Matemáticas III
Tema 7
Ecuaciones en derivadas parciales

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

Índice

1. Introducción

Definición. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo. Se llama **ecuación en derivadas parciales (EDP)** a aquella ecuación en la que la incógnita es un campo escalar definido en U y en la que aparecen sus derivadas parciales de cualquier orden.

En este curso estudiaremos el caso para dos variables independientes (que las denotaremos por x e y), y la función incógnita la notaremos por u ($u = u(x, y)$ con $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$).

Con esta definición las EDP se pueden expresar de la siguiente forma:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0 \text{ con } (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

o, escribiendo las parciales de forma simplificada:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0 \text{ con } (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

donde F es la función que “liga” todas las funciones entre sí.

Se llama *orden de una EDP* al mayor índice de derivación parcial que aparece en la ecuación.

Nota. A veces, en las aplicaciones físicas, la variable independiente y se identifica con el tiempo y se suele representar por t.

De esta forma, por ejemplo, $u_t - a^2\, u_{xx} = 0$ es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden conocida como *ecuación del calor.*

Ejemplo. Una sencilla EDP de primer orden es la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Soluciones. Una *solución de una EDP* de orden k es un campo escalar $u = f(x, y)$ de clase C^k que satisface la ecuación al sustituir en ella la u y sus derivadas parciales. Encontrar las soluciones se suele llamar *integrar la ecuación.*

Continuando con el ejemplo (2) anterior, si u fuese una función de una sola variable (una ecuación diferencial ordinaria, EDO) tendría por solución $u(x) = c$, con c constante, pero si la consideramos de dos variables, la constante c no es tal, sino que entenderemos que es una función que no depende de la variable x. Es decir, integrando (2) obtenemos una solución general

$$u(x, y) = f(y)$$

Observamos así que, de la misma forma que en la solución general de una EDO aparacecían constantes arbitrarias, en la solución de una EDP aparacen funciones arbitrarias. Las soluciones de una EDP se restringen con las llamadas *condiciones de contorno o de frontera o las condiciones iniciales.* Por ejemplo, si a la ecuación (2) le imponemos la restricción

$$u(x, x) = x$$

estamos estableciendo una condición de frontera sobre la bisectriz del primer y tercer cuadrante. En este caso, tenemos que la única solución de la EDP (2) es

$$u(x, y) = y$$

En la literatura, se suelen dar dos tipos de restricciones o condiciones de contorno:

Condiciones de Cauchy: que se dan generalmente en ecuaciones en derivadas parciales en las que intervienen el tiempo. Así si u y u_t son dadas para $t = 0$ se les llaman *condiciones iniciales.*

Condiciones de Dirichlet: en las que se buscan soluciones u en una determinada región $U \subseteq \mathbb{R}$ que verifican ciertos valores en cada punto de la frontera ∂U de la región.

1.1. EDPs lineales y cuasilineales

Diremos que la ecuación (1) es **lineal** si la función F es lineal respecto de u y de todas las derivadas parciales de u que aparecen en ella.

Una EDP de primer orden lineal se podrá expresar, entonces de la forma

$$A_1(x, y)u + A_2(x, y)u_x + A_3(x, y)u_y = f(x, y)$$

donde los A_i son campos escalares definidos en U.

Análogamente una EDP lineal de segundo orden se puede expresar

$$A_1(x,y)u + A_2(x,y)u_x + A_3(x,y)u_y + A_4(x,y)u_{xx} + A_5(x,y)u_{xy} + A_6(x,y)u_{yy} = f(x,y)$$

Decimos una una EDP lineal es de *coeficientes constantes* si todos las funciones $A_i(x,y) = C_i$ son funciones constantes.

Una EDP lineal es *homogénea* si en todos los términos de F aparece u o alguna de sus derivadas o, lo que es lo mismo, expresada en alguna de las formas anteriores se tiene que $f(x,y) = 0$.

Diremos que la ecuación (1) es **cuasilineal** de primer orden si se expresa de la forma

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$$

donde los P, Q, R son campos escalares definidos en una región de $\mathbb{R}^3$. Análogamente las *ecuaciones cuasilineales* de segundo orden son la forma:

$$P_1(x,y,u)u_x + P_2(x,y,u)u_y + P_3(x,y,u)u_{xx} + P_4(x,y,u)u_{xy} + P_5(x,y,u)u_{yy} = R(x,y,u)$$

donde los P_i son campos escalares definidos en $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Obsérvese que las EDPs lineales son un caso particular de las cuasilineales.

1.2. Algunos ejemplos clásicos de EDPs

Ecuación del transporte. La ecuación de transporte en una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

donde u es función del tiempo t y de la posición x. Es lineal, de primer orden y homogénea.

Ecuación de propagación de la luz. La ecuación:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x,y,z)$$

describe la propagación de los rayos luminosos en un medio no homogéneo con índice de refracción $n(x,y,z)$. Es una ecuación de primer orden, no lineal y no homogénea con tres variables independientes.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Es un sistema formado por dos ecuaciones lineales de primer orden homogéneas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

que representan las funciones complejas $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ que son derivables en el campo complejo.

Ecuación de ondas. La ecuación
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
es la que satisface una función $u(x,t)$ que representa las oscilaciones de una cuerda. Es una ecuación lineal de segundo orden y homogénea que estudiaremos en la sección 3.1.

Ecuación de disipación del calor. La ecuación
$$u_t = c^2 u_{xx},$$
describe la evolución de la temperatura de una barra homogénea de sección constante. También es una ecuación lineal homogénea de segundo orden. La estudiaremos en la sección 3.2.

Ecuación de Laplace. La ecuación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$
satisface el potencial u del campo eléctrico en las regiones que no contienen cargas. Es otro ejemplo de ecuación lineal de segundo orden y homogénea.

2. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

En esta sección estudiaremos algunos métodos de integración de EDP de primer orden, es decir, EDP de la forma:
$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

2.1. Resolución directa

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2 - 1$. Una simple integración conduce a
$$u(x,y) = x^3 + 2xy^2 - x + f(y)$$
siendo $f(y)$ una función en y por determinar.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = e^{xy}$. Como sólo aparece la derivada parcial con respecto a y, podemos resolver esta EDP como si fuese una EDO (en y) $u' + u = e^{xy}$ que es lineal no homogénea que tiene por solución general
$$u(x,y) = \frac{e^{x\,y}}{x+1} + c(x)e^{-y}.$$
Observa que la constante que aparece al resolver la EDO es una función que depende de x cuando resolvemos la EDP.

2.2. Método de separación de variables

La idea del método de separación de variables es suponer que la solución $u(x,y)$ de una EDP en dos variables es producto de dos funciones en la forma
$$u(x,y) = \phi(x)\psi(y)$$
A veces una simple sustitución conduce a dos ecuaciones diferenciales en $\phi(x)$ y en $\psi(y)$, respectivamente, que se resuelven y permiten reconstruir la solución buscada.

Ejemplo. Resolvamos la siguiente EDP con condición de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(0,y) = e^{-y}$$

Suponiedo variables separadas tenemos

$$\phi'(x)\psi(y) = 2\phi(x)\psi'(y) \Rightarrow \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = 2\frac{\psi'(y)}{\psi(y)}$$

Como la anterior igualdad se tiene para cualquier x, y, se deducen que han de ser constantes, por tanto

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = k \Rightarrow \phi(x) = C_1 e^{kx} \\ \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = \frac{k}{2} \Rightarrow \psi(y) = C_2 e^{\frac{ky}{2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x,y) = \phi(x)\psi(y) = Ce^{k\left(x+\frac{y}{2}\right)}$$

y de la condición de Cauchy $u(0,y) = Ce^{k\frac{y}{2}} = e^{-y} \Rightarrow C = 1$ y $k = -2$ luego

$$u(x,y) = e^{-2x-y}$$

2.3. Método de las características

Para resolver una EDP cuasilineal con una EDP en dos variables

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$$

consideremos las superficies de nivel en el espacio $z = u(x,y)$, entonces, enfocando el problema desde el punto de vista geométrico, la ecuación se puede interpretar como que el vector $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ es ortogonal al vector $(u_x, u_y, -1)$ que es el gradiente del campo $f(x,y,z) = u(x,y) - z$. Esto nos lleva a que dicho vector $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ es proporcional a los vectores tangentes a las curvas contenidas en la superficie de nivel $z = u(x,y)$, dicho de otro modo

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

El método consiste, por tanto, en determinar las curvas tangentes al campo vectorial $F = (P, Q, R)$ llamadas *curvas características* y encontrar el campo $u(x,y)$ que definen estas curvas.

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} = dt$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= R(x,y,z) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene la solución paramétrica de la ecuación, o *solución general paramétrica* del sistema:

$$\begin{aligned} x &= x(c_1, c_2, c_3, t) \\ y &= y(c_1, c_2, c_3, t) \\ z &= z(c_1, c_2, c_3, t) \end{aligned}$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes de integración.

Generalmente, a partir de las condiciones iniciales se puede describir una curva llamada *curva directriz* $(f(s), g(s), h(s))$ en función de otro parámetro $s \in I$, que, imponiendo las condiciones iniciales en $t = 0$, nos permiten definir las constantes en función de s, es decir

$$\begin{aligned} x(c_1, c_2, c_3, 0) &= f(s) \\ y(c_1, c_2, c_3, 0) &= g(s) \\ z(c_1, c_2, c_3, 0) &= h(s) \end{aligned}$$

y por eliminación de las constantes nos queda una expresión

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x \\ y(s,t) &= y \\ z(s,t) &= z \end{aligned}$$

que representa la solución en forma paramétrica. Eliminando t de las dos primeras ecuaciones de x e y se obtiene $\varphi(x, y, s) = 0$, espresión de la proyección de las curvas características, y, por último, se elimina el parámetro s para obtener $z = u(x, y)$ que nos determina una forma explícita de la solución de la EDP que planteábamos.

Nota. En ocasiones a partir de la primera ecuación $\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)}$ se pueden obtener las proyecciones de las características sobre XY de la forma

$$g(x, y) = s$$

y, con la otra ecuación encontrar una expresión de $u(x, y, h(s)) = z$ que depende de x, de y y de una cierta función de s, $h(s)$, que, como hemos dicho, también dependiente de x, y.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u$ por este método. Tenemos entonces que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z} = dt$$

Resolviendo obtenemos las curvas características

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \Rightarrow x = c_1\, e^t \\ \frac{dy}{dt} &= y \Rightarrow y = c_2\, e^t \\ \frac{dz}{dt} &= 3z \Rightarrow z = c_3\, e^{3t} \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones vemos que $y = x \cdot cte.$, luego las proyecciones de las curvas características son rectas, luego planteamos la curva directriz arbitraria $x = 1$, $y = s$, $z = h(s)$ y para $t = 0$ tenemos $c_1 = 1$, $c_2 = s$ y $c_3 = h(s)$. De aquí

$$\left.\begin{array}{l} x = e^t \\ y = s\, e^t \\ z = h(s)\, e^{3t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = s\, x \\ z = h(s)\, x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow z = h\left(\tfrac{y}{x}\right) x^3$$

luego la solución general de la EDP, por este método, es

$$u(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right) x^3$$

Ejercicio. Comprueba que $u(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)x^3$ es solución de la ecuación $xu_x + yu_y = 3u$.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $u_x - u_y = 1$ con la condición de Cauchy $u(x,0) = \operatorname{sen} x$. En este caso,

$$dx = -dy = dz$$

Luego las curvas características son

$$\begin{aligned} x &= c_1 + t \\ y &= c_2 - t \\ z &= c_3 + t \end{aligned}$$

por la condiciones iniciales planteamos la curva directriz $x = s$, $y = 0$, $z = u(x,0) = \operatorname{sen} s$, por tanto, para $t = 0$, tenemos $c_1 = s$, $c_2 = 0$, $c_3 = \operatorname{sen} s$. Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} x &= s + t \\ y &= -t \\ z &= \operatorname{sen} s + t \end{aligned}$$

Eliminando t de las dos primeras ecuaciones tenemos la proyección en el plano XY de las curvas características $x + y = s$, que son rectas. Por último sustituyendo t y s en la última ecuación obtenemos la solución $z = u(x,y)$ de la ecuación

$$u(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - y$$

Ejercicio. Comprueba que es campo $u(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - y$ es solución del problema de Cauchy $u_x - u_y = 1$, con $u(x,0) = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo. Resolvamos el siguiente EDP con condición de Dirichlet

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy \\ u(x,y) = 0 \text{ en la circunferencia de radio 1.} \end{cases}$$

Tenemos, entonces

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy}$$

De la primera ecuación tenemos $x\,dx = y\,dy$ que se integra como $x^2 = y^2 + s$. De la última tenemos $dz = y\,dy$, luego $z = \frac{y^2}{2} + h(s)$. Por tanto, la solución general es

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2} + h(x^2 - y^2)$$

La condición de Dirichlet nos permite encontrar la función f puesto que $u(x,y) = 0$ si $x^2+y^2 = 1$, de aquí

$$\frac{y^2}{2} + h(1 - y^2 - y^2) = 0 \Rightarrow h(1-2y^2) = -\frac{y^2}{2}$$

cambiando la variable $x = 1 - 2y^2$, tenemos $h(x) = \dfrac{x-1}{4}$ y sustituyendo obtenemos la solución buscada

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 - y^2 - 1}{4} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{4}$$

3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

En esta sección, nos centraremos en las ecuaciones en derivadas parciales (lineales) de orden dos. Más concretamente, estudiaremos **la ecuación de ondas**, y **la ecuación de difusión del calor**, ecuaciones de gran importancia para la física.

El método que usaremos para resolver la ecuación de ondas, así como la ecuación de difusión del calor es el *método de separación de variables*. La idea de este método, como ya hemos visto en la sección anterior, es buscar una solución de la forma $u(x, y) = f(x)g(y)$. Distinguiremos los siguientes pasos:

PASO 1. Obtención de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

PASO 2. Hallar las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas en el PASO 1, que cumplan las condiciones de frontera.

PASO 3. Formar una apropiada combinación lineal de las soluciones halladas en el PASO 2 para que se satisfagan las condiciones iniciales del problema.

3.1. La ecuación de ondas

La siguiente ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0, \tag{3}$$

modela las vibraciones de una cuerda extendida entre dos puntos $x = 0$ y $x = \ell$; por ejemplo, una cuerda de guitarra. El movimiento se produce en el plano xy de manera que cada punto de la cuerda se mueve perpendicularmente al eje x. Sea $u(x, t)$ el desplazamiento de la cuerda en el instante de tiempo $t > 0$ medido desde el eje x, con las **condiciones de frontera**

$$u(0, t) = 0, \qquad u(\ell, t) = 0 \text{ para todo } t, \tag{4}$$

esto es, nuestra cuerda está sujeta en los extremos $x = 0$, $x = \ell$. Además, consideraremos las siguientes **condiciones iniciales** (en el instante $t = 0$)

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = \varphi(x), \quad \text{(forma inicial de la cuerda)}, \\ &u_t(x, 0) = \psi(x), \quad \text{(velocidad inicial de la cuerda)} \end{aligned} \tag{5}$$

PASO 1.

Buscamos una solución de la forma $u(x,t) = f(x)g(t)$, distinta de la trivial. Al sustituir $u_{xx}(x,t) = f''(x)g(t)$, $u_{tt}(x,t) = f(x)g''(t)$ en la ecuación (3) obtenemos

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2}g''(t)f(x),$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = -\lambda$$

siendo λ constante (con el signo menos por conveniencia).

Esta expresión se transforma en las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} f''(x) + \lambda f(x) = 0, \\ g''(t) + c^2\lambda g(t) = 0, \end{aligned}$$

que, imponiendo las condiciones de frontera (4),

$$\begin{aligned} u(0,\, t) &= f(0)g(t) = 0,\ \forall t \,\Rightarrow\, f(0) = 0,\\ u(\ell,\, t) &= f(\ell)g(t) = 0,\ \forall t \,\Rightarrow\, f(\ell) = 0. \end{aligned}$$

se transforman en

$$\begin{aligned} &f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad f(0) = f(\ell) = 0 \text{ y } f \neq 0\\ &g''(t) + c^2\lambda g(t) = 0, \quad g \neq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

PASO 2.

Determinemos las soluciones de (6), que satisfagan las condiciones frontera.

Comenzamos por encontrar los valores del parámetro λ de forma que la ecuación

$$f'' + \lambda f = 0, \quad f(0) = f(\ell) = 0, \tag{7}$$

tenga soluciones no triviales. Por analogía con lo estudiado en el álgebra lineal, a λ lo llamaremos **autovalor**, y a las soluciones no triviales **autofunciones**. Este problema se conoce con el nombre de **problema de Sturm-Liouville.**

A continuación estudiaremos las soluciones de (7), según los autovalores λ:

- Para $\lambda < 0$, la solución general de (7), es de la forma

  $$f(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

  Imponiendo las condiciones de frontera obtenemos que

  $$f(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad f(\ell) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0,$$

  de donde $C_1 = C_2 = 0$, y la única solución es la trivial.

- Para $\lambda = 0$, la solución general de (7) es $f(x) = C_1 x + C_2$. De nuevo, al imponer las condiciones de frontera resulta $C_1 = C_2 = 0$, que nos da como resultado la solución trivial.

- Para $\lambda > 0$, la solución general de (7) es

  $$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x).$$

  Imponemos las condiciones de frontera

  $$f(0) = C_1 = 0, \quad f(\ell) = C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, \ell) = 0.$$

  Tendremos una soluciones distintas de la trivial cuando

  $$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, \ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, \ell = n\pi \Rightarrow \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

  Por tanto, las soluciones no triviales de (7) vienen dadas por las autofunciones $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right)$, de los autovalores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$.

Haciendo $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, obtenemos las soluciones de la segunda ecuación (6)

$$g_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + B_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right).$$

Multiplicando ambas, obtenemos soluciones de la ecuación de ondas que buscamos

$$u_n(x,\, t) = f_n(x) g_n(t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + B_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right).$$

Como la ecuación de ondas (3) es una ecuación lineal homogénea, la siguiente combinación lineal

$$u(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + B_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right), \qquad (8)$$

también será una solución de (3) que satisface las condiciones de frontera.

PASO 3.

Imponemos que la ecuación (8) cumpla las condiciones iniciales (5):

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \qquad (9)$$

$$u_t(x,\, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right). \qquad (10)$$

Observemos que en (9) y (10) aparecen desarrollos de Fourier en senos. Por tanto, si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ admitan desarrollos de Fourier en senos, las condiciones iniciales se cumplirán si

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \Rightarrow A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)\, dx,$$

y

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\ell} c B_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} \psi(x)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)\, dx.$$

Entre otras aplicaciones, la ecuación de ondas rige la propagación de ondas de presión (sonido) y las electromagnéticas, por lo que aparecen frecuentemente en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

Ejemplo. Vamos a resolver la siguiente ecuación de ondas.

$$\begin{array}{lll} u_{xx} - \dfrac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & 0 < x < \pi, & t \geq 0 \\ \text{C.f. } u(0,\, t) = 0, & u(\pi,\, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{C.i. } u(x,\, 0) = 0, & u_t(x,\, 0) = 2, & 0 < x < \pi \end{array}$$

Sustituyendo $\ell = \pi$ en las expresiones obtenidas anteriormente tendremos:

$$u_n(x,\, t) = (A_n \cos(nct) + B_n\ \mathrm{sen}(nct))\ \mathrm{sen}(nx),$$

con
$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\,\text{sen}(nx)\,dx, \text{ y } B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\pi} \psi(x)\,\text{sen}(nx)\,dx$$
Además, como $u(x,\,0) = 0 = \varphi(x)$ y $u_t(x,\,0) = 2 = \psi(x)$ tenemos que
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\,\text{sen}(nx)\,dx = 0 \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\pi} \psi(x)\,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{4}{n\pi c}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2\pi c}\left(-\cos(n\pi)+1\right) = \\ &= \frac{4}{n^2\pi c}\left(-(-1)^n+1\right) \end{aligned}$$
Por tanto, la solución pedida es
$$\begin{aligned} u(x,\,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nct) + B_n\,\text{sen}\,(nct)\right)\text{sen}(nx) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi c}\left(1-(-1)^n\right)\text{sen}(cnt)\,\text{sen}(nx) \end{aligned}$$
Véase figura 1

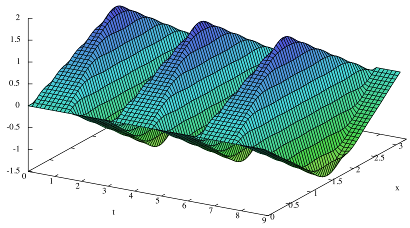
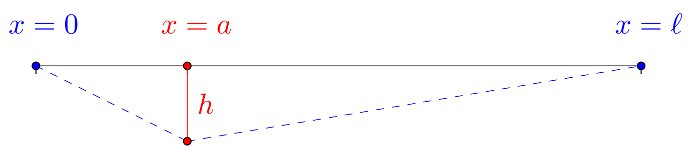


Figura 1: Solución $u(x,t)$ para $c = 2$.

Ejemplo. Una cuerda de guitarra, de longitud ℓ, está sujeta por sus extremos. Se tañe la cuerda en $x = a$, desplazándola una distancia h. Hállese la forma de la cuerda en cualquier instante posterior al tañido.

Hemos de resolver la Ecuación de ondas
$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0,$$
con *velocidad inicial* $u_t(x,0) = \psi(x) = 0$, y con *forma inicial de la cuerda.*
Esta situación se expresa matemáticamente, diciendo que en el instante $t = 0$, la forma de la



cuerda viene dada por la siguiente función
$$u(x,\,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{a} & \text{si } 0 \le x \le a, \\ \dfrac{h(\ell - x)}{\ell - a} & \text{si } a \le x \le \ell. \end{cases}$$

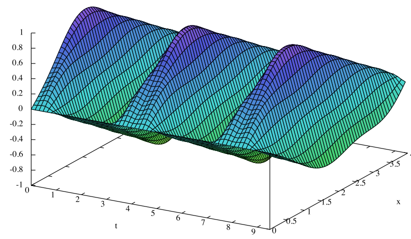


Figura 2: Solución $u(x,t)$ para $c = 2$, con $\ell = 4$, $a = 1{,}5$ y $h = 1$.

Según lo visto antes, la solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}\, ct\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, ct\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right),$$

con

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^\ell \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Ahora como en el caso que nos ocupa $\psi(x) = 0$, tenemos que los coeficientes B_n son todos nulos. Para los A_n tenemos

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \frac{2}{\ell}\int_0^a \frac{hx}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx + \frac{2}{\ell}\int_a^\ell \frac{h(\ell - x)}{\ell - a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \\ &= \frac{2h}{\ell a}\int_0^a x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx + \frac{2h}{\ell - a}\int_a^\ell \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx - \frac{2h}{\ell(\ell - a)}\int_a^\ell x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx = \\ &= \frac{2h}{\ell a}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}}{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} - x\cdot\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right]_0^a - \frac{2h}{\ell - a}\left[\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right]_a^\ell - \frac{2h}{\ell(\ell - a)}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}}{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2} - x\cdot\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right]_a^\ell = \\ &= \frac{2h\ell^2}{a(\ell - a)\pi^2 n^2}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, la forma de la cuerda en el instante t viene dada por

$$u(x,\, t) = \frac{2h\ell^2}{a(\ell - a)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Véase figura 2.

3.2. La ecuación de difusión del calor

En esta sección, encontraremos una solución distinta de la trivial de ecuación

$$u_t = c^2 u_{xx}, \tag{11}$$

la cual describe la temperatura de una barra homogénea de sección constante. Supondremos que la superficie de la barra está aislada, de modo que el calor sólo fluye longitudinalmente; haremos coincidir la barra con el eje OX. Buscamos una solución con las **condiciones de frontera**

$$u(0,t) = 0, \;\; u(\ell,t) = 0, \;\; \text{para todo } t,$$

es decir, los extremos de la barra están a temperatura 0. Consideraremos, además la **condición inicial** $u(x,0) = \varphi(x)$, que nos da la distribución inicial de la temperatura en la barra.

PASO 1.

Buscamos una solución de la forma

$$u(x,t) = f(x)g(t),$$

distinta de la trivial.

Sustituyendo en la Ecuación (11) resulta

$$\frac{1}{c^2}\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda \quad \text{con } \lambda \text{ constante.}$$

de donde, despejando

$$\begin{aligned} &f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad f(0) = f(\ell) = 0, \\ &g'(t) + c^2\lambda g(t) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

PASO 2.

De nuevo, nos enfrentamos al problema de Sturm-Liouville

$$f'' + \lambda f = 0, \quad f(0) = f(\ell) = 0.$$

De los cálculos realizados en la sección anterior, sabemos que dicho problema tiene soluciones no triviales para

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1,\, 2, \ldots$$

con soluciones $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right)$. Sustituyendo este valor de λ_n en la Ecuación (12) resulta

$$g' + c^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 g = 0$$

con solución $g_n(t) = A_n e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$. Por tanto, las siguientes funciones

$$u_n(x,\, t) = A_n e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right)$$

son soluciones particulares de la ecuación (11), las cuales satisfacen las condiciones de frontera.

PASO 3.

Consideramos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

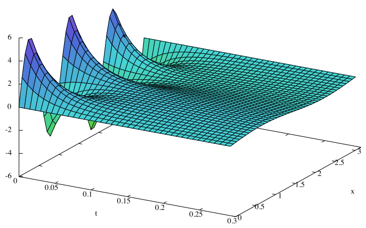
e imponemos que se satisfaga la condición inicial $u(x,0) = \varphi(x)$, obtenemos

$$u(x,\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right) = \varphi(x),$$

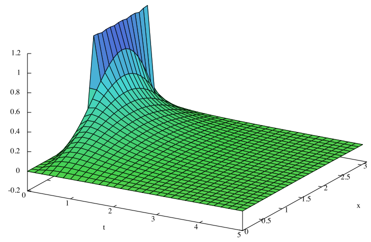
Identificando los A_n con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en senos de la función $\varphi(x)$ en el intervalo $(0,\, \ell)$, tenemos que

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right)\, dx$$

La Ecuación del calor también rige el proceso de desmagnetización espontánea de materiales magnetizados, y de la disolución de un soluto en un disolvente.

h 

(a) Solución (13).



(b) Solución (14).

Figura 3:

Ejemplo. Resolvamos la ecuación del calor para la función

$$\begin{aligned} &u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi \\ &u(x,0) = \varphi(x) = \operatorname{sen}(2x) + 5\operatorname{sen}(6x). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en el caso que nos ocupa $\ell = \pi$, la expresión que hemos obtenido para $\varphi(x)$ queda en la forma

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(2x) + 5\operatorname{sen}(6x)$$

y deducimos que todos los coeficientes $A_n = 0$ a excepción de $A_2 = 1$, y de $A_6 = 5$. Por tanto, la solución de la ecuación del calor es la siguiente función

$$\begin{aligned} u(x,\, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ \operatorname{sen}(nx) e^{-c^2 n^2 t} = \\ &= \operatorname{sen}(2x) e^{-4c^2 t} + 5\operatorname{sen}(6x) e^{-36c^2 t} \end{aligned} \tag{13}$$

Véase figura 3(a).

Ejemplo. Vamos a resolver la temperatura $u(x,t)$ en una varilla de longitud π si sus extremos se mantienen a temperatura cero para todo instante y la distribución inicial de la temperatura viene dada por

$$u(x,\, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Tómese para la difusión térmica de la varilla $c^2 = 1$.

Sabemos que $u(0,\, t) = u(\pi,\, t) = 0$, y que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Por tanto

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right) \operatorname{sen}(nx)\, e^{-n^2 t} \tag{14}$$

es la solución a nuestro problema.

Véase figura 3(b).