vec{n}' = \tau\vec{b} - \kappa\vec{t} \\ \vec{b}' = -\tau\vec{n} \end{cases}$$

La teoría de ecuaciones diferenciales nos dice que la curvatura κ y la torsión τ son elementos suficientes para determinar una curva en el espacio, esto es conocido como el *teorema fundamental de la teoría local de curvas*.

Teorema. Dadas dos funciones reales derivables en un intervalo abierto I , $\kappa(s) > 0$ y $\tau(s)$ existe una curva parametrizada regular por longitud de arco α definida en dicho intervalo I que verifica que su curvatura es κ y su torsión es τ . Además esta curva es única salvo movimientos rígidos en el espacio.

Corolario. Una curva plana viene determinada por su curvatura, salvo traslaciones, rotaciones y simetrías.

2.2. El triedro de Frenet en una parametrización arbitraria

Representamos por $\alpha(t)$ una curva regular parametrizada de forma arbitraria y por $\alpha(s)$ la misma curva parametrizada por longitud de arco. Tenemos dos formas de obtener el vector tangente $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ que no es necesariamente un vector unitario y $\vec{t} = \frac{d\alpha}{ds}$ que si es unitario. obviamente

$$\vec{t} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \quad y \quad \vec{n} = \frac{\vec{t}'}{\|\vec{t}'\|}$$

La segunda derivada nos relaciona el vector tangente unitario con el vector normal unitario:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\vec{n} = \frac{dt}{ds} \left(\frac{1}{\|\alpha'\|} \alpha' \right)' = \frac{1}{\|\alpha'\|^2} \alpha'' - \frac{\|\alpha'\|'}{\|\alpha'\|^3} \alpha'$$

multiplicando (vectorialmente) por α' en ambos lados de la igualdad tenemos

$$\kappa\alpha' \times \vec{n} = \frac{1}{\|\alpha'\|^2} \alpha' \times \alpha'' \quad (1)$$

y comparando módulos tenemos $\kappa\|\alpha'\| = \frac{1}{\|\alpha'\|^2} \|\alpha' \times \alpha''\|$, de aquí

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que $\alpha' = \|\alpha'\|\vec{t}$ y $\vec{t} \times \vec{n} = \vec{b}$, sustituyendo en 1 nos da la expresión del vector binormal

$$\vec{b} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \quad (3)$$

y, puesto que $\vec{b} \times \vec{t} = \vec{n}$, tenemos otra expresión para el vector normal unitario

$$\vec{n} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \times \frac{1}{\|\alpha'\|} \alpha' = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|\alpha' \times \alpha''\| \|\alpha'\|} = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'\|}$$

Nos queda una expresión de la torsión. Partimos de la tercera derivada de α

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \left(\|\alpha'\|' \vec{t} + \|\alpha'\|^2 \kappa \vec{n} \right)' = \\ &= \|\alpha'\|'' \vec{t} + \|\alpha'\|' \frac{ds}{dt} \kappa \vec{n} + (\|\alpha'\|^2 \kappa)' \vec{n} + \|\alpha'\|^2 \kappa \frac{ds}{dt} (\tau \vec{b} - \kappa \vec{t}) = \\ &= A \vec{t} + B \vec{n} + \|\alpha'\|^3 \kappa \tau \vec{b} \end{aligned}$$

donde A y B son funciones. Si hacemos el producto escalar con el vector $\alpha' \times \alpha''$, teniendo en cuenta que $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ es una base ortonormal (orientada positivamente) obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha''' &= \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \begin{vmatrix} \|\alpha'\| & \|\alpha'\|' & A \\ 0 & \|\alpha'\|^2 \kappa & B \\ 0 & 0 & \|\alpha'\|^3 \kappa \tau \end{vmatrix} = \\ &= \|\alpha'\|^6 \kappa^2 \tau \end{aligned}$$

despejando $\tau = \frac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha'\|^6 \kappa^2}$, que nos da la expresión para la torsión

$$\tau = \frac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \quad (4)$$

Ejercicio. Aplica las fórmulas anteriores para calcular la curvatura y la torsión de la hélice parametrizada como

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

y comprueba que da los mismos resultados obtenidos anteriormente.

Observación. Para calcular la curvatura de una **curva plana** $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ expresamos los vectores α' y α'' de forma tridimensional, así

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left(\begin{vmatrix} y'(t) & y''(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} \right)$$

luego, para curvas en \mathbb{R}^2

$$\kappa = \frac{\text{abs} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\|\alpha'\|^3} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejercicios.

1. Calcula la curvatura de la rama de hipérbola parametrizada como:

$$\begin{aligned} x &= a \cosh t \\ y &= b \sinh t \end{aligned}$$

2. Encuentra una expresión para el vector normal \vec{n} en cada punto de una curva plana.

3. Superficies

La continuación natural del estudio geométrico de las curvas en \mathbb{R}^3 es el estudio de las superficies. La mera definición de superficie ya no es tan fácil como el de las curvas. Las curvas la hemos introducido como funciones (y después hablamos de su traza, que son puntos del espacio), en cambio las superficies la introducimos directamente como conjuntos de puntos del espacio tridimensional.

Podemos decir que una superficie es un subconjunto S no vacío de \mathbb{R}^3 en el que en cada punto $p \in S$ existe un entorno abierto U con $p \in U$ en S que es “difeomorfo” a un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Entendemos por difeomorfismo una función que es diferenciable, invertible y su inversa es también diferenciable.

Dicho de otra manera, las superficies son subconjuntos de puntos del espacio \mathbb{R}^3 que *localmente* son discos de \mathbb{R}^2 deformados en el propio espacio de una forma *lisa o suave* (sin picos).

Ejemplo. Representamos por $\mathbb{S}^2(r)$ a la esfera de radio r centrada en el origen de coordenadas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

que es una superficie. Intuitivamente en cada punto de la esfera siempre hay un entorno abierto del punto que se puede considerar un disco del plano deformado. La esfera de radio 1 la representamos simplemente por \mathbb{S}^2 .

3.1. Superficies regulares

Recuerda que, al estudiar las curvas, nos interesaban aquellas que tenían una recta tangente en cada punto, llamadas curvas regulares. Para superficies nos van a interesar las *superficies regulares*, aquellas en que en cada punto existe (sin ambigüedad) un plano tangente.

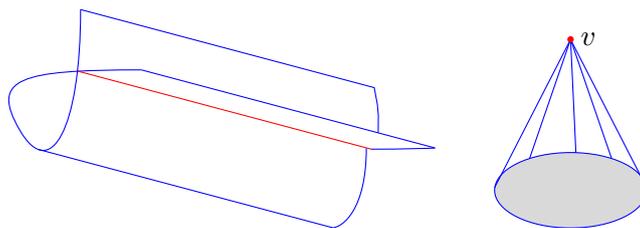


Figura 6: Superficies no regulares.

Las superficies de la figura 6 no son regulares por diferentes motivos. La superficie de la izquierda no es regular porque en cualquiera de los puntos dobles no existe un entorno en la superficie que contenga al punto y que sea difeomorfo con un disco de \mathbb{R}^2 . La superficie de la derecha (un cono) no es regular porque el vértice v no tiene definido un (único) plano tangente.

Nota: Si se suprime el vértice en el cono obtenemos una superficie que sí es regular.

Algunos teoremas matemáticos, que enunciamos sin demostración, nos dan condiciones suficientes para que un subconjunto de \mathbb{R}^3 sea una superficie regular.

Proposición. Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 , entonces su gráfica

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$$

es una superficie regular.

Ejemplo. El paraboloides definido $z = x^2 + y^2$ es una superficie regular, pues es la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ (véase figura 7).

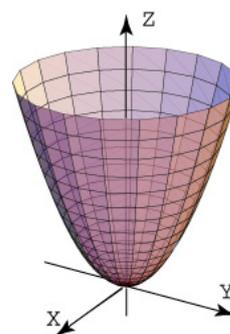


Figura 7: El paraboloides.

Ejercicio. Comprueba que la función $z = \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$ no define una superficie regular en ningún entorno del origen.

Proposición. Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable en U y $a \in f(U)$ es un valor regular de f (es decir, no es imagen de un punto crítico), entonces la superficie de nivel

$$S = f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = a\}$$

es una *superficie regular* de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo. Todos los elipsoides de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ son superficies regulares en \mathbb{R}^3 , en particular la esfera \mathbb{S}^2 .

PRUEBA: Observa que la función $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ es diferenciable y que el elipsoide es $f^{-1}(0)$. Para probar que es una superficie tenemos que ver que 0 es un valor regular. La diferencial de f en el punto $p = (x, y, z)$ es

$$df_p = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right)$$

luego el único punto singular es $(0, 0, 0)$ pero $f(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, por lo que 0 es un valor regular, que prueba que el elipsoide es una superficie regular.

3.2. Superficies parametrizadas.

Llamamos *parametrización* de una superficie a una función $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciable en un abierto U de \mathbb{R}^2 de forma que la diferencial $d\Phi_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en cada punto $q \in U$ sea un monomorfismo (inyectiva). Esto equivale a decir que, si $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ la diferencial en $q = (u, v)$

$$d\Phi_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tiene sus vectores columnas:

$$\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \text{ y } \Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

linealmente independientes. Esto garantiza que la superficie es regular.

Muchas superficies se pueden representar con una parametrización conveniente. Por ejemplo, la esfera (casi en su totalidad) se puede parametrizar como

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \sen \theta \cos \varphi, r \sen \theta \sen \varphi, r \cos \theta)$$

siendo $(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

Parametrización trivial. Si una superficie regular viene determinada por una campo diferenciable $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, siempre podemos encontrar una parametrización

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

de la superficie definida, para cada $(u, v) \in U$,

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= f(u, v) \end{aligned}$$

Superficies de revolución. Una superficie de revolución es la que se describe en el espacio a partir de una curva regular plana rotada por un eje. Si la curva está definida en uno de los semiplanos que el eje z divide al plano xz , parametrizada de la forma $x = f(t), z = g(t)$ con $t \in (a, b)$, y si hacemos girar el eje z queda la superficie parametrizada como $\Phi: (a, b) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, siendo

$$\begin{aligned} x(u, v) &= f(u) \cos v \\ y(u, v) &= f(u) \sin v \\ z(u, v) &= g(u) \end{aligned}$$

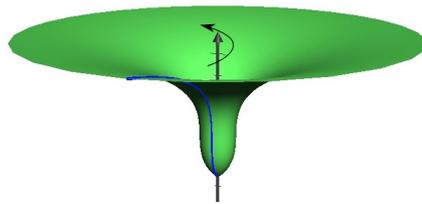


Figura 8: Una superficie de revolución.

Ejercicio. Determina la parametrización de una superficie de revolución determinada por una curva plana cuando se gira el eje x . Análogamente al girar el eje y .

Ejercicio. Determina una parametrización de la superficie de revolución generada por una parábola $y = x^2$ y comprueba que es un paraboloides (figura 7).

El toro bidimensional \mathbb{T}^2 . Se puede definir como la superficie de revolución obtenida a partir de una circunferencia de radio r en el plano xz y centrada en el punto $(R, 0, 0)$, siendo $R > r$ (véase figura 9). Como la circunferencia se puede parametrizar de la forma $x(t) = R + r \cos \theta; z(t) = R + r \sin \theta$, con $\theta \in (0, 2\pi)$, entonces una parametrización del toro será la siguiente:

$$\begin{aligned} x(\theta, \varphi) &= (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y(\theta, \varphi) &= (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z(\theta, \varphi) &= r \sin \theta \end{aligned}$$

con $(\theta, \varphi) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

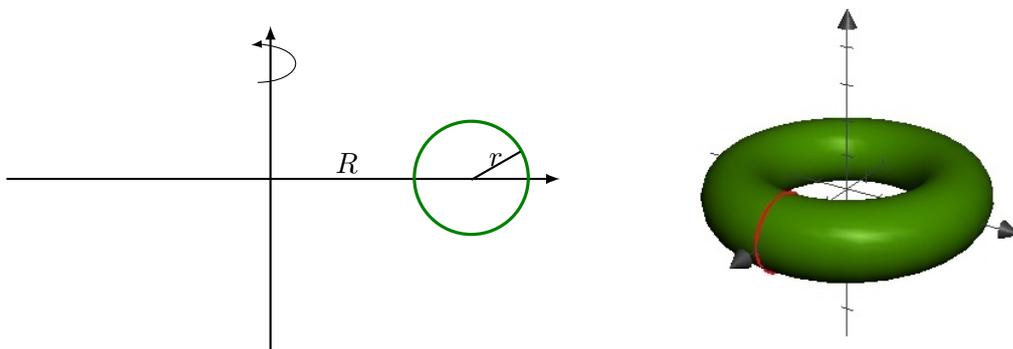


Figura 9: El toro bidimensional.

3.3. El plano tangente

Sea un punto $p = (p_1, p_2, p_3)$ de una superficie regular S parametrizada por $\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que $p = \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. El *plano tangente* de S en p , representado

por $T_p(S)$, tiene como vectores de dirección las columnas de $d\Phi_q$, es decir,

$$\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \right)$$

y

$$\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \right)$$

llamados **base de $T_p(S)$ referida a la parametrización Φ** .

El plano tangente $T_p(S)$ tendrá entonces por ecuación

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo. Vamos a calcular el plano tangente a la esfera \mathbb{S}^2 , parametrizada por $\Phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$ en el punto $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\pi/4, \pi/4)$.

Puesto que

$$\begin{aligned} \Phi_\theta &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \Phi_\varphi &= (-\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 0) \end{aligned}$$

El plano tendrá como vectores directores

$$\Phi_\theta \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ y } \Phi_\varphi \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

y pasa por el punto p , luego tiene por ecuación

$$\begin{vmatrix} x - 1/2 & y - 1/2 & z - 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + \sqrt{2}z = 2}$$

Ejercicio. Usa la parametrización trivial de la esfera \mathbb{S}^2 alrededor del punto $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Psi(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right)$$

y comprueba que, aunque la base del plano tangente $T_p(\mathbb{S}^2)$ referida a esta parametrización es distinta a la obtenida en el ejemplo anterior, el plano tangente no cambia.

4. Formas fundamentales y curvaturas

4.1. La primera forma fundamental

El producto escalar definido en \mathbb{R}^3 , induce, respecto de una base asociada a una parametrización $\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una forma cuadrática en cada plano tangente $I_p: T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ definida

$$I_p(\vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2$$

que recibe el nombre de *primera forma fundamental* de la superficie en el punto p .

Como cualquier forma cuadrática, respecto de una base, se puede expresar como una matriz (de orden 2×2) simétrica y definida positiva.

Para obtener una expresión de la primera forma fundamental aplicamos este resultado obtenido de la teoría general de ecuaciones diferenciales que nos dice que todo vector tangente \vec{w} en un punto se corresponde con una única curva α contenida en la superficie tal que $\alpha'(0) = \vec{w}$.

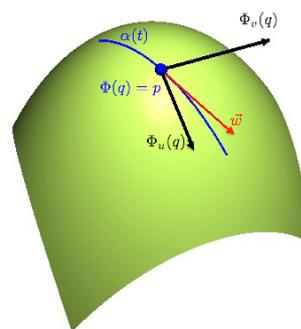


Figura 10: Cada vector $\vec{w} \in T_p(S)$ es el vector tangente de una curva en S .

Proposición. Sea $p = \Phi(q)$ un punto de la superficie S . Si \vec{w} es un vector del plano tangente $T_p(S)$ existe una única curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ (por tanto, contenida en S) de forma que $\alpha(0) = \Phi(q) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{w}$.

Por la regla de la cadena, el vector tangente a dicha curva es

$$\alpha'(t) = u'(t)\Phi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\Phi_v(u(t), v(t))$$

luego

$$\vec{w} = \alpha'(0) = u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)$$

y, de aquí

$$\begin{aligned} I_p(\vec{w}) &= I_p(\alpha'(0)) = (u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)) \cdot (u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)) = \\ &= u'(0)^2\Phi_u(q) \cdot \Phi_u(q) + 2u'(0)v'(0)\Phi_u(q) \cdot \Phi_v(q) + v'(0)^2\Phi_v(q) \cdot \Phi_v(q) = \\ &= u'(0)^2E(q) + 2u'(0)v'(0)F(q) + v'(0)^2G(q) \end{aligned}$$

siendo E, F y G campos diferenciables definidas en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Por tanto, la primera forma fundamental respecto a la base asociada a la parametrización Φ se expresa en forma matricial

$$I_p = \begin{pmatrix} u' & v' \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

siendo los coeficientes

$$E = \Phi_u \cdot \Phi_u; \quad F = \Phi_u \cdot \Phi_v; \quad G = \Phi_v \cdot \Phi_v$$

Ejemplo. Vamos a calcular la primera forma fundamental de un cilindro. Se puede crear “elevando” en el eje z la circunferencia S^1 apoyada en el plano xy . Así el cilindro se parametriza como

$$\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \text{ con } 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

SOLUCIÓN: La base del plano tangente $T_p(S)$ para esta parametrización es

$$\begin{aligned} \Phi_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \Phi_z &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

por tanto la primera fundamental I_p para esta parametrización tiene por coeficientes

$$E = \Phi_\theta \cdot \Phi_\theta = 1; \quad F = \Phi_\theta \cdot \Phi_z = 0; \quad G = \Phi_z \cdot \Phi_z = 1$$

Ejercicio. Comprueba que con la parametrización habitual de la esfera $\mathbb{S}^2(r)$

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta) \quad (5)$$

La primera forma fundamental es

$$E = r^2; \quad F = 0; \quad G = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Ejercicio. Calcula los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie de revolución.

4.1.1. Aplicaciones

Conociendo la primera forma fundamental de una superficie podemos conocer la longitud y ángulo de curvas sobre ella. Así, si $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ es una curva contenida en la superficie, su longitud de arco es

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G} dt$$

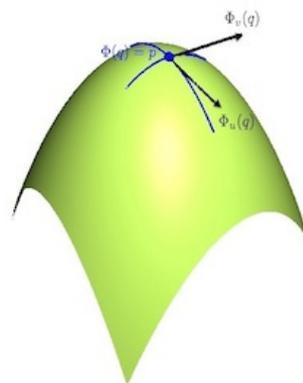
El ángulo que forman dos curvas α y β que se cortan en un punto en $t = t_0$ está definido por

$$\cos \theta = \frac{\alpha'(t_0) \cdot \beta'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}$$

Curvas coordenadas. Dado un punto $p = \Phi(q)$ de una superficie, las *curvas coordenadas* en p son las que tienen por vectores tangentes $\Phi_u(q)$ y $\Phi_v(q)$.

Por lo anterior, es fácil ver que las curvas coordenadas en un punto forman un ángulo ϕ tal que

$$\cos \phi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$



Nota. A partir de la primera forma fundamental se encuentra también una expresión para calcular el área de una superficie. Como esta expresión involucra integrales dobles entraremos en esta cuestión en un momento posterior (Tema 6).

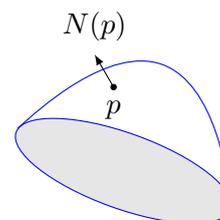
Ejemplo. Comprueba que las curvas coordenadas de la esfera (5) en cada punto, llamadas meridianos y paralelos, son perpendiculares,

4.2. Segunda forma fundamental. Curvaturas

Dada una parametrización Φ de una superficie regular, en cada punto $\Phi(q) = p \in S$, el producto vectorial $\Phi_u(q) \times \Phi_v(q)$ define una función de S en \mathbb{R}^3 que recibe el nombre de *producto vectorial fundamental*. El vector $\Phi_u(q) \times \Phi_v(q)$ es ortogonal a $T_p(S)$ y nos permite definir un *vector normal unitario*

$$N_p = \frac{\Phi_u(q) \times \Phi_v(q)}{\|\Phi_u(q) \times \Phi_v(q)\|}$$

cuyo sentido depende de la parametrización elegida de la superficie en el entorno del punto p .



4.2.1. Superficies orientables

Dos parametrizaciones distintas de una misma superficie, alrededor de un punto p , definen la misma orientación si definen el mismo vector normal unitario N_p .

Decimos que una **superficie es orientable** si podemos encontrar una familia de parametrizaciones que recubran toda la superficie de forma que si un punto queda cubierto por dos parametrizaciones, éstas definen la misma orientación.

Obsérvese que intercambiando el orden de los parámetros de una parametrización cambiamos la orientación de la superficie que define.

Existen superficies que no son orientables. Por ejemplo, la **cinta de Möbius**. Esta superficie se puede construir a partir de un rectángulo plano (una cinta) identificando dos lados opuestos pero en sentido¹ invertido.

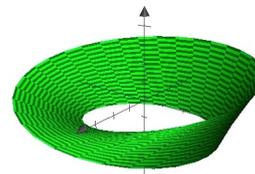


Figura 12: Cinta de Möbius.

Nota.

1. Una superficie regular definida por una única parametrización es siempre orientable.
2. Una superficie regular definida en forma implícita $f(x, y, z) = 0$ es orientable y a además el vector gradiente $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ define una orientación

Cuando una superficie no es orientable no es posible elegir un vector normal unitario de forma continua en toda la superficie. De hecho, esto caracteriza las superficies orientables.

Teorema Una superficie regular es orientable si y solo existe un campo vectorial diferenciable $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde cada $N(p)$ es un vector normal unitario.

4.2.2. Aplicación de Gauss

Obsérvese que las imágenes $N(p)$ son puntos de la esfera \mathbb{S}^2 , por tanto se puede considerar que la aplicación N está definida

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

y recibe el nombre de *aplicación de Gauss*. La diferencial de la aplicación de Gauss, también llamada **endomorfismo u operador de Weingarten** es una aplicación lineal entre los planos tangentes de ambas superficie

$$dN_p: T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$$

del siguiente modo:

Si $\vec{w} \in T_p(S)$ existe una curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\vec{w} = \alpha'(0)$. La compuesta $(N \circ \alpha)(t) = \mathcal{N}(t)$ es una curva en \mathbb{S}^2 y se define

$$dN_p(\vec{w}) = (N \circ \alpha)'(0) = \mathcal{N}'(0) \tag{6}$$

Para simplificar, observamos que cada punto de la esfera \mathbb{S}^2 es ortogonal a su plano tangente (comprueba esto como un ejercicio), luego los planos tangentes $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ son paralelos.

¹Si se identifican los lados opuestos en el mismo sentido se obtiene un cilindro.

Esto nos permite identificar ambos planos de forma que la diferencial de la aplicación de Gauss es

$$dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$$

El operador de Weingarten, dN_p , mide la tasa de variación del vector normal unitario en las proximidades de p en las posibles direcciones del plano tangente en p .

Ejemplo Veamos la aplicación de Gauss y su diferencial sobre la esfera $\mathbb{S}^2(r)$. Un punto $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2(r)$ es ortogonal a su plano tangente $T_p(\mathbb{S}^2)$. Así los vectores $\pm \frac{1}{r}p$ son los dos únicos posibles vectores normales unitarios. Vamos a elegir $N(p) = \left(-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}\right) = \frac{-1}{r}p$.

Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva regular en $\mathbb{S}^2(r)$ con $\alpha(0) = p$. Según lo anterior $N(t) = \frac{-1}{r}(x(t), y(t), z(t))$, luego

$$N'(t) = \frac{-1}{r}(x'(t), y'(t), z'(t))$$

y, por tanto, si $\vec{v} = \alpha'(0)$, se deduce $dN_p(\vec{v}) = -\frac{1}{r}\vec{v}$.

Si elegimos la orientación contraria la aplicación de Gauss y su diferencial cambian de signo.

Ejercicio. Calcula la aplicación de Gauss de un plano en \mathbb{R}^3 y comprueba que es una función constante. Por tanto su diferencial $dN_p = 0$.

Relación entre el operador de Weingarten y las segundas derivadas de Φ .

Lema. Sea $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S con $\Phi(u, v) = p$ y sea $N(u, v) = N_p$ la aplicación de Gauss, entonces

- a) $N_u \cdot \Phi_u = -N \cdot \Phi_{uu}$
- b) $N_u \cdot \Phi_v = N_v \cdot \Phi_u = -N \cdot \Phi_{uv}$
- c) $N_v \cdot \Phi_v = -N \cdot \Phi_{vv}$

Prueba. Como N es normal a $T_p(S)$, se tiene que $N \cdot \Phi_u = 0$, por tanto, derivando

$$\frac{\partial (N \cdot \Phi_u)}{\partial u} = 0 \Rightarrow N_u \cdot \Phi_u + N \cdot \Phi_{uu} = 0$$

de donde obtenemos la primera de las igualdades. Las restantes se obtienen de forma análoga.

Teorema. La diferencial de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta, es decir, para dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p(S)$ se cumple $dN_p(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot dN_p(\vec{w})$. Esto implica que dN_p es diagonalizable.

4.2.3. Curvaturas de una superficie

Resumiendo, la diferencial dN_p de la aplicación de Gauss, respecto de la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, será una matriz 2×2 .

$$dN_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (7)$$

diagonalizable y por tanto:

Definición.

1. Existe una base ortonormal de vectores propios $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ que reciben el nombre de **direcciones principales**.
2. A los valores k_1 y k_2 , opuestos de los valores propios de dN_p reciben el nombre de **curvaturas principales**, es decir,

$$dN_p(\vec{e}_1) = -k_1\vec{e}_1, \quad dN_p(\vec{e}_2) = -k_2\vec{e}_2$$

3. El determinante de la diferencial de la aplicación de Gauss

$$K = \det dN_p = (-k_1)(-k_2) = k_1k_2$$

recibe el nombre de **curvatura de Gauss**. (**Nota:** La curvatura de Gauss K no depende de la orientación, es decir, de la elección del vector normal unitario N).

4. La media aritmética de las curvaturas principales recibe el nombre de **curvatura media** y se representa por H .

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

4.2.4. Segunda forma fundamental y cálculo de las curvaturas

Segunda forma fundamental Puesto que dN_p un endomorfismo autoadjunto nos permite definir una nueva forma cuadrática en $T_p(S)$

$$\Pi_p(\vec{w}) = -dN_p(\vec{w}) \cdot \vec{w}$$

que recibe el nombre de *segunda forma fundamental*. El signo menos que figura en la definición es por conveniencia de cálculo como se verá.

Si $\Phi(q) = p$ y α es una curva tal que $\alpha(0) = p$,

$$\begin{aligned} \Pi_p(\vec{w}) &= -dN_p(\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0) = \\ &= -(N_u(q)u'(0) + N_v(q)v'(0)) \cdot (u'(0)\Phi_u(q) + v'(0)\Phi_v(q)) = \\ &= u'(0)^2e(q) + 2u'(0)v'(0)f(q) + v'(0)^2g(q) \end{aligned}$$

siendo e, f, g funciones reales definidas en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. cuyos coeficientes, en virtud del lema de la página 23 anterior, son:

$$\begin{aligned} e &= -N_u \cdot \Phi_u = N \cdot \Phi_{uu} \\ f &= -N_u \cdot \Phi_v = -N_v \cdot \Phi_u = N \cdot \Phi_{uv} \\ g &= -N_v \cdot \Phi_v = N \cdot \Phi_{vv} \end{aligned}$$

Nota: Aquí se observa la conveniencia de cambiar el signo en la definición anterior de la segunda forma fundamental.

La segunda forma fundamental respecto a la base asociada a la parametrización Φ se expresa en forma matricial

$$\Pi_p = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Curvatura normal y geodésica.

Sea $p = \Phi(q)$ un punto de la superficie S . Dada una curva $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ contenida en la superficie que pasa por p , que podemos suponer que está parametrizada por longitud de arco y, como siempre que $\alpha(0) = p$, tenemos el vector tangente unitario $\vec{t} = \alpha'(0) \in T_p(S)$ y el vector en la dirección normal (no unitario) a la curva $\alpha''(0)$ que, en general, no coincide con el vector unitario normal a la superficie N .

Curvatura normal Llamamos *curvatura normal* K_n a la proyección del vector $\alpha''(0)$ sobre el vector normal a la superficie, es decir

$$K_n = \frac{d^2\alpha}{ds^2} \cdot N$$

Evidentemente, la curvatura normal es una función que depende del punto de la superficie y la dirección de la curva elegida y su signo depende si la proyección de α'' cae en el mismo sentido o contrario del vector normal N .

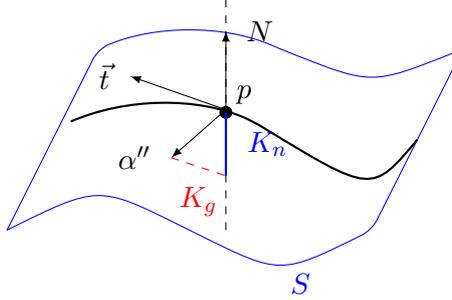


Figura 13: Curvatura normal y geodésica.

Curvatura geodésica. A la proyección sobre el vector tangente se le llama *curvatura geodésica* K_g . Tenemos que la curvatura de la curva en el espacio (o curvatura total) κ verifica

$$\kappa^2 = K_n^2 + K_g^2$$

por tanto $K_g = \pm\sqrt{\kappa^2 - K_n^2}$ y el signo depende de la orientación de la superficie y la que demos a la curva.

Las curvas con $K_g = 0$ se dicen que son *geodésicas* y las curvas con $K_n = 0$ se dicen *asintóticas*.

Relación entre la curvatura normal y las formas fundamentales. Supongamos que $\alpha(s)$ es una curva en S está parametrizada por longitud de arco y sea $N(s) = (N \circ \alpha)(s)$ el vector normal restringida a la curva α .

Sabemos que $\alpha'(s) \cdot N(s) = 0$, luego $\alpha'(s) \cdot N'(s) + \alpha''(s) \cdot N(s) = 0$. Así la curvatura normal se puede expresar:

$$K_n = \alpha''(0) \cdot N(0) = -\alpha'(0) \cdot dN_p = \Pi_p(\alpha'(0))$$

Si α no está parametrizada por longitud de arco,

$$K_n = \Pi_p(\vec{t}) = \Pi_p\left(\frac{\alpha'(0)}{\sqrt{I_p(\alpha'(0))}}\right) = \frac{\Pi_p(\alpha'(0))}{I_p(\alpha'(0))}$$

Si \vec{t} es un vector unitario del plano tangente $T_p(S)$, podemos expresar sus coordenadas respecto a las direcciones principales

$$\vec{t} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \text{ siendo } x^2 + y^2 = 1$$

entonces la curvatura normal en la dirección de \vec{t} será

$$\begin{aligned} K_n &= \Pi_p(\vec{t}) = x^2 \Pi_p(\vec{e}_1) + y^2 \Pi_p(\vec{e}_2) = \\ &= -x^2 \langle dN_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle - y^2 \langle dN_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle \\ &= k_1 x^2 + k_2 y^2 \end{aligned}$$

luego, si las curvaturas principales cumplen $k_1 \leq k_2$, tenemos

$$k_1 \leq K_n \leq k_2$$

De aquí concluimos que **las curvaturas principales son los valores mínimo y máximo de las curvaturas normales.**

Cálculo del operador de Weingarten.

A partir de la segunda forma fundamental podemos calcular la matriz de la aplicación lineal dN_p expresada en (7), página 23.

Si $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ y $\beta(t) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ son curvas que pasan por el punto p de la superficie, por la segunda y primera forma fundamental tenemos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha') \cdot \beta' &= - (u' \ v') \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{v}' \end{pmatrix} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{v}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$dN_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Y de aquí obtenemos las fórmulas de las curvaturas

Curvatura de Gauss: $K = \det dN_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$

El polinomio característico de dN_p es

$$p(\lambda) = \det(dN_p - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + K$$

y, por otro lado, a partir de las curvaturas principales

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & 0 \\ 0 & -k_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1k_2$$

de donde

Curvatura media: $H = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$

Las curvaturas principales son los opuestos de las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$\lambda^2 + 2H\lambda + K = 0$$

Curvaturas principales: $k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$

Ejemplo. Calculemos la segunda forma fundamental y las curvaturas de la esfera $\mathbb{S}^2(r)$ parametrizada de la forma usual

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta), \quad (\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

SOLUCIÓN: Calculamos

$$\begin{aligned} \Phi_\theta &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \\ \Phi_\varphi &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ \Phi_{\theta\theta} &= (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, -r \cos \theta) \\ \Phi_{\theta\varphi} &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ \Phi_{\varphi\varphi} &= (r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, 0) \end{aligned}$$

de donde un vector normal unitario es

$$N = \frac{\Phi_\theta \times \Phi_\varphi}{\|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi\|} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

y de aquí

$$e = N \cdot \Phi_{\theta\theta} = -r, \quad f = N \cdot \Phi_{\theta\varphi} = 0, \quad g = N \cdot \Phi_{\varphi\varphi} = -r \sin^2 \theta$$

y también calculamos la primera forma fundamental:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \sin^2 \theta$$

por tanto la diferencial dN_p es

$$dN_p = - \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

que, salvo el signo, coincide con la ya obtenida en el ejemplo con la que dimos en la página 23 (significa que hemos cambiado la orientación).

Las curvaturas principales (puesto que dN_p viene diagonalizada) son, por tanto,

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{r} \quad (\text{En la esfera la curvatura normal es idéntica en cualquier dirección})$$

y la curvatura de Gauss y curvatura media son, respectivamente,

$$K = \frac{1}{r^2}, \quad H = -\frac{2/r}{2} = -\frac{1}{r}$$

Nota: Observa que la curvatura de Gauss no depende de la orientación elegida, al contrario que ocurre con las curvaturas principales y media.

4.3. Interpretación de la curvatura de Gauss

Un punto p de una superficie regular S se clasifica, según la curvatura de Gauss K_p en dicho punto. Decimos que p es:

- **Un punto elíptico** si $K_p > 0$.
- **Un punto parabólico** si $K_p = 0$ con $dN_p \neq 0$.
- **Un punto hiperbólico** si $K_p < 0$.
- **Un punto llano** si $dN_p = 0$.

Ejemplo. Como hemos visto, en la esfera todos los puntos son elípticos.

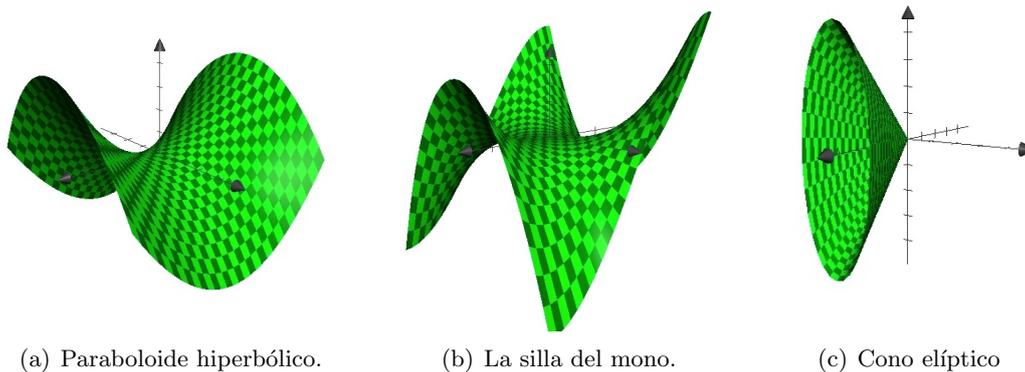


Figura 14: Gráficas de superficies mencionadas en esta página.

Ejercicios.

1. Comprueba que todos los puntos del paraboloide hiperbólico

$$z = x^2 - y^2$$

son puntos hiperbólicos.

2. Comprueba que los puntos de la “silla del mono”, que es una superficie definida por la gráfica de la función

$$z = x^3 - 3xy^2$$

son todos hiperbólicos, excepto el punto $p = (0, 0, 0)$, que es un punto llano.

3. Comprueba que los puntos de la rama del cono elíptico definido

$$z^2 = x^2 - 9y^2, x > 0$$

son todos parabólicos.

Nota: Usa la parametrización $\begin{cases} x = 3r \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = 3r \operatorname{cos} \theta \end{cases}$ con $r \in (0, \infty), \theta \in (0, 2\pi)$

Puntos umbílicos. Un punto p de una superficie se dice que es umbílico (o umbilical) si sus curvaturas principales son iguales, es decir, $k_{1p} = k_{2p}$. En particular los puntos llanos son umbílicos.

Nota. Ya hemos visto que todos los puntos de una esfera son umbílicos.