Resistencia de Materiales

EL SÓLIDO ELÁSTICO
(El tensor de deformación)

Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

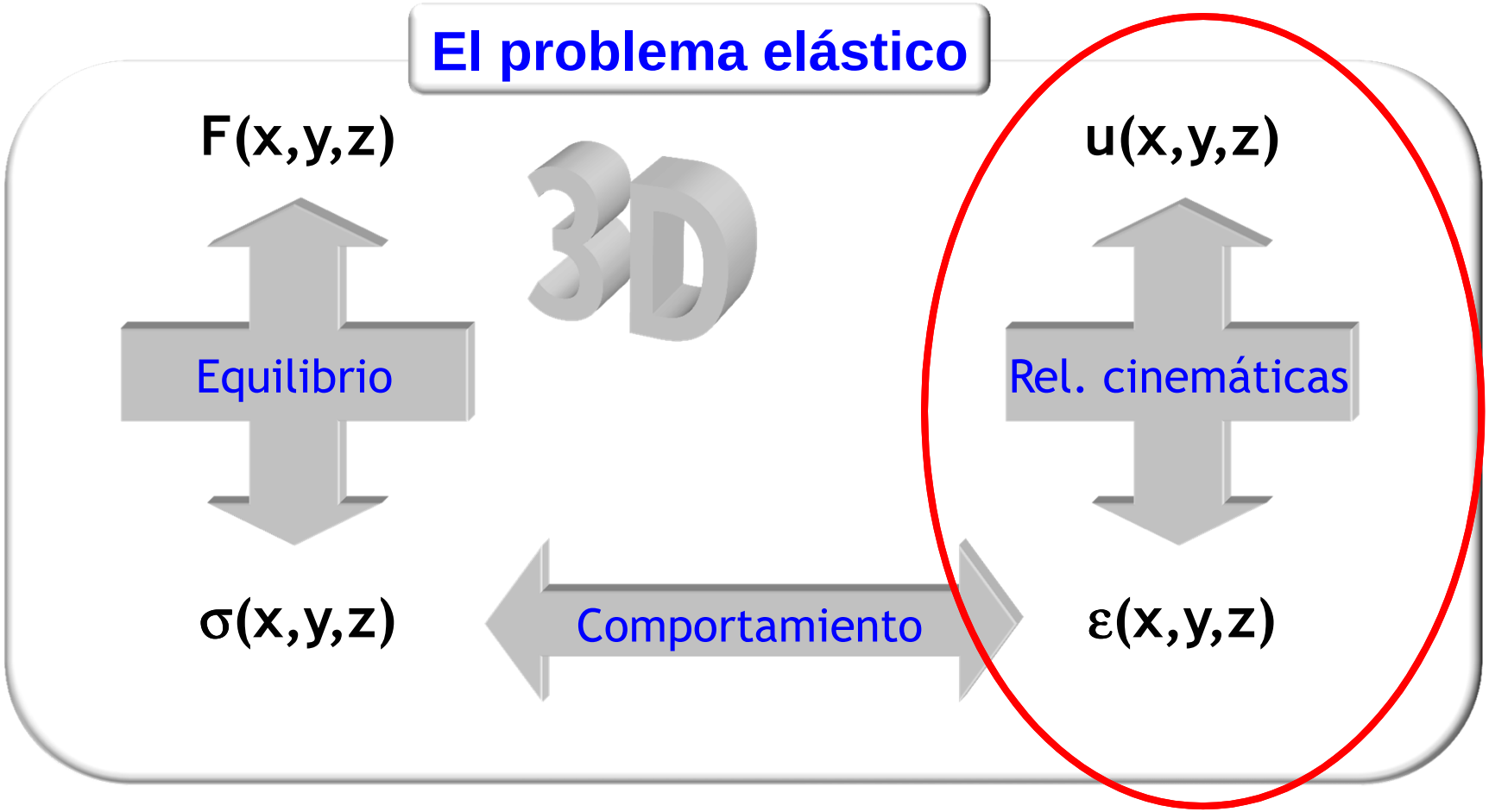
CONTENIDO DE LA ASIGNATURA

BLOQUE TEMATICO: ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERILES

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD Y LA RESISTENCIA DE MATERIALES
CAPÍTULO 2: EL SÓLIDO ELÁSTICO.
CAPÍTULO 3: CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN Y DE ROTURA
CAPÍTULO 4: RESISTENCIA DE MATERIALES. CONCEPTOS BÁSICOS
CAPÍTULO 5: TRACCIÓN Y COMPRESIÓN
CAPÍTULO 6: FLEXIÓN PLANA ELÁSTICA.
CAPÍTULO 7: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO PLÁSTICO
CAPÍTULO 8: FLEXO-COMPRESIÓN DESVIADA
CAPÍTULO 9: TORSIÓN
CAPÍTULO 10: POTENCIAL ELÁSTICO DE BARRAS. MÉTODOS ENERGÉTICOS
CAPÍTULO 11: INESTABILIDAD DE BARRAS PRISMÁTICAS. PANDEO

OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

El problema elástico



OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

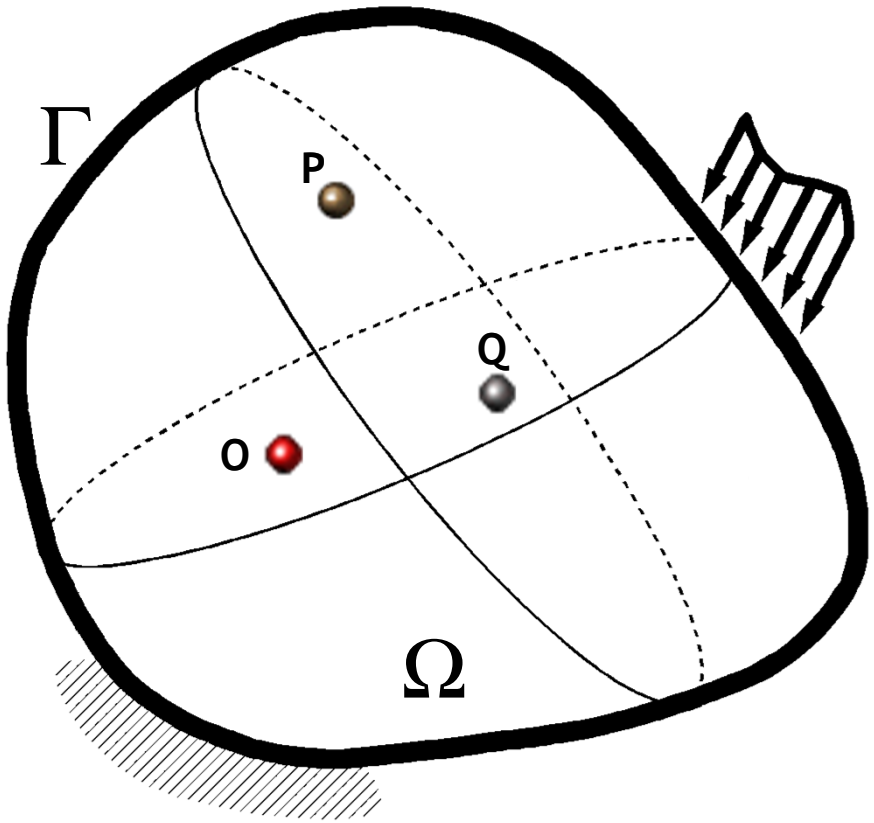
Resistencia de Materiales

EL SÓLIDO ELÁSTICO
(El tensor de deformación)

- Concepto de desplazamiento y deformación.
- Deformación en el entorno de un punto.
- Significado físico del tensor deformación y de la matriz de giro.
- El vector deformación. Componentes intrínsecas.
- Correlación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones.
- Tensor esférico y tensor desviador.
- Ecuaciones de compatibilidad.
- Deformación plana.

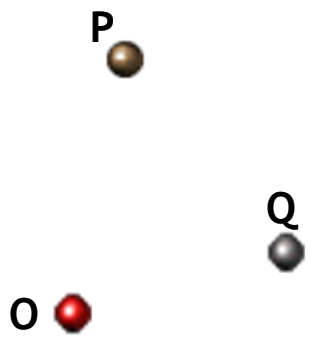
OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

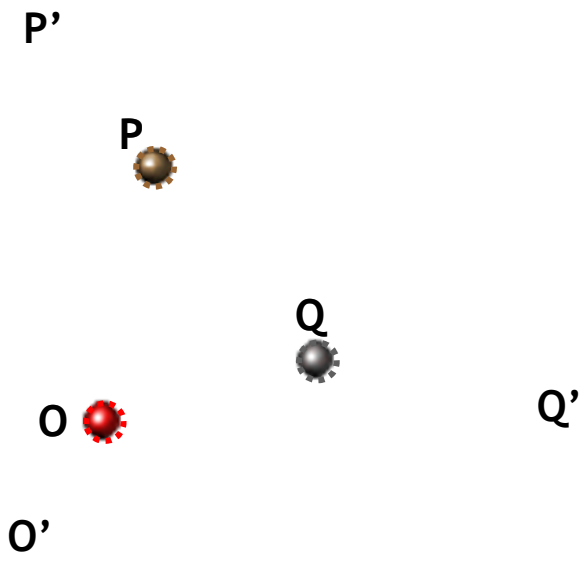
Concepto de desplazamiento y deformación



OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

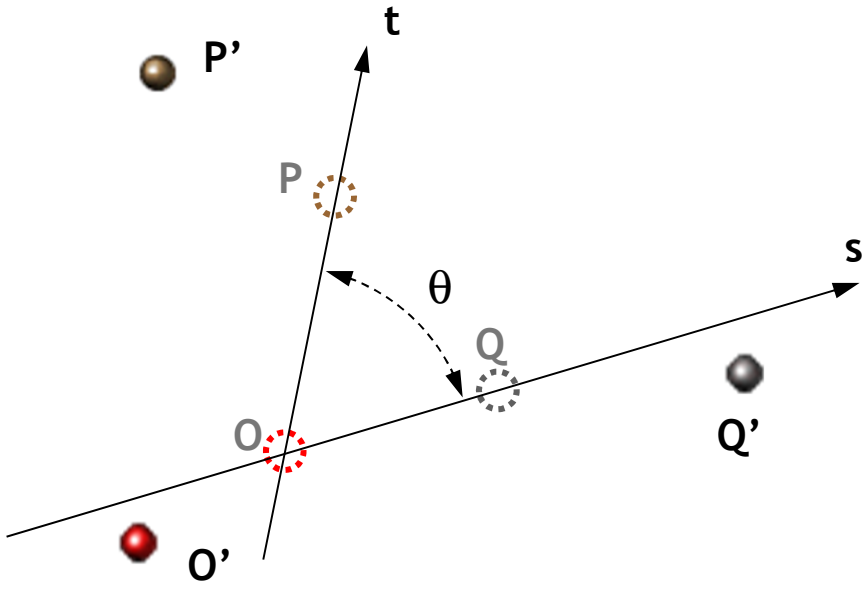
Concepto de desplazamiento y deformación



OCW UMA

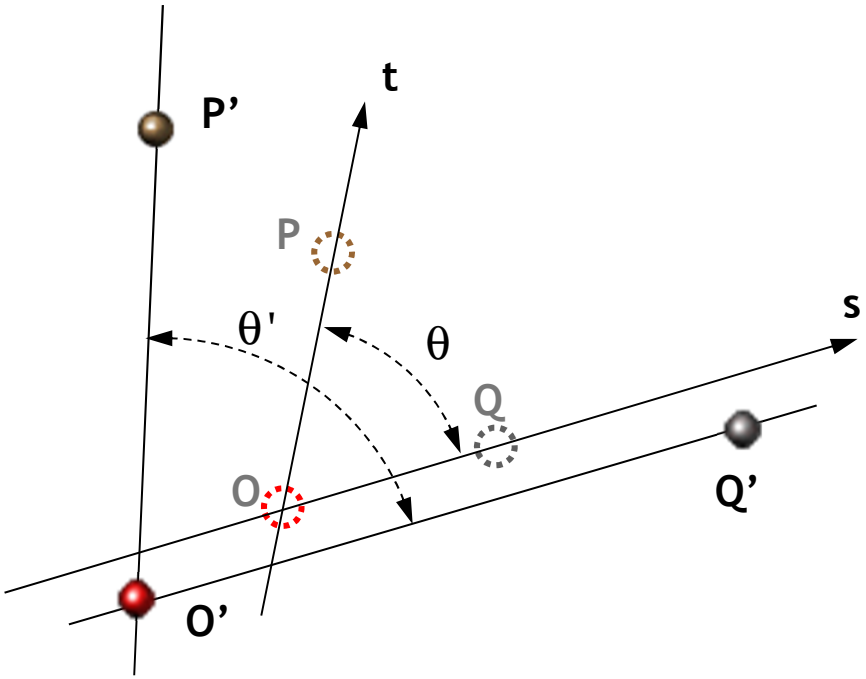
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



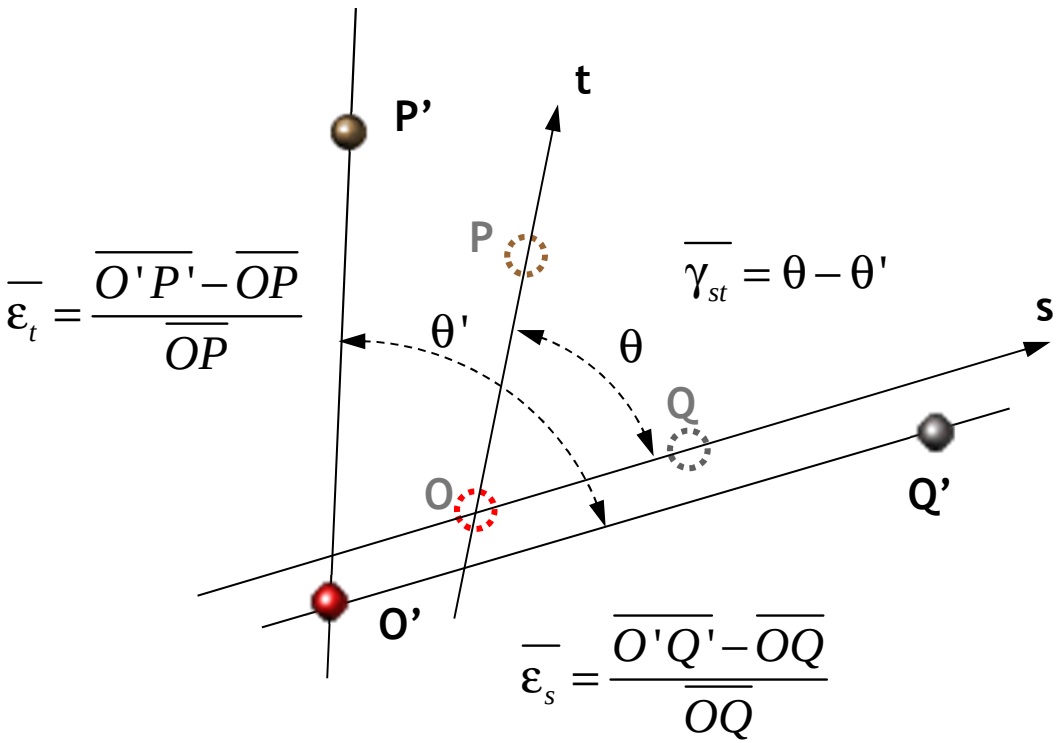
OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

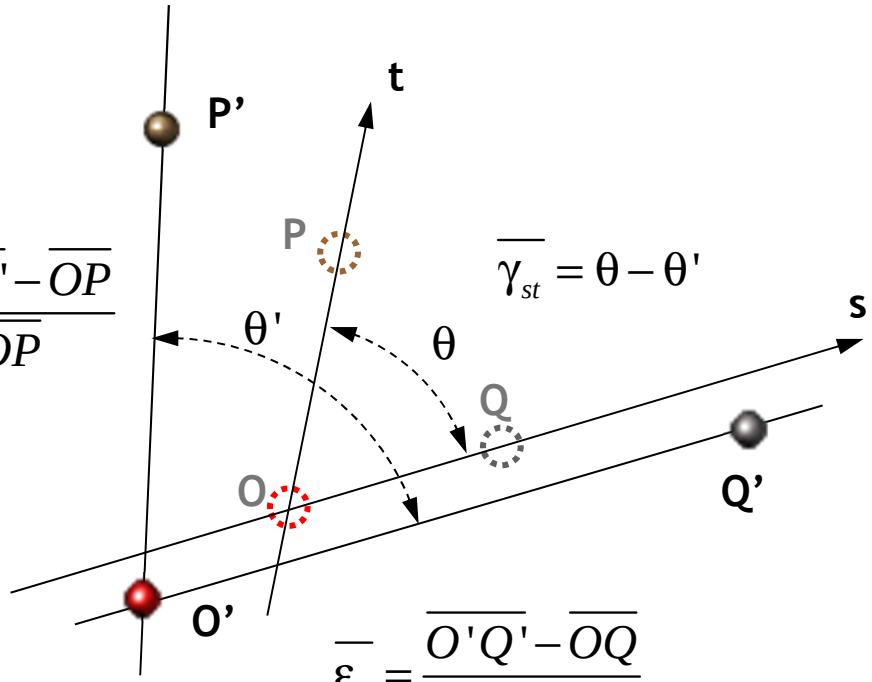
Concepto de desplazamiento y deformación



Valores medios

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



$$\overline{\varepsilon_t} = \frac{\overline{O'P'} - \overline{OP}}{\overline{OP}}$$

$$\overline{\gamma_{st}} = \theta - \theta'$$

$$\overline{\varepsilon_s} = \frac{\overline{O'Q'} - \overline{OQ}}{\overline{OQ}}$$

Valores medios

Valores instantáneos

$$\varepsilon_s = \lim_{Q \to O} \frac{\overline{O'Q'} - \overline{OQ}}{\overline{OQ}}$$

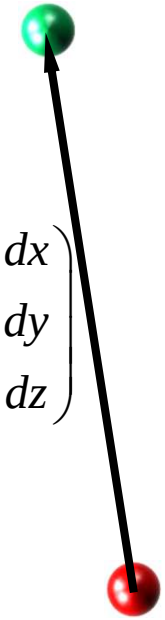
$$\varepsilon_t = \lim_{P \to O} \frac{\overline{O'P'} - \overline{OP}}{\overline{OP}}$$

$$\gamma_{st} = \lim_{P,Q \to O} (\theta - \theta')$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación

$$Q(x+dx, y+dy, z+dz)$$

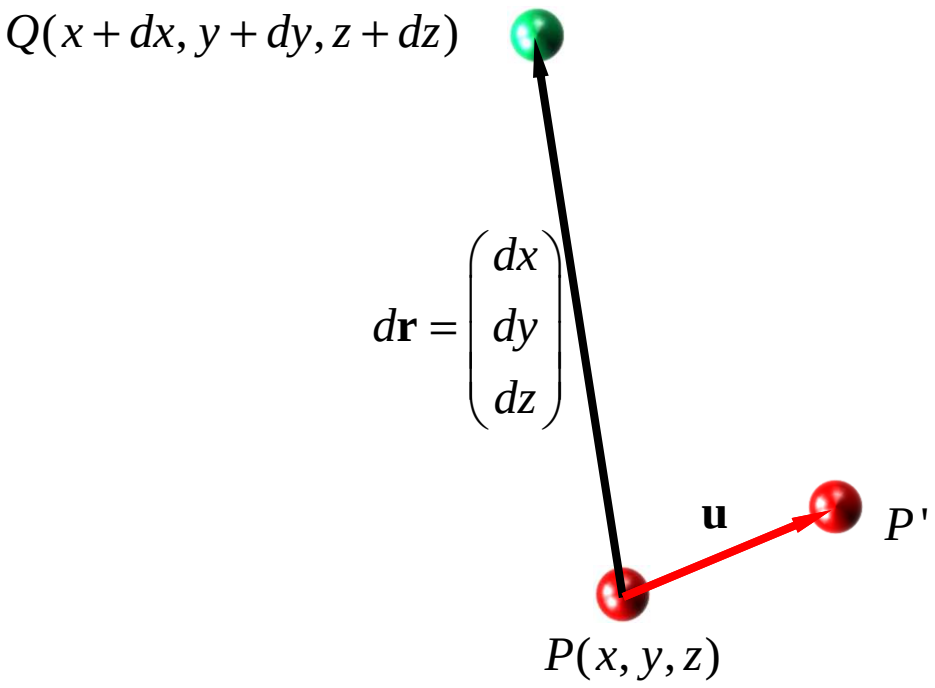


$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$P(x, y, z)$$

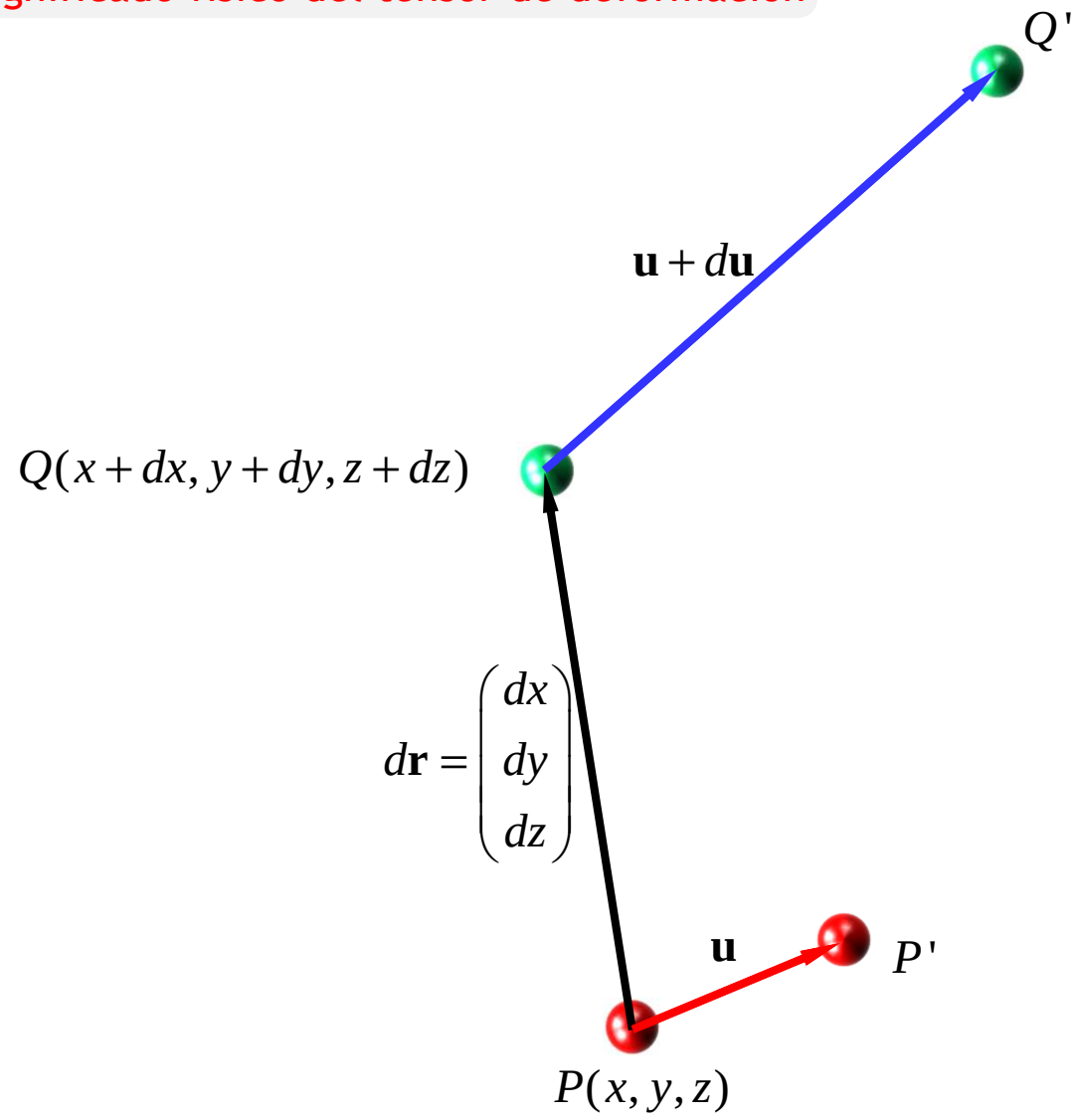
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



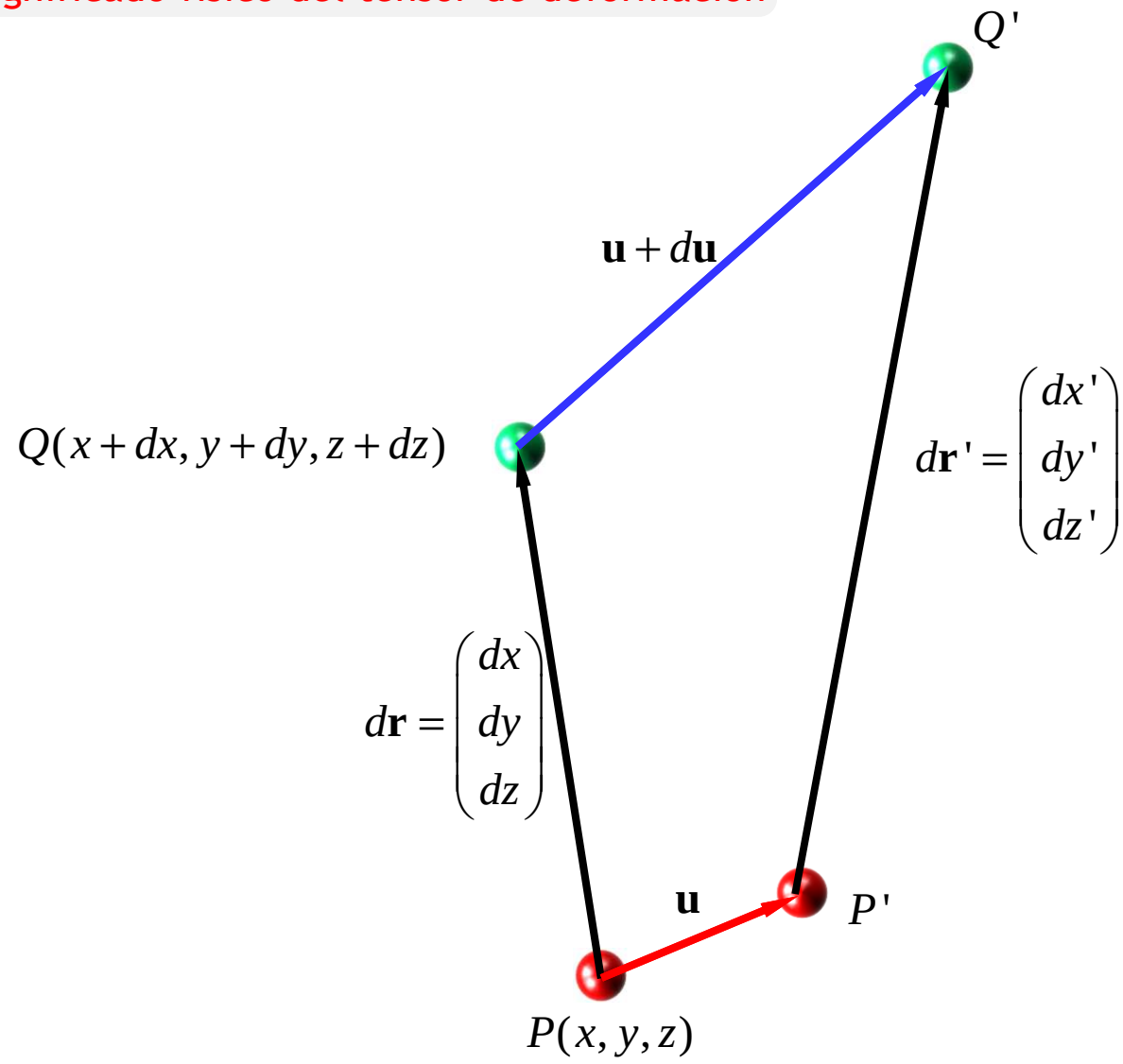
OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



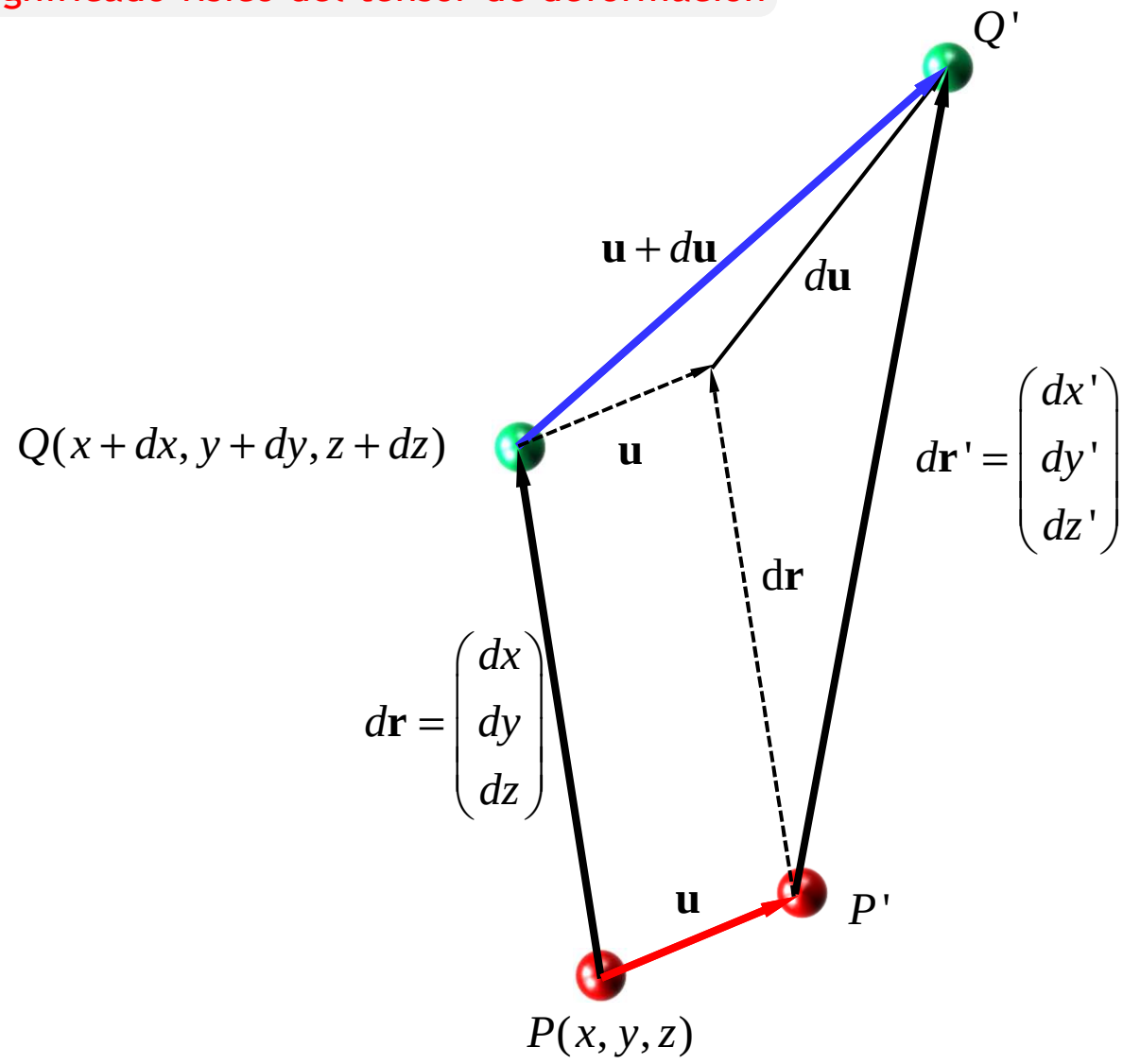
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



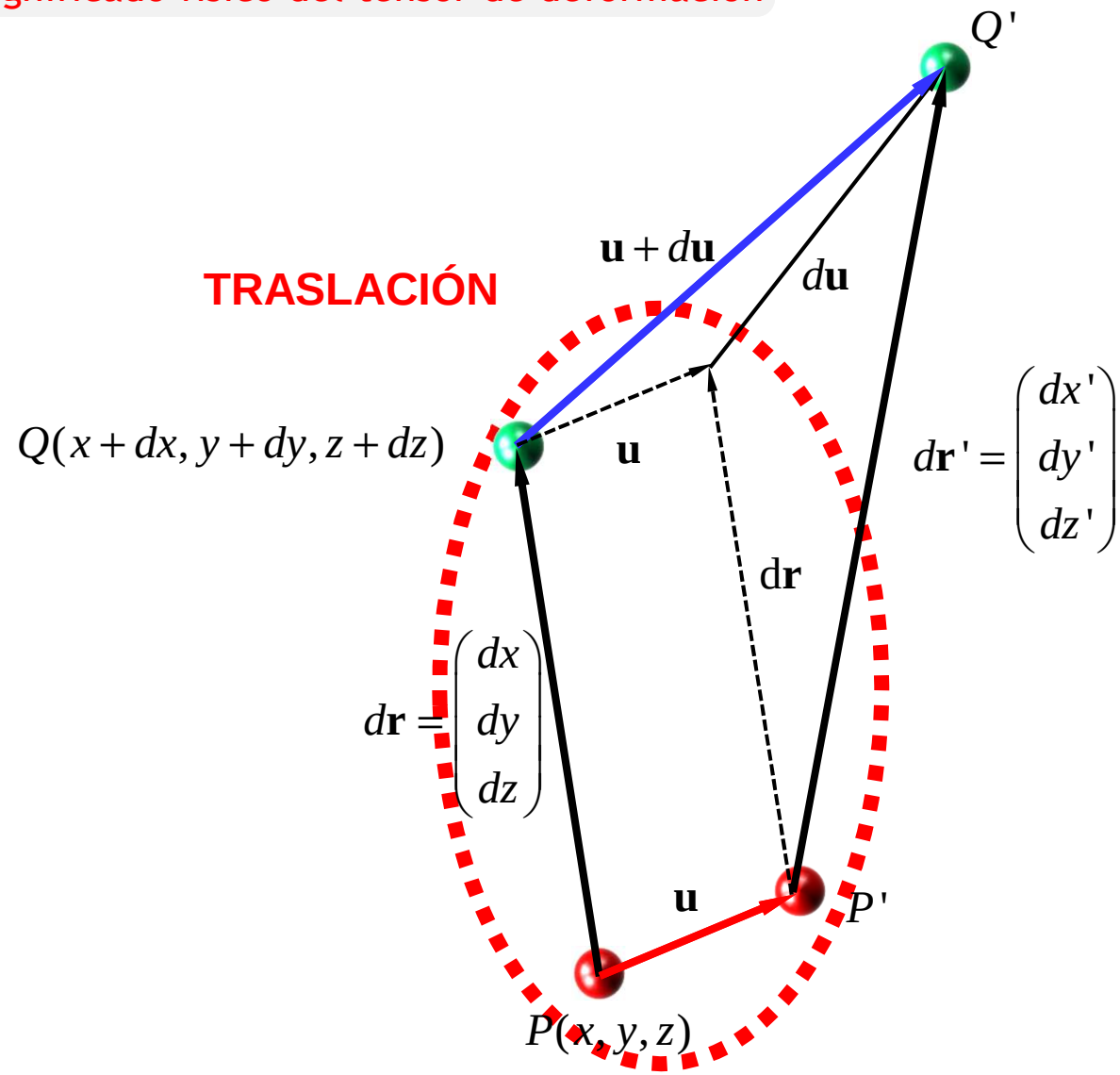
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



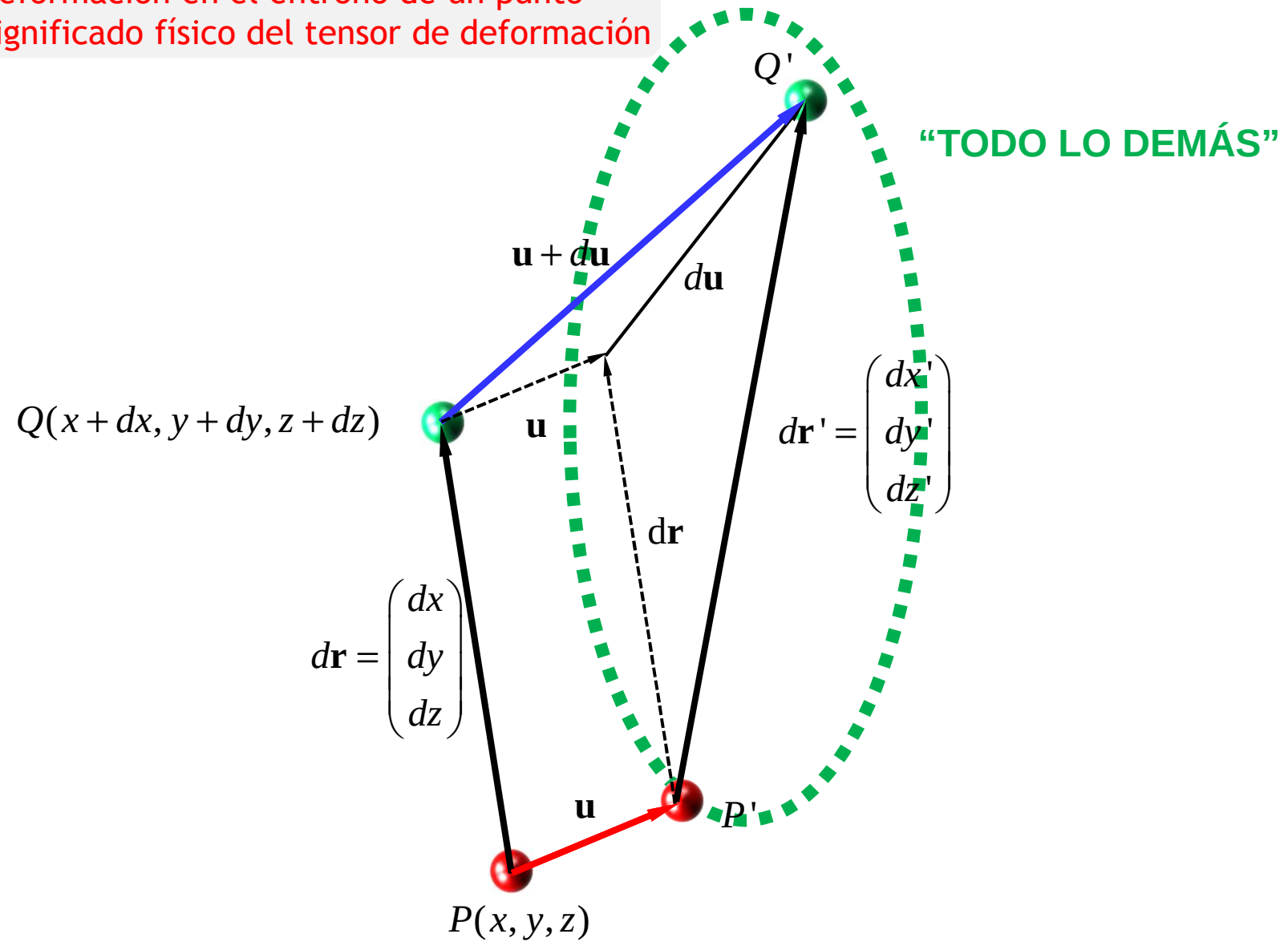
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



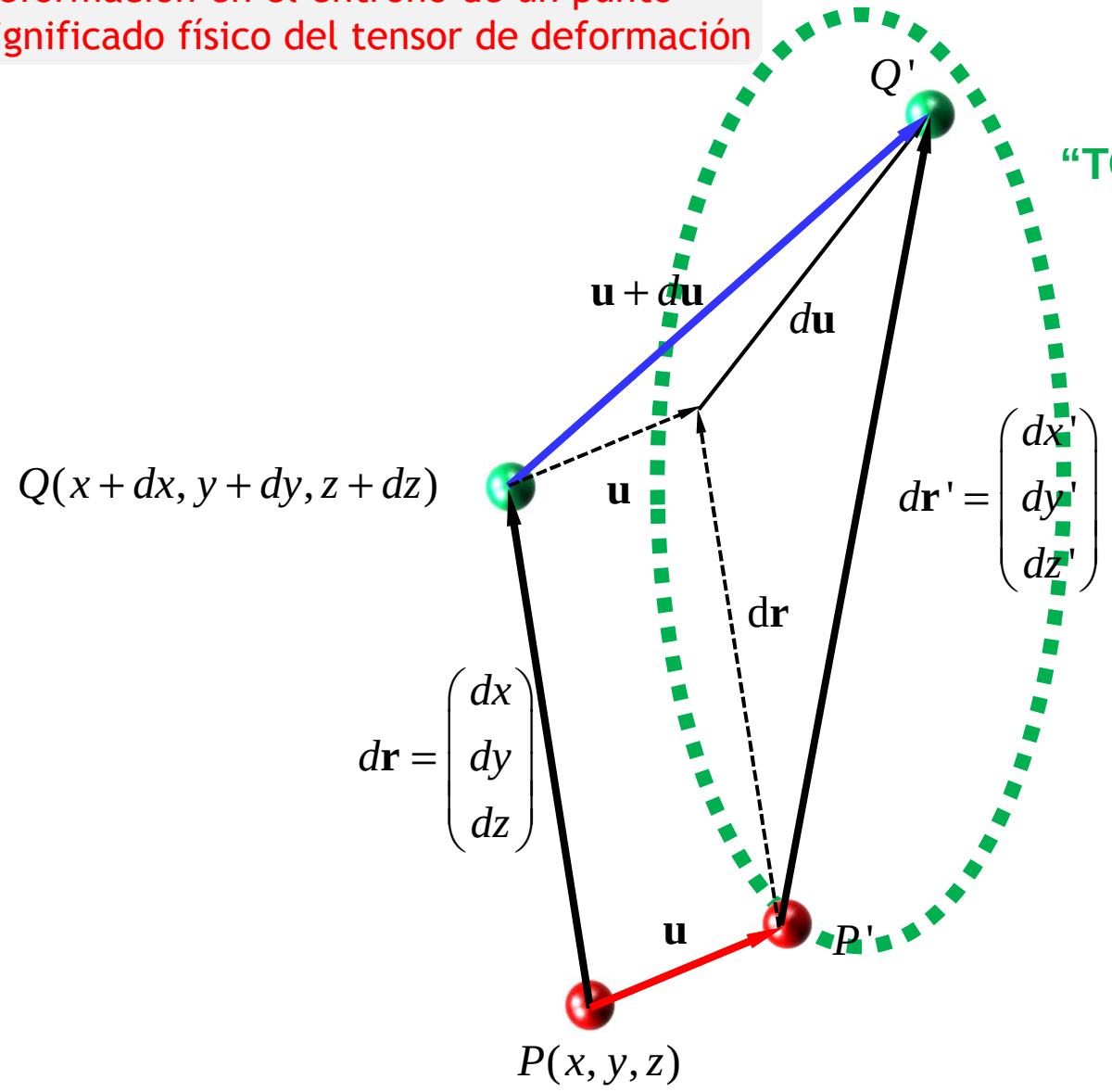
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación

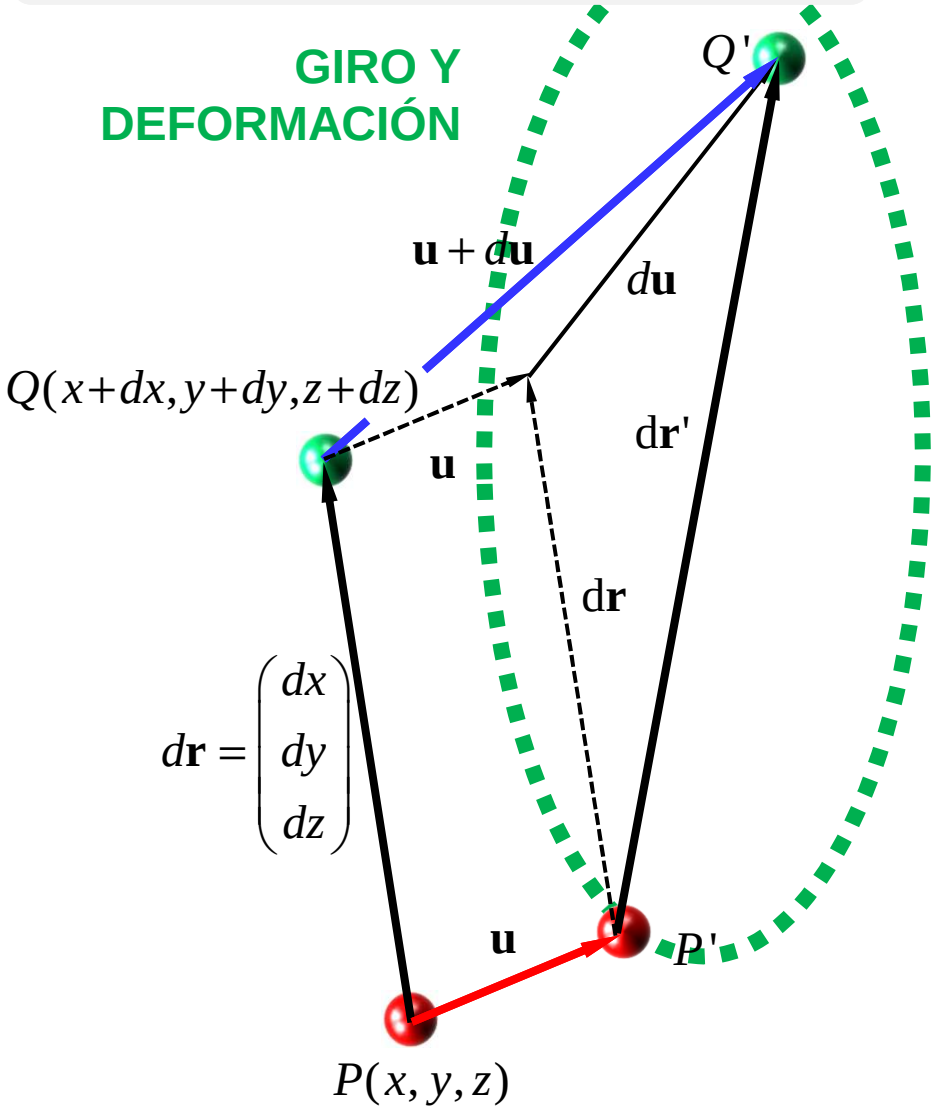


"TODO LO DEMÁS"

GIRO Y DEFORMACIÓN

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

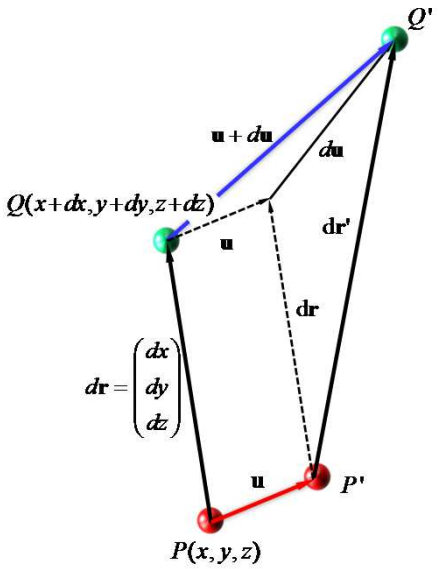
Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



$$\mathbf{u}\big|_Q = \mathbf{u}\big|_P + d\mathbf{u}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



TRASLACIÓN **GIRO Y DEFORMACIÓN**

$$\mathbf{u}\big|_Q = \mathbf{u}\big|_P + d\mathbf{u}$$

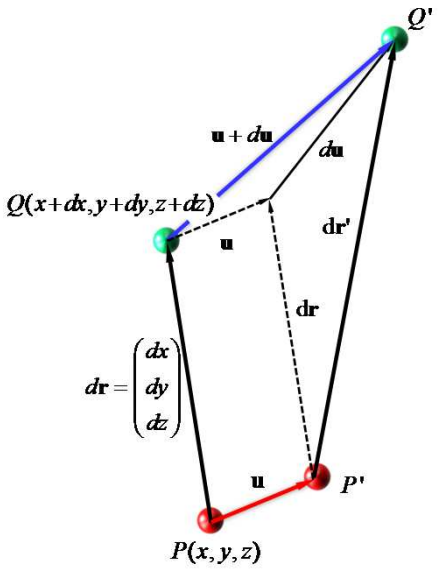
$$u\big|_Q = u\big|_P + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + O\left(d^2\right)$$

$$v\big|_Q = v\big|_P + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + O\left(d^2\right)$$

$$w\big|_Q = w\big|_P + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + O\left(d^2\right)$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



TRASLACIÓN **GIRO Y DEFORMACIÓN**

$$\mathbf{u}\big|_Q = \mathbf{u}\big|_P + d\mathbf{u}$$

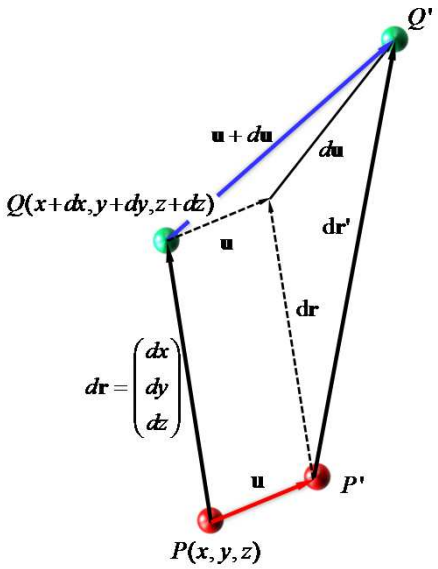
$$u\big|_Q = u\big|_P + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + O(\cancel{\ })$$

$$v\big|_Q = v\big|_P + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + O(\cancel{\ })$$

$$w\big|_Q = w\big|_P + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + O(\cancel{\ })$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación



TRASLACIÓN

GIRO Y DEFORMACIÓN

$$\mathbf{u}\big|_Q = \mathbf{u}\big|_P + d\mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_Q = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_P + \begin{pmatrix} u,_x & u,_y & u,_z \\ v,_x & v,_y & v,_z \\ w,_x & w,_y & w,_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$u\big|_Q = u\big|_P + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$v\big|_Q = v\big|_P + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$w\big|_Q = w\big|_P + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación

GIRO Y DEFORMACIÓN

$$\mathbf{u}\big|_Q = \mathbf{u}\big|_P + d\mathbf{u}$$

TRASLACIÓN

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_Q = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_P + \begin{pmatrix} u,_x & u,_y & u,_z \\ v,_x & v,_y & v,_z \\ w,_x & w,_y & w,_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^t}{2} + \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^t}{2}$$

$$\begin{pmatrix} u,_x & \frac{1}{2}\left(u,_y + v,_x\right) & \frac{1}{2}\left(u,_z + w,_x\right) \\ \frac{1}{2}\left(u,_y + v,_x\right) & v,_y & \frac{1}{2}\left(v,_z + w,_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(u,_z + w,_x\right) & \frac{1}{2}\left(v,_z + w,_y\right) & w,_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(u,_y - v,_x\right) & \frac{1}{2}\left(u,_z - w,_x\right) \\ \frac{1}{2}\left(v,_x - u,_y\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(v,_z - w,_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(w,_x - u,_z\right) & \frac{1}{2}\left(w,_y - v,_z\right) & 0 \end{pmatrix}$$

¿GIRO?
¿DEFORMACIÓN?
¿UNA COMPOSICIÓN DE AMBAS?

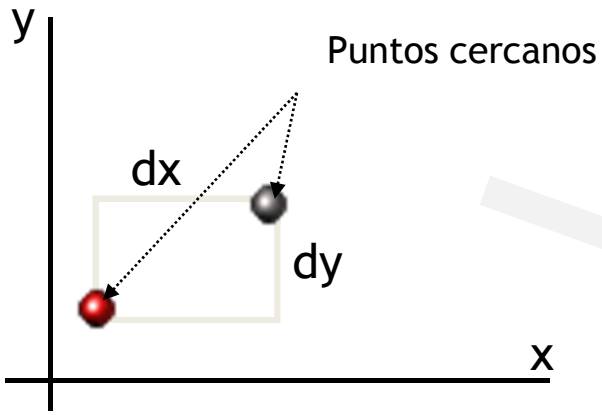
¿GIRO?
¿DEFORMACIÓN?
¿UNA COMPOSICIÓN DE AMBAS?

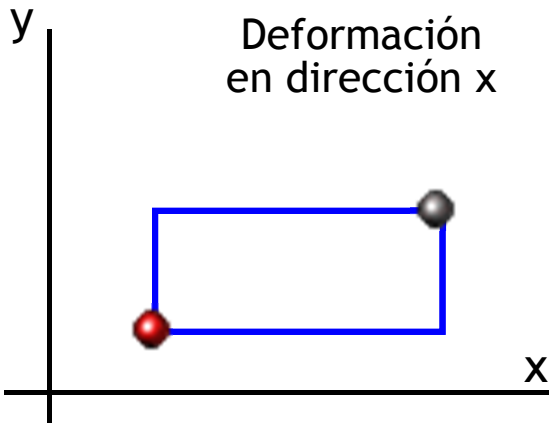
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

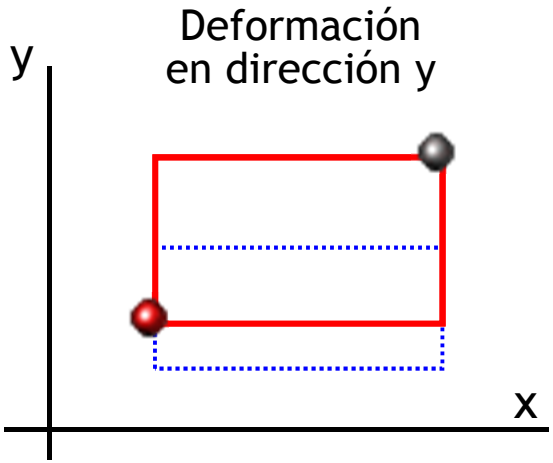
Concepto de desplazamiento y deformación

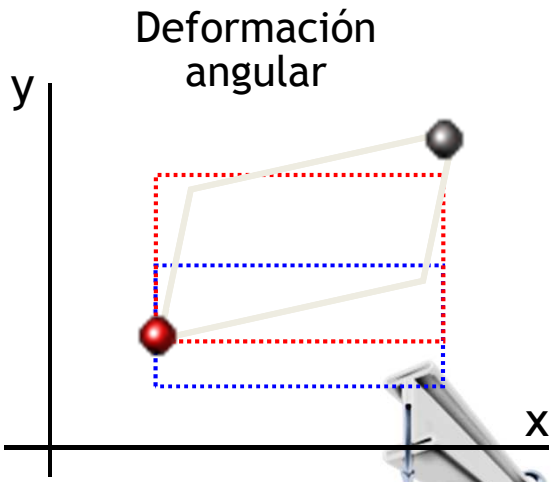
Deformación

variación de las posiciones relativas de los puntos del dominio



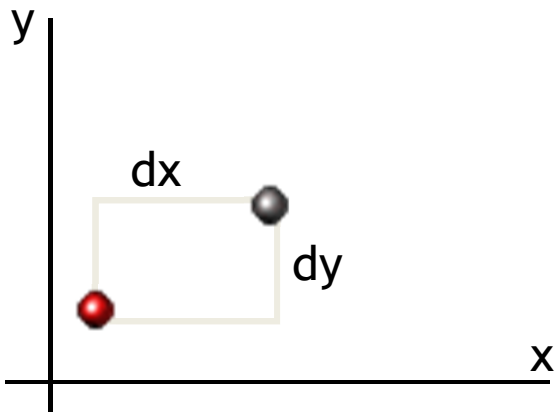


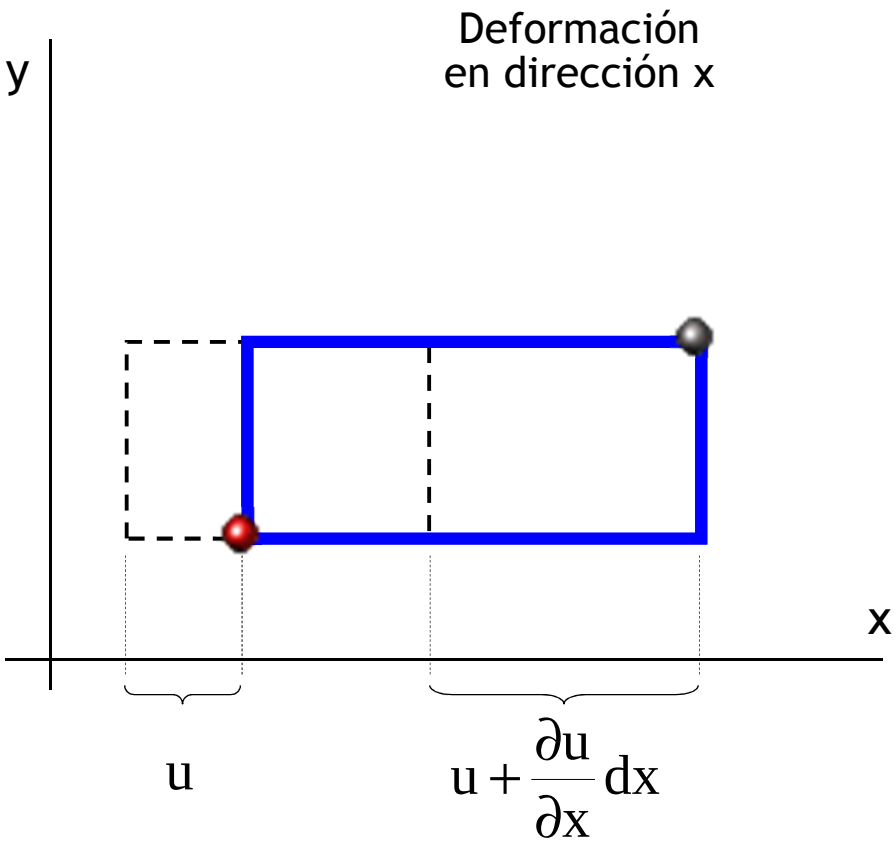




Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación

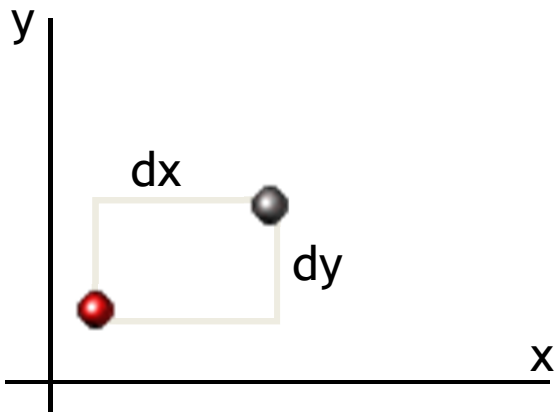


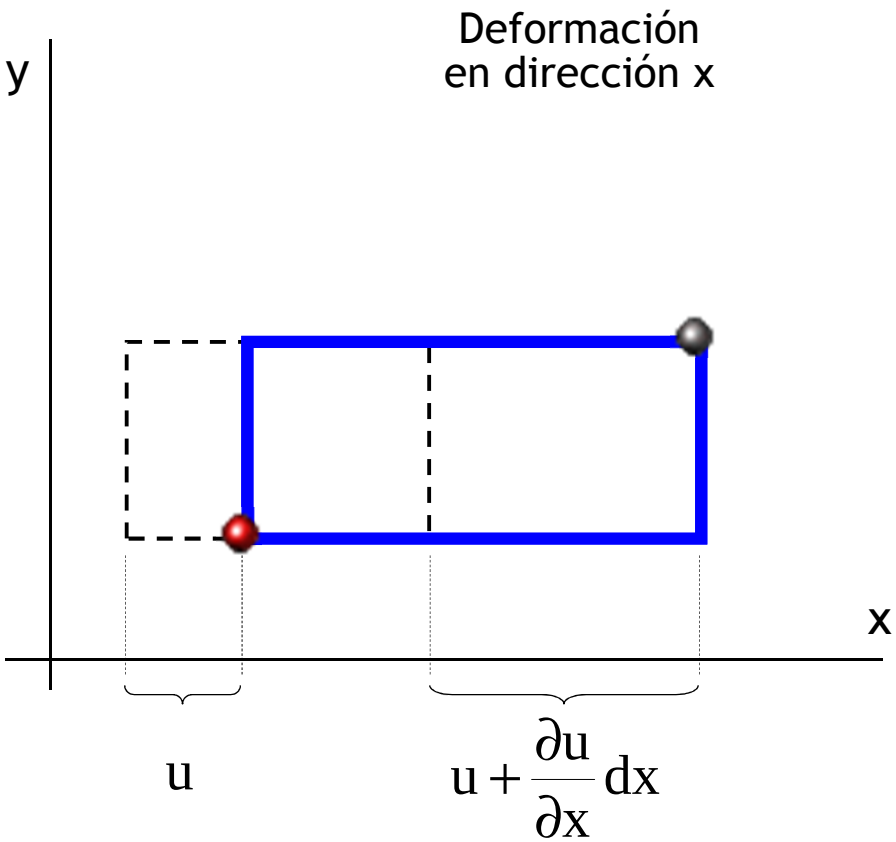


OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación

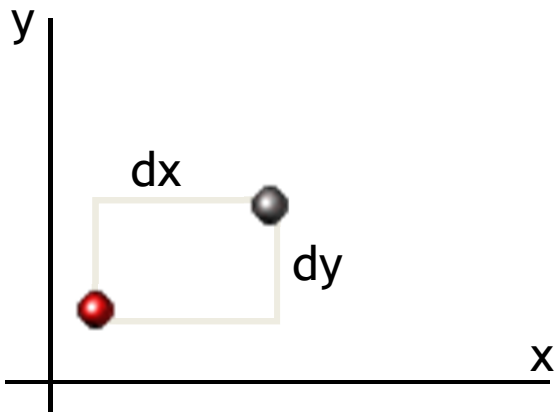


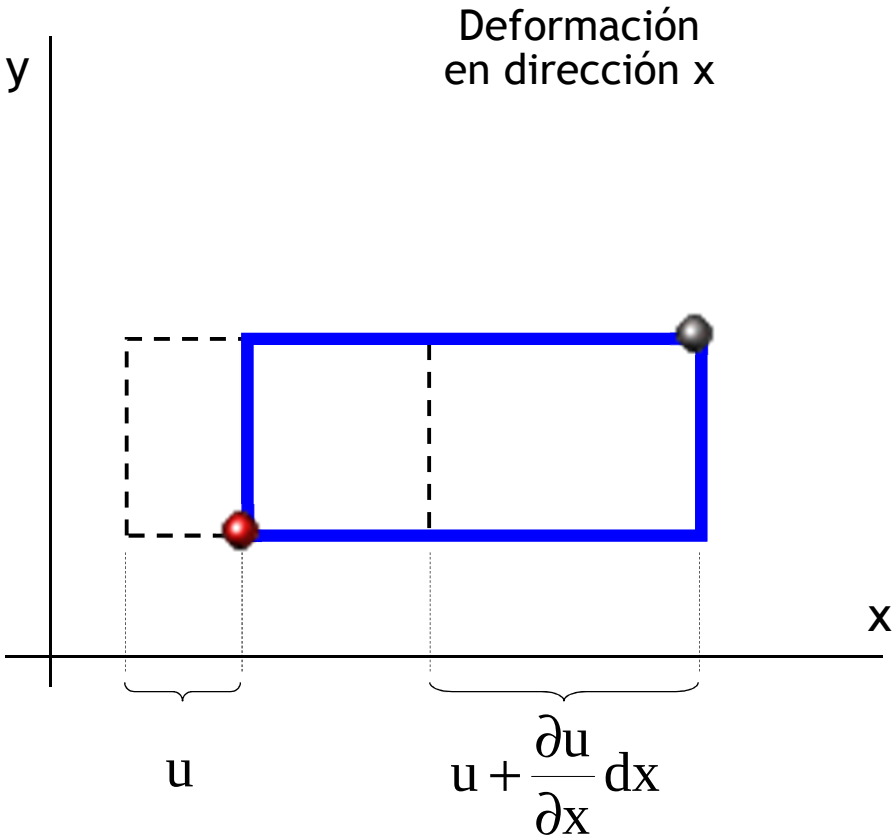


$$\varepsilon_x = \lim_{l_x^i \to O} \frac{l_x^f - l_x^i}{l_x^i} = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación

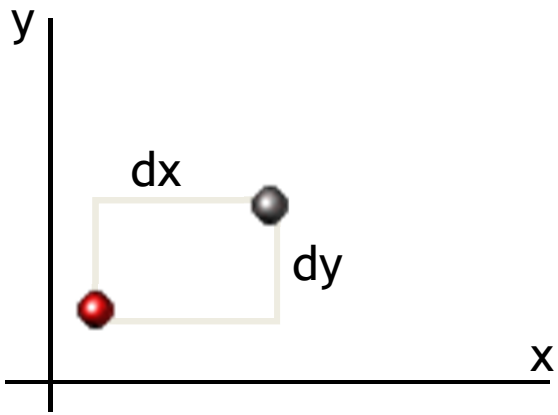




$$\varepsilon_x = \lim_{l_x^i \to O} \frac{l_x^f - l_x^i}{l_x^i} = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx}$$

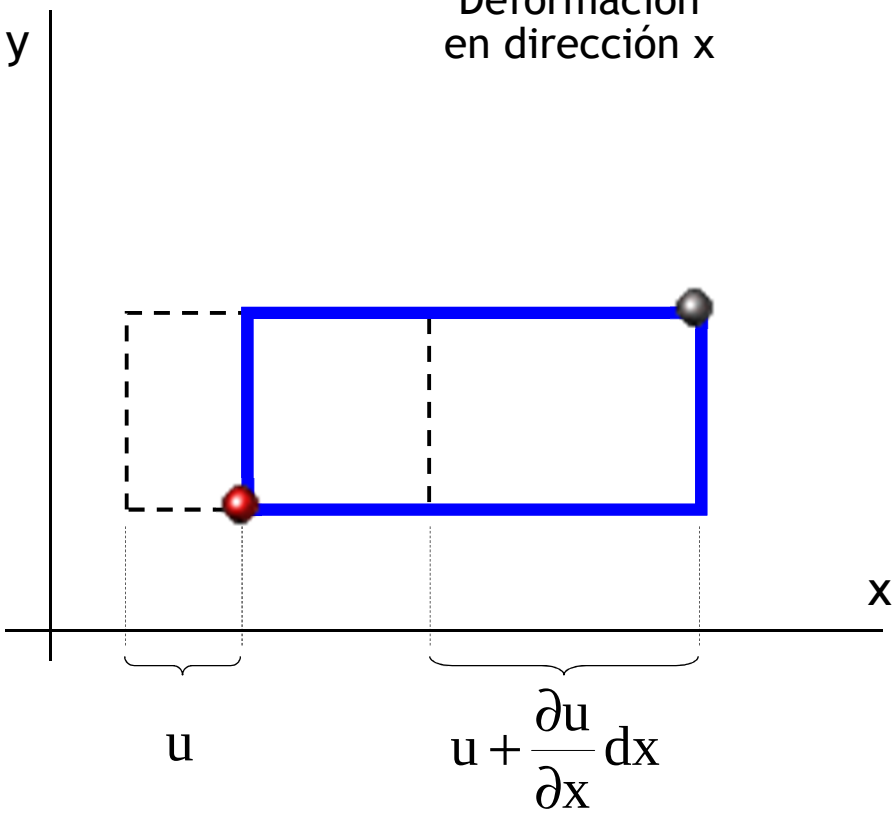
OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) lateriales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

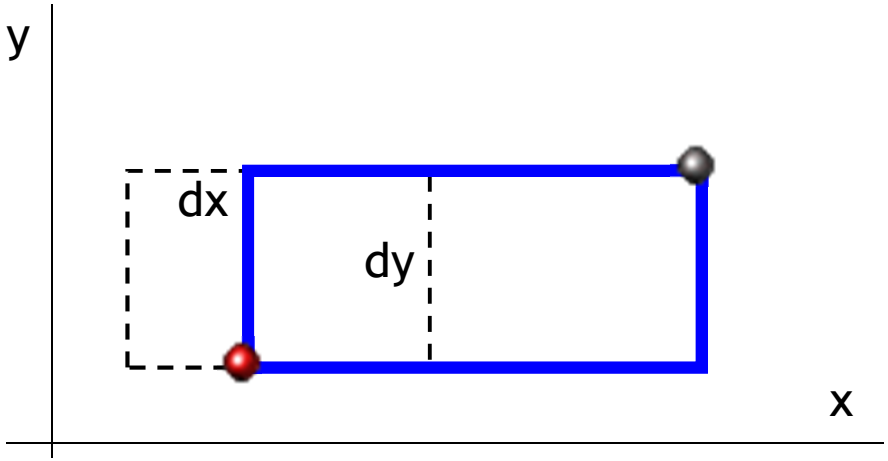
Deformación en dirección x



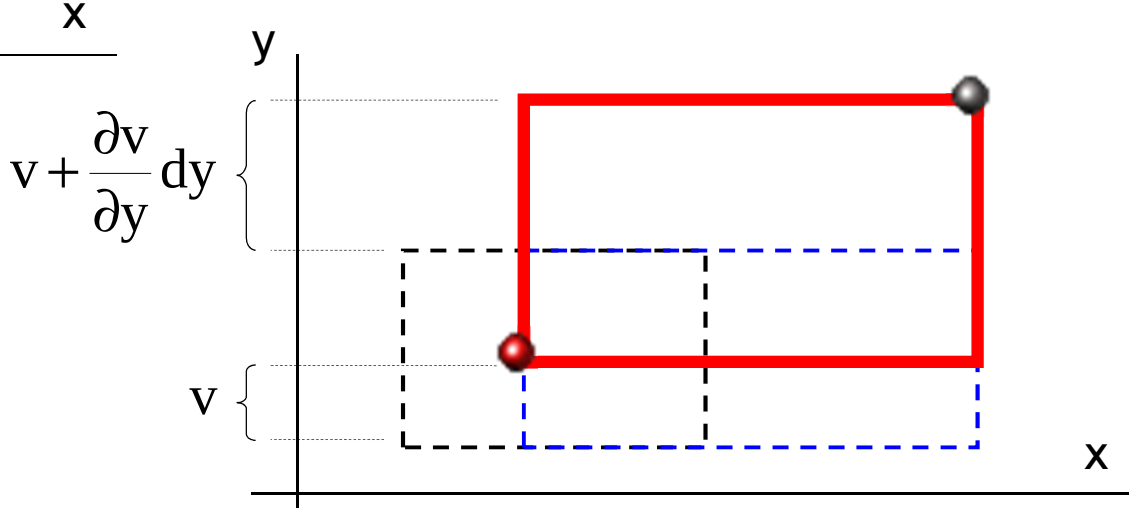
$$\varepsilon_x = \lim_{l_x^i \to O} \frac{l_x^f - l_x^i}{l_x^i} = \frac{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



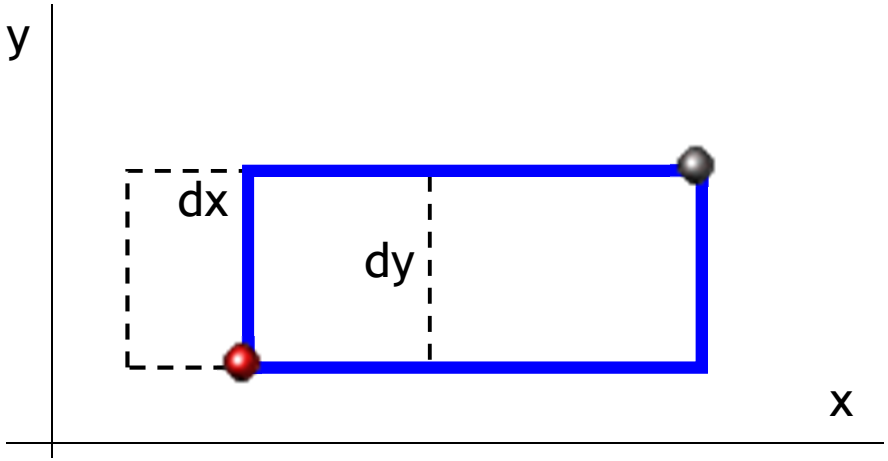
Deformación
en dirección y



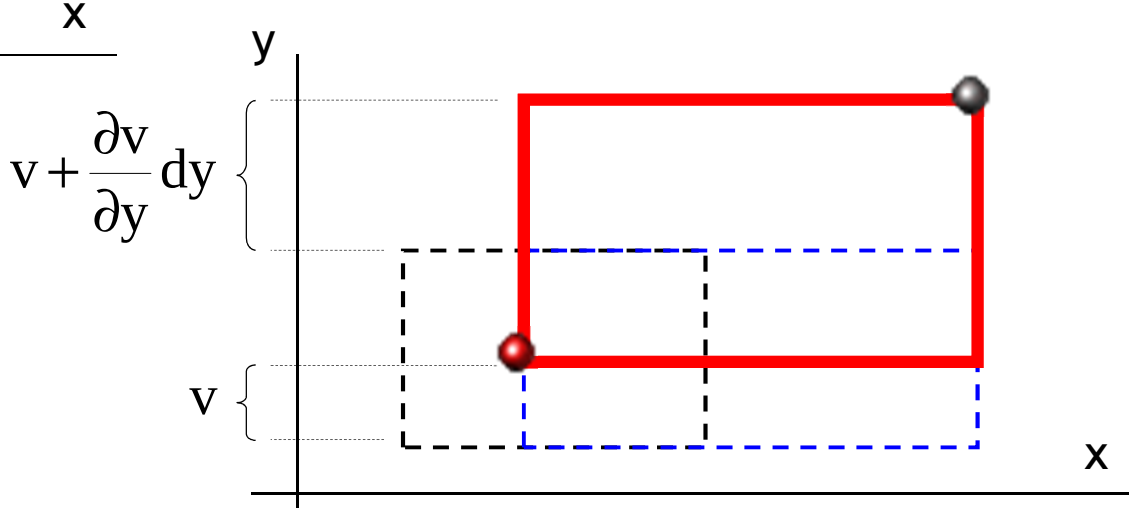
$$\varepsilon_y = \lim_{l_y^i \to O} \frac{l_y^f - l_y^i}{l_y^i} = \frac{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



Deformación
en dirección y

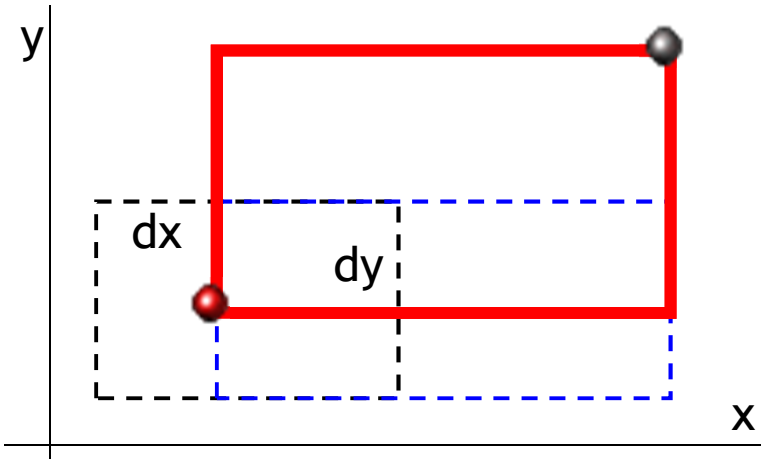


$$\boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}}$$

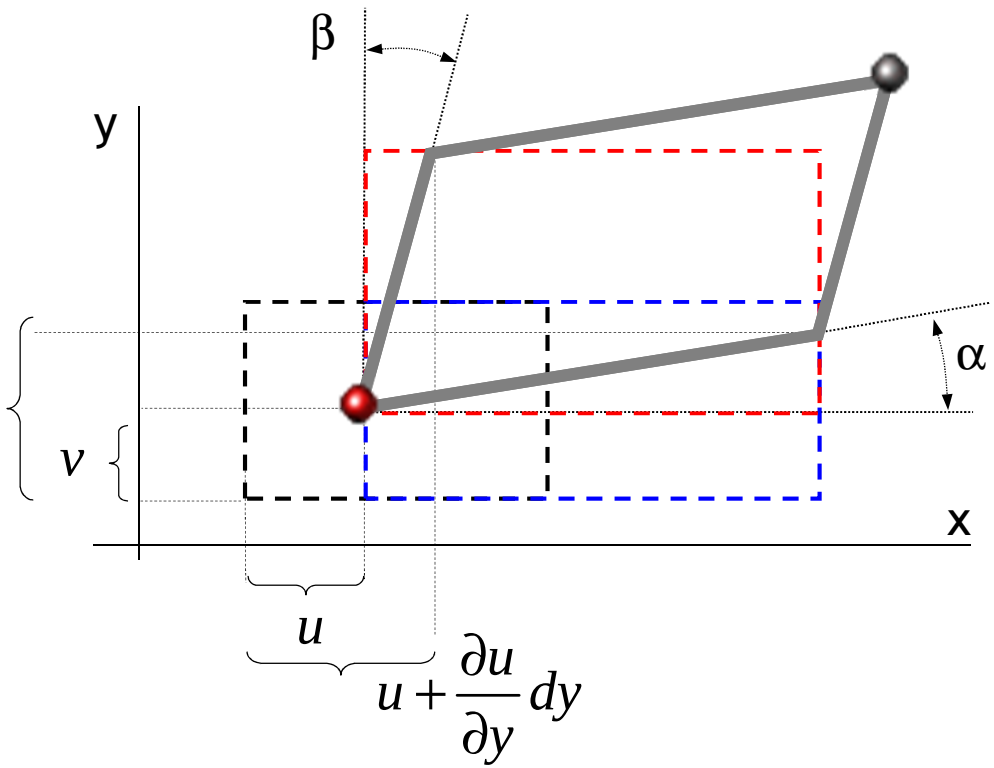
$$\varepsilon_y = \lim_{l_y^i \to O} \frac{l_y^f - l_y^i}{l_y^i} = \frac{dy + v + \frac{\partial v}{\partial y}dy - v - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



Deformación angular



$$v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$\alpha,\beta << 1$$

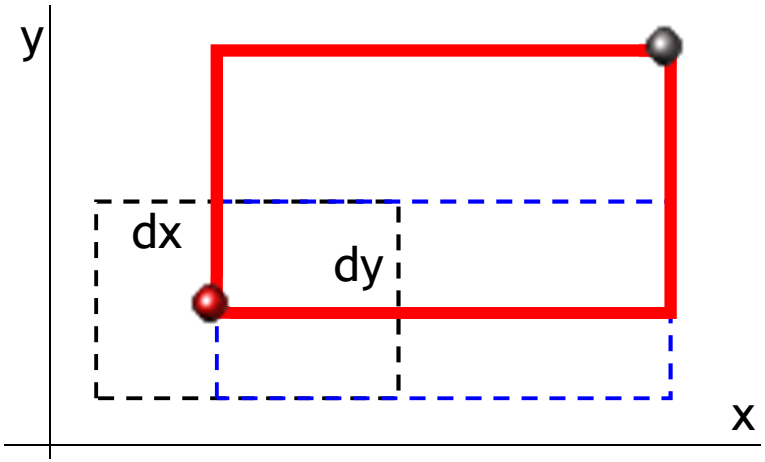
$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha;\ \operatorname{tg}\beta \approx \beta$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{l_x^i, l_y^i \to O}\left(\theta^i - \theta^f\right) = \alpha + \beta \approx \frac{v+\frac{\partial v}{\partial x}dx - v}{dx} + \frac{u+\frac{\partial u}{\partial y}dy - u}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

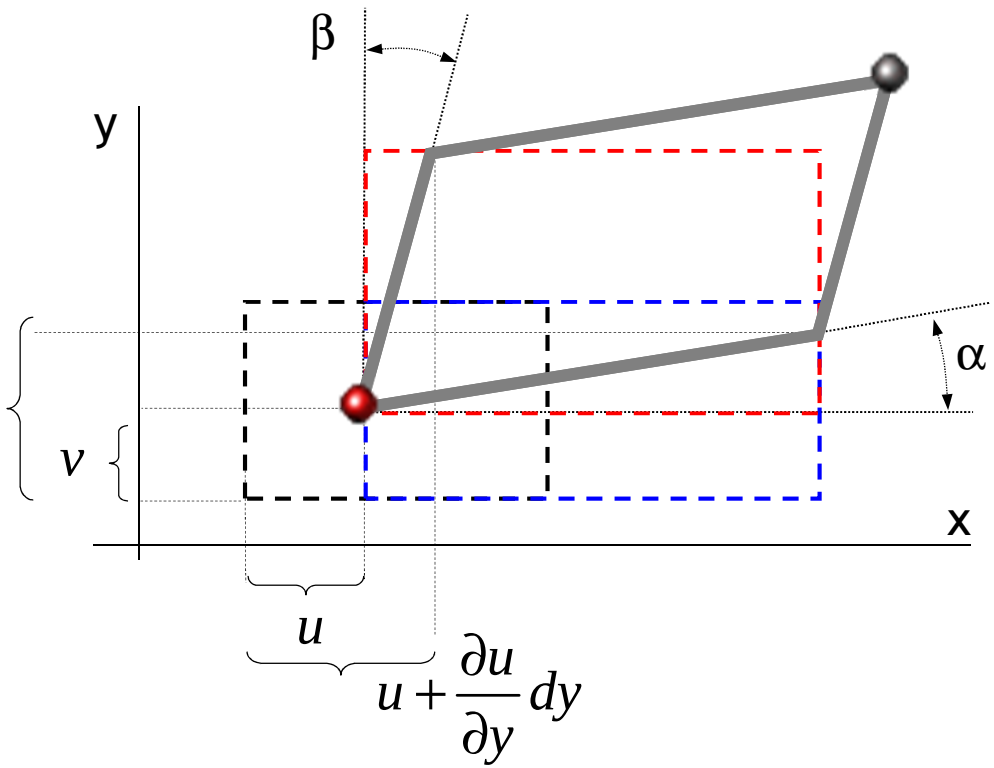
OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Concepto de desplazamiento y deformación



Deformación angular



$$v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$v$$

$$u$$

$$u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\boxed{\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$\gamma_{xy}=\lim_{l_x^i,l_y^i\to O}(\theta^i-\theta^f)=\alpha+\beta\approx\frac{v+\frac{\partial v}{\partial x}dx-v}{dx}+\frac{u+\frac{\partial u}{\partial y}dy-u}{dy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

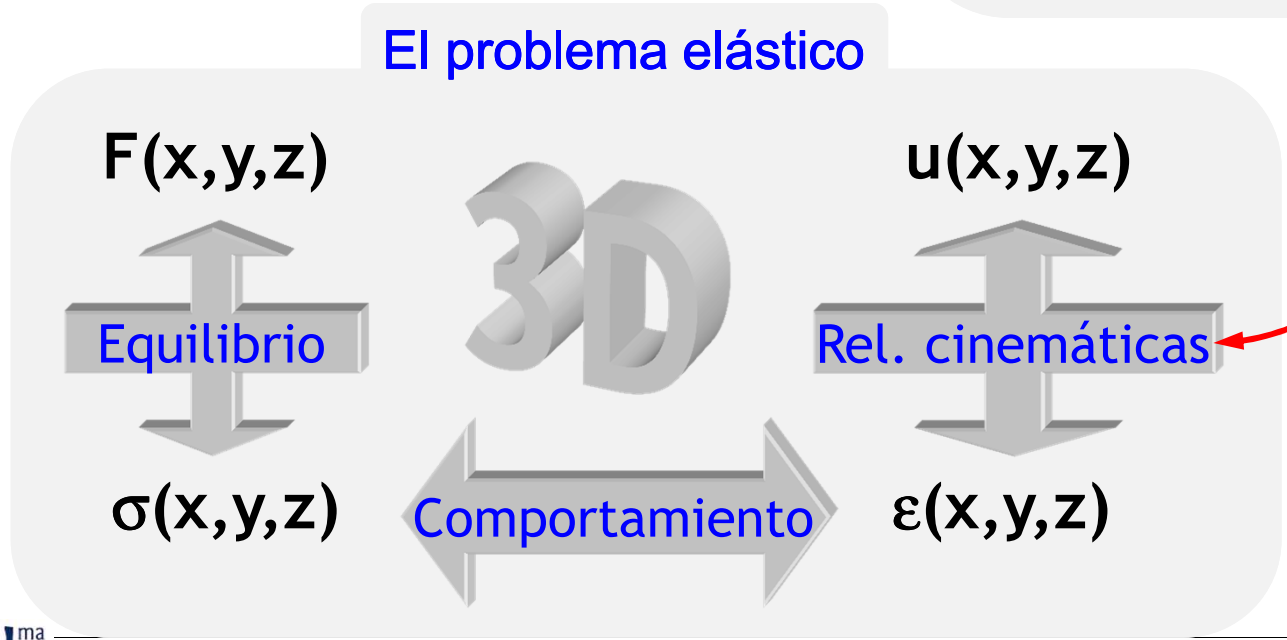
Concepto de desplazamiento y deformación

Relaciones cinemáticas

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación

TENSOR DE DEFORMACIONES

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación

Deformaciones lineales instantáneas en las direcciones del S.R.

TENSOR DE DEFORMACIONES

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación

Deformaciones lineales instantáneas en las direcciones del S.R.

TENSOR DE DEFORMACIONES

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

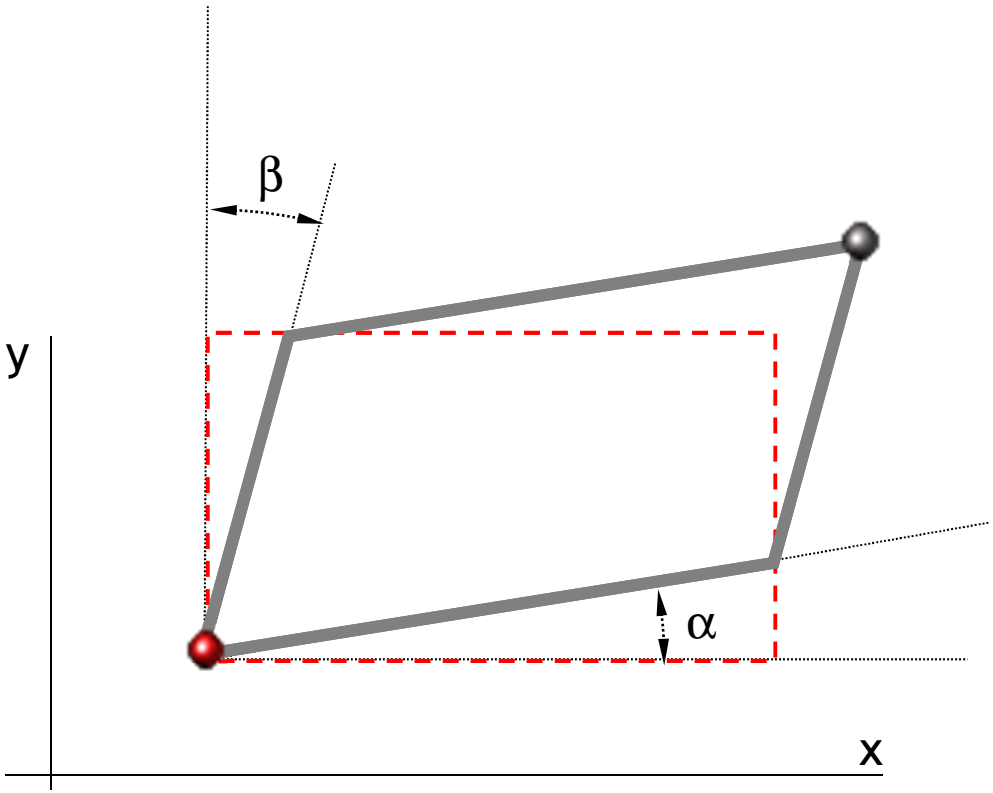
Simétrico

¿Deformaciones angulares instantáneas en los planos de referencia?

¿Por qué 1/2?

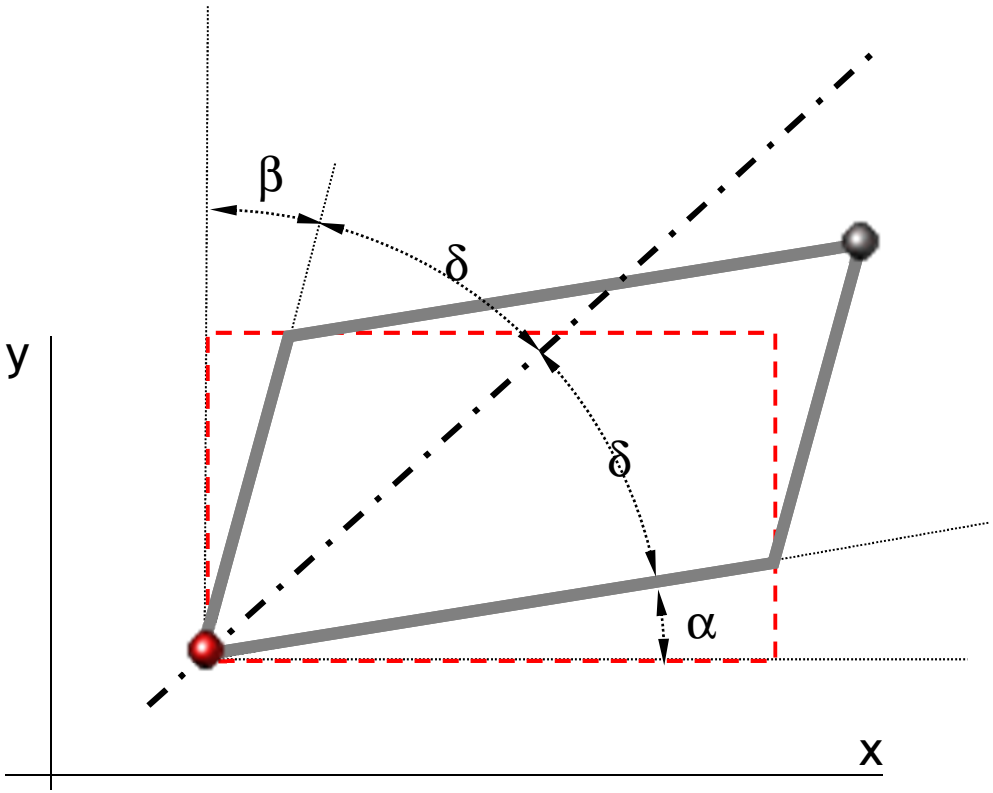
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación



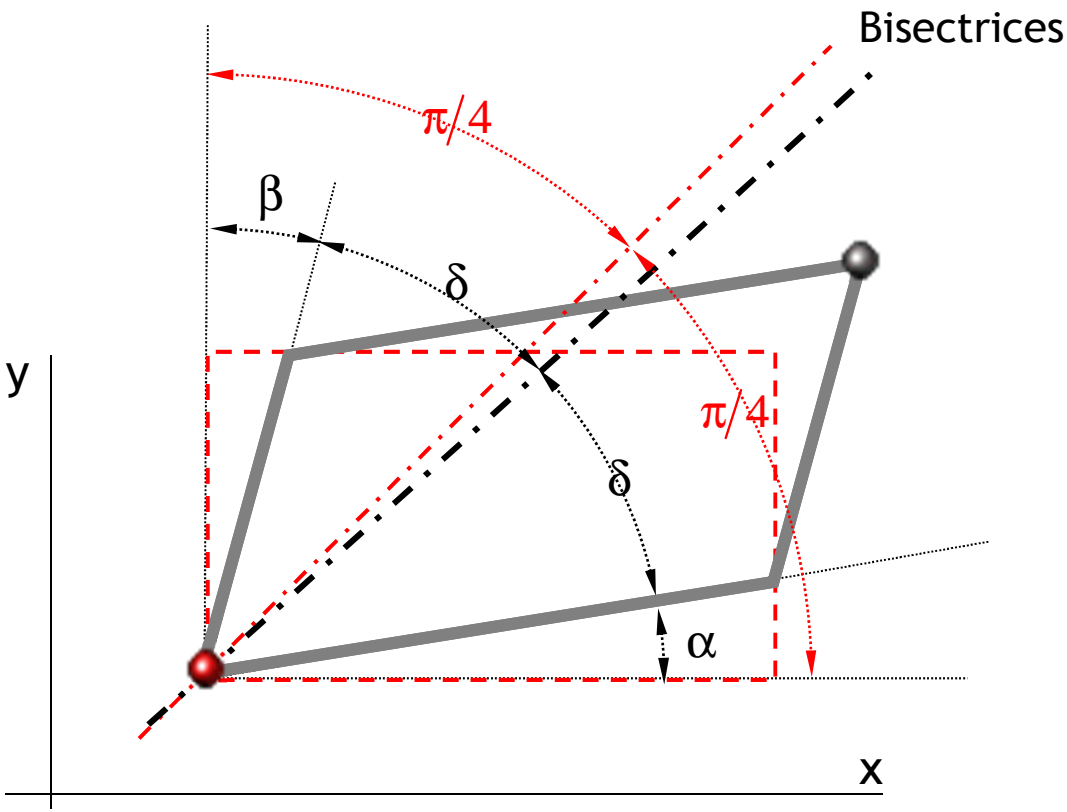
OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación



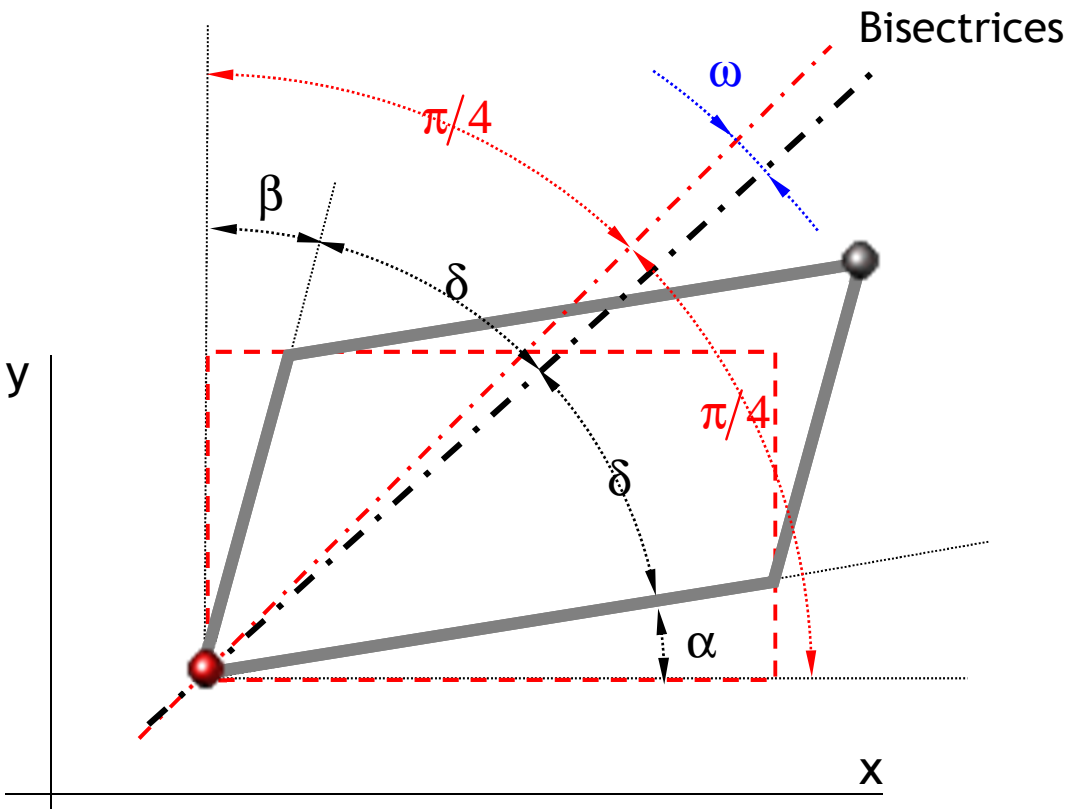
OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación



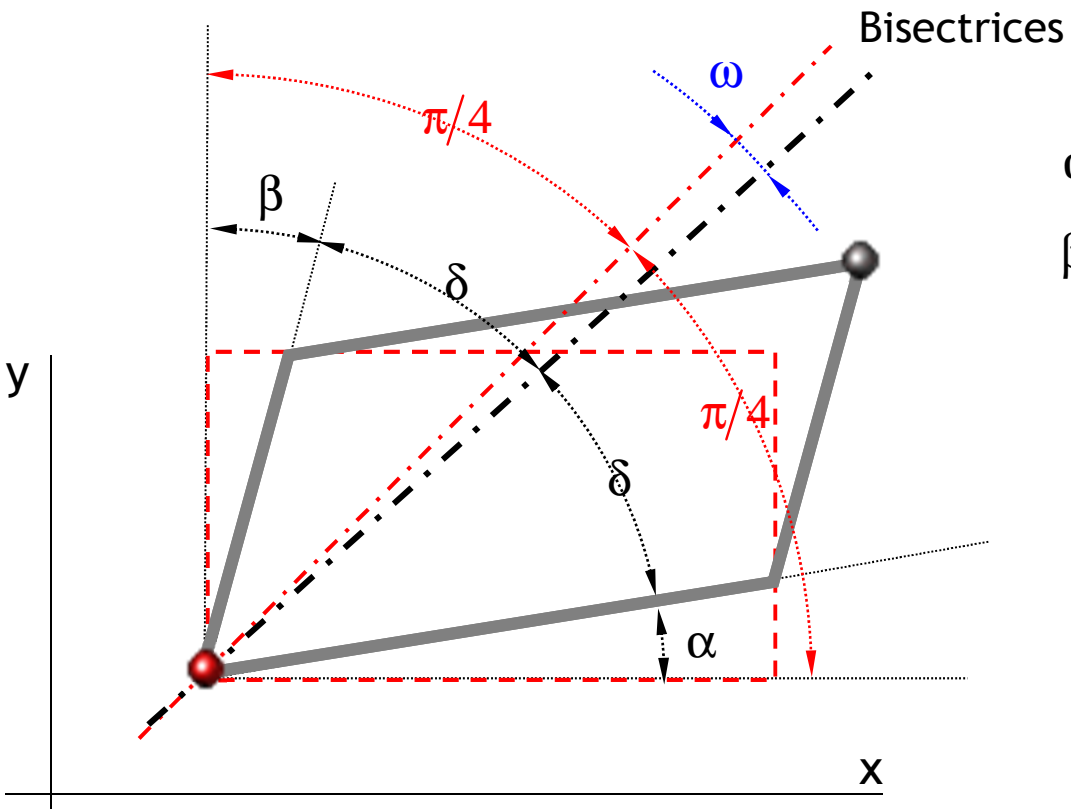
OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación



Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación

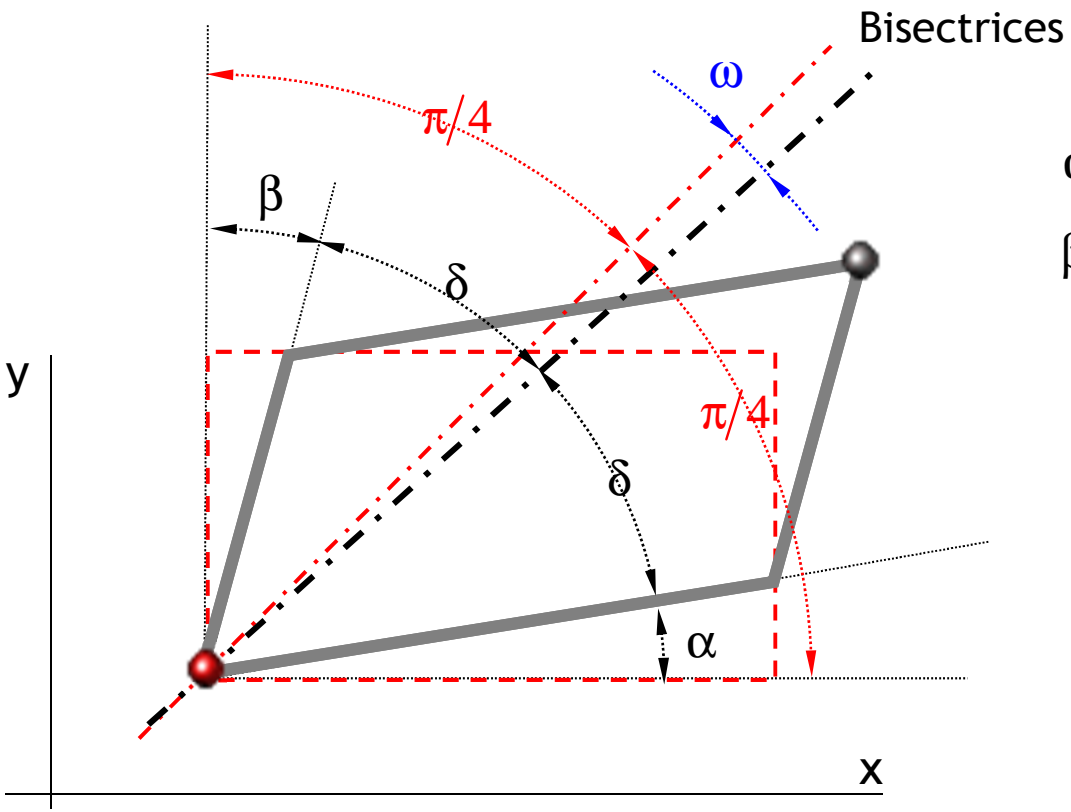


$$\alpha + \delta + \omega = \pi/4 \quad \text{E1}$$

$$\beta + \delta - \omega = \pi/4 \quad \text{E2}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación



$$\alpha + \delta + \omega = \pi/4 \quad \text{E1}$$

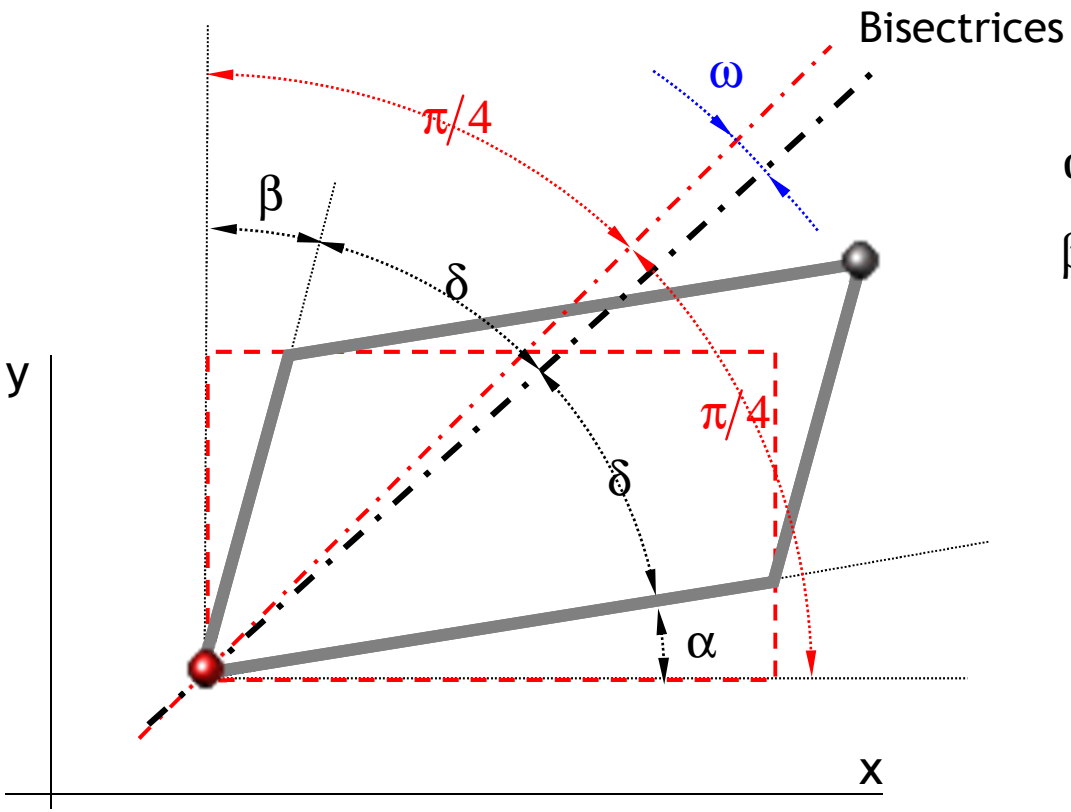
$$\beta + \delta - \omega = \pi/4 \quad \text{E2}$$

E1-E2

$$\omega = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación



$$\alpha + \delta + \omega = \pi/4 \quad \text{E1}$$

$$\beta + \delta - \omega = \pi/4 \quad \text{E2}$$

E1-E2

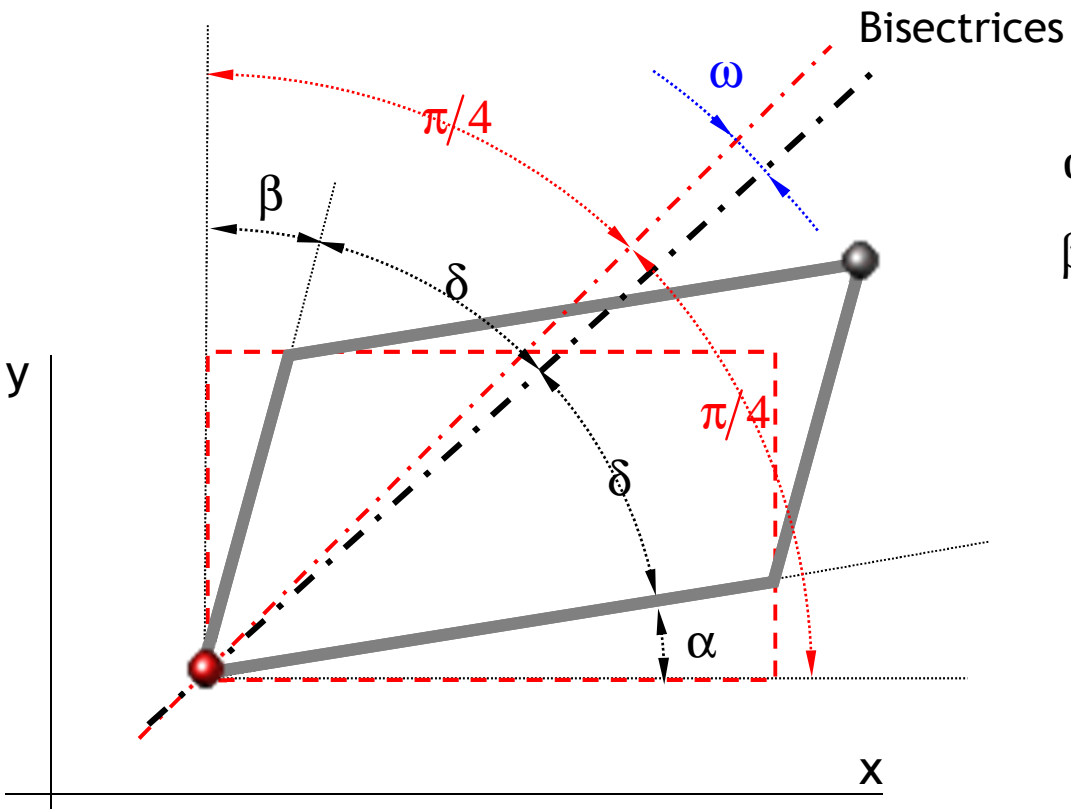
$$\omega = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$$ Obviedad!!!

OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación



$$\alpha + \delta + \omega = \pi/4 \quad \text{E1}$$

$$\beta + \delta - \omega = \pi/4 \quad \text{E2}$$

E1-E2

$$\omega = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$$ Obviedad!!!

$$\gamma_{xy} = \lim_{l_x^i, l_y^i \to O} \left(\theta^i - \theta^f \right) = \alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \gamma_{xy} / 2}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Significado físico del tensor deformación

TENSOR DE DEFORMACIONES

Deformaciones lineales instantáneas en las direcciones del S.R.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_x \end{pmatrix}$$

Simétrico

Semi-deformaciones angulares instantáneas

Otra notación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación en el entrono de un punto
Significado físico del tensor de deformación

GIRO Y DEFORMACIÓN

$$\mathbf{u}\big|_Q = \mathbf{u}\big|_P + d\mathbf{u}$$

TRASLACIÓN

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_Q = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_P + \begin{pmatrix} u,_x & u,_y & u,_z \\ v,_x & v,_y & v,_z \\ w,_x & w,_y & w,_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^t}{2} + \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^t}{2}$$

$$\begin{pmatrix} u,_x & \frac{1}{2}\left(u,_y + v,_x\right) & \frac{1}{2}\left(u,_z + w,_x\right) \\ \frac{1}{2}\left(u,_y + v,_x\right) & v,_y & \frac{1}{2}\left(v,_z + w,_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(u,_z + w,_x\right) & \frac{1}{2}\left(v,_z + w,_y\right) & w,_z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(u,_y - v,_x\right) & \frac{1}{2}\left(u,_z - w,_x\right) \\ \frac{1}{2}\left(v,_x - u,_y\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(v,_z - w,_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(w,_x - u,_z\right) & \frac{1}{2}\left(w,_y - v,_z\right) & 0 \end{pmatrix}$$

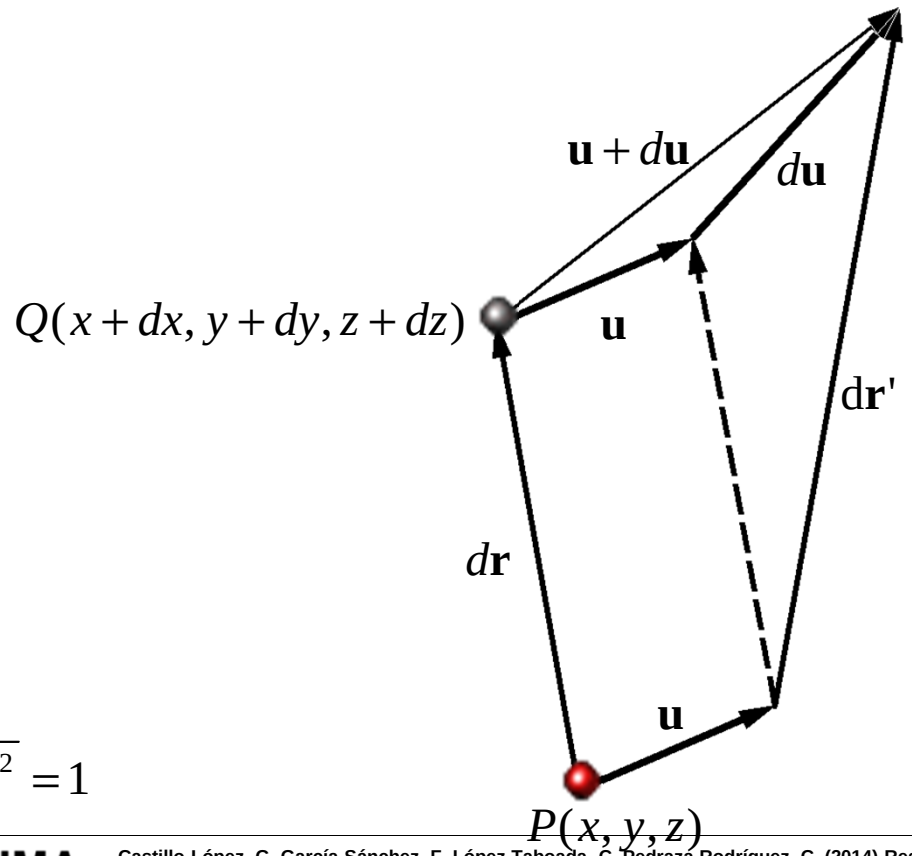
DEFORMACIÓN **GIRO**

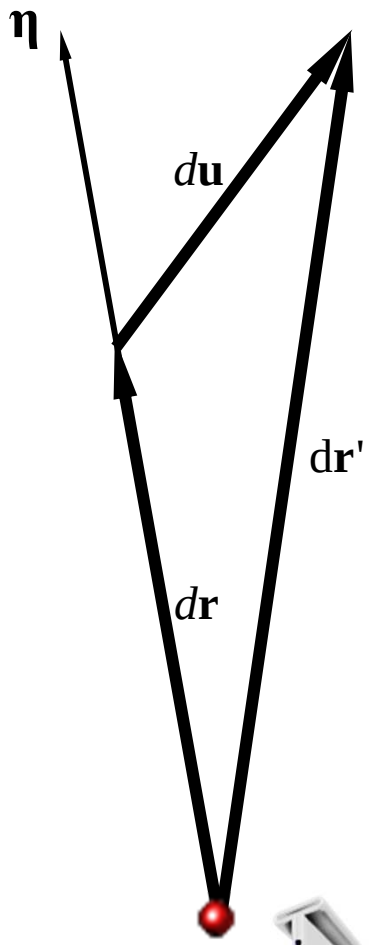
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

El vector deformación. Componentes intrínsecas. (Deformación en el entorno de un punto.)

Vector deformación

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$





$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedrazá Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

El vector deformación. Componentes intrínsecas. (Deformación en el entorno de un punto.)

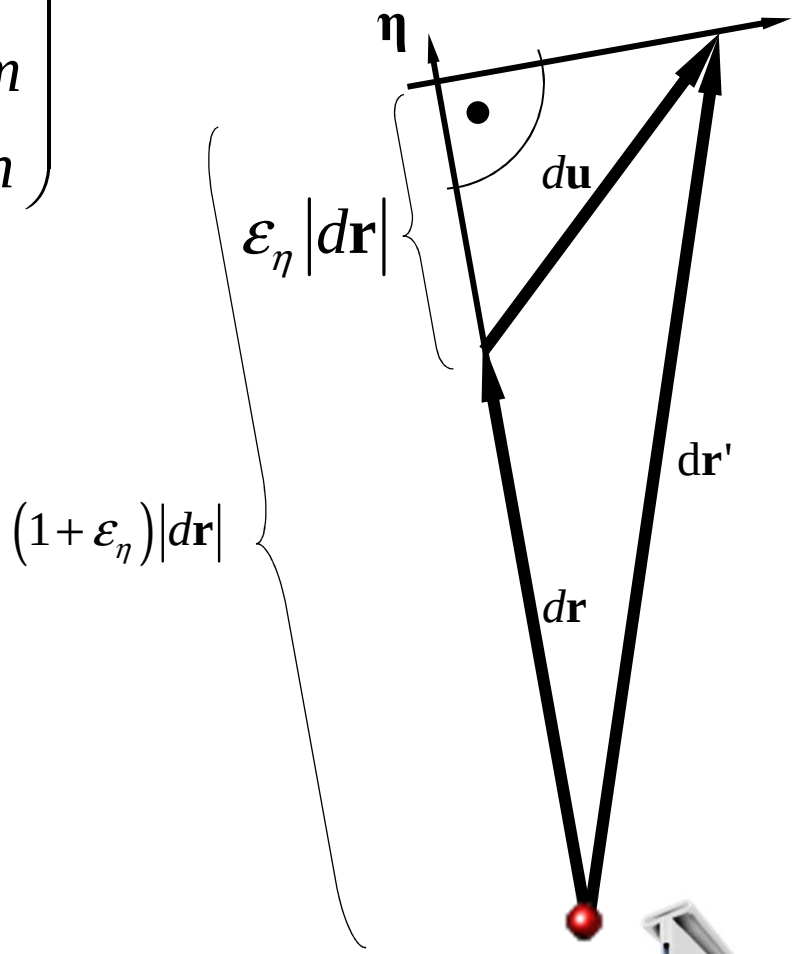
Vector deformación

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Componente normal

$$\varepsilon_\eta = \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$



$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

El vector deformación. Componentes intrínsecas. (Deformación en el entorno de un punto.)

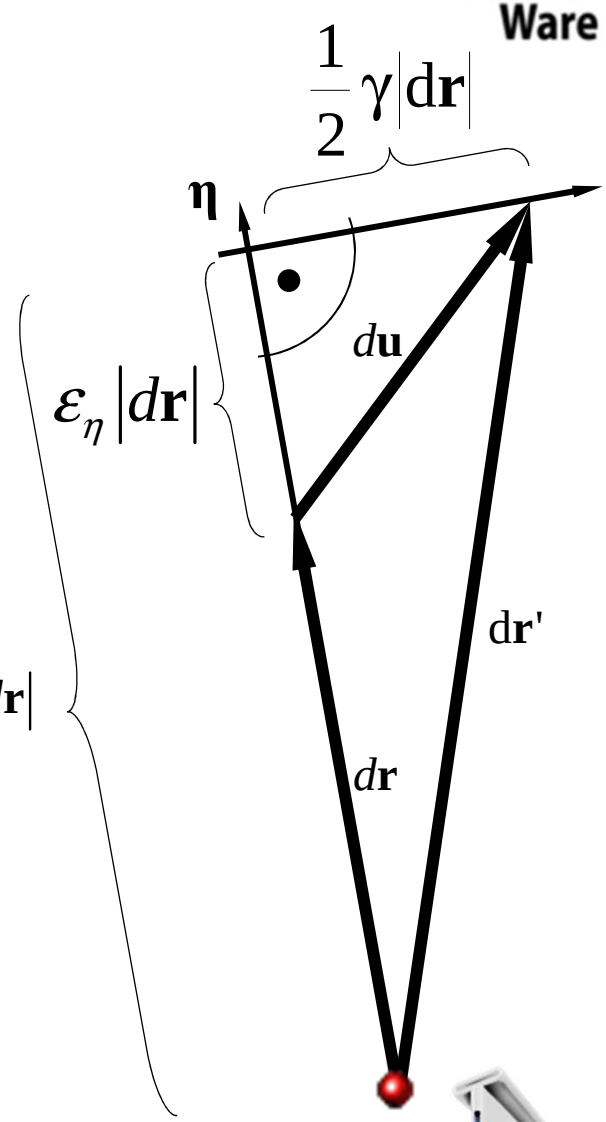
Vector deformación

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Componente normal

$$\varepsilon_\eta = \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$



$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

El vector deformación. Componentes intrínsecas. (Deformación en el entorno de un punto.)

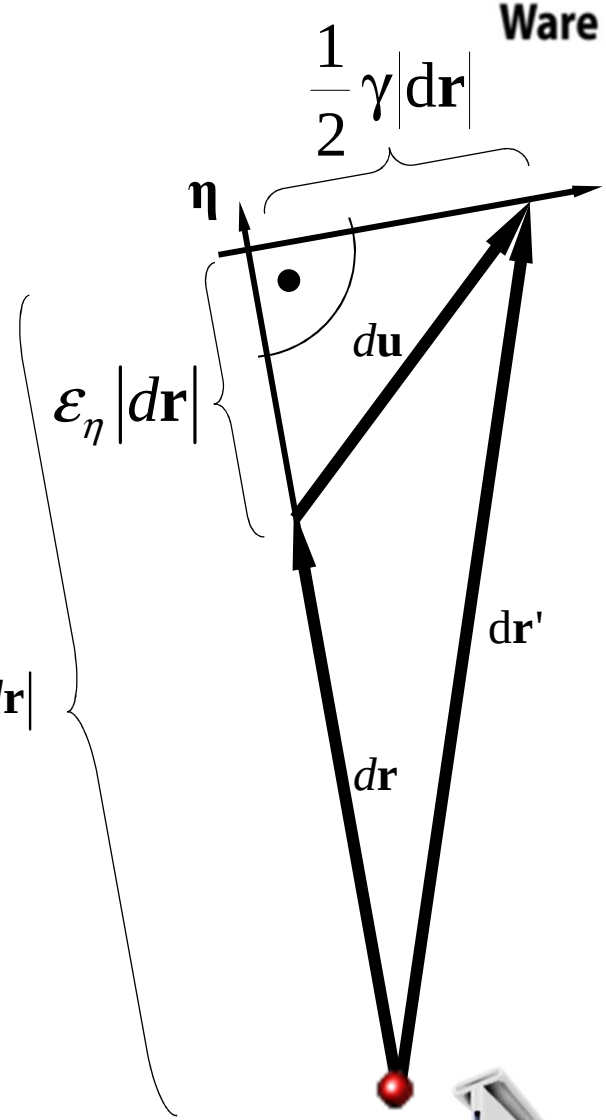
Vector deformación

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Componente normal

$$\varepsilon_\eta = \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$



Componente angular

$$\varepsilon_t = \sqrt{\left(\frac{|d\mathbf{u}|}{|d\mathbf{r}|}\right)^2 - \varepsilon_\eta^2} = \frac{1}{2}\gamma$$

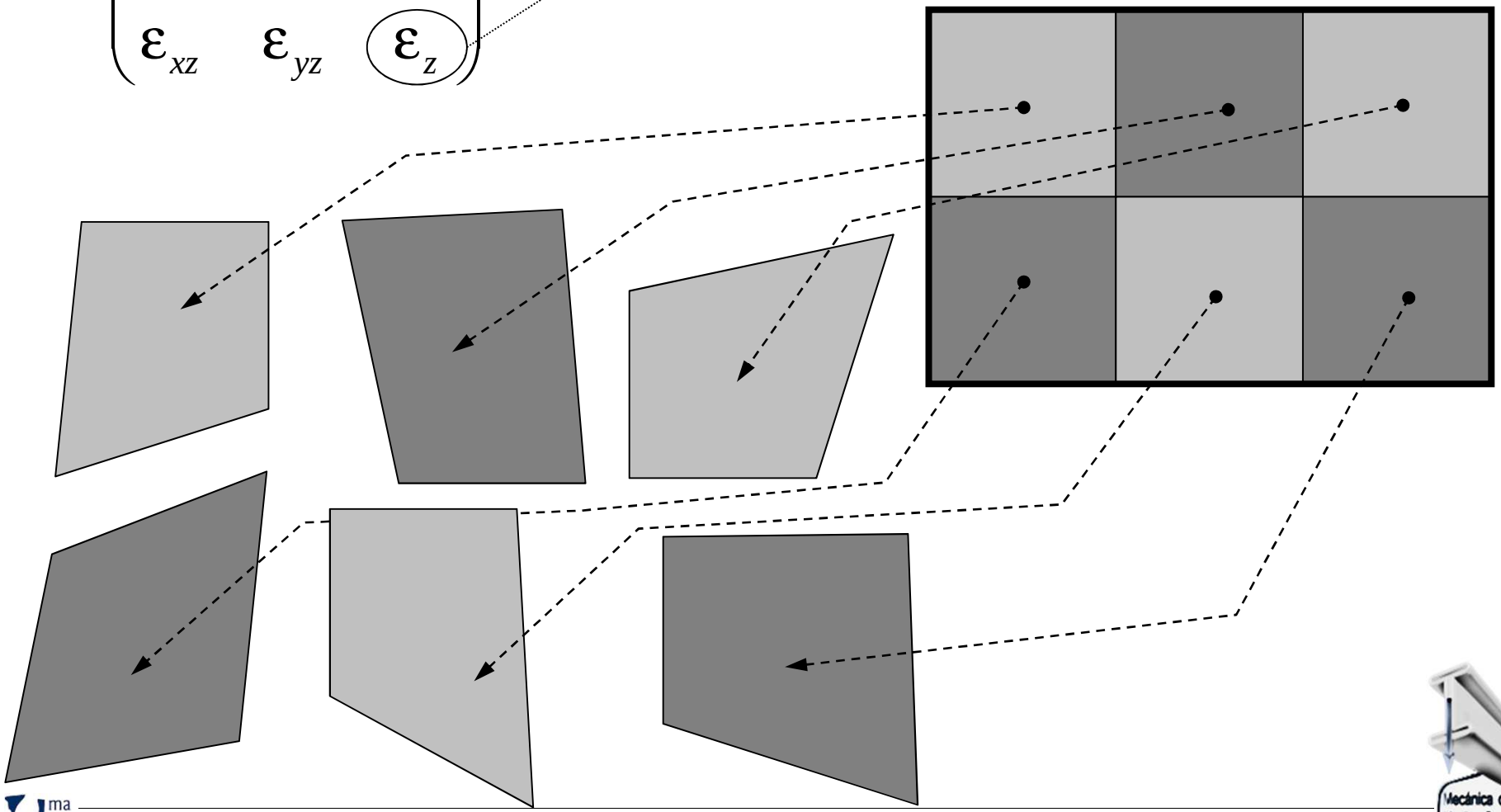
$$\sqrt{l^2+m^2+n^2} = 1$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Ecuaciones de compatibilidad

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad f(x, y, z)$$

¿Es válida cualquier función?



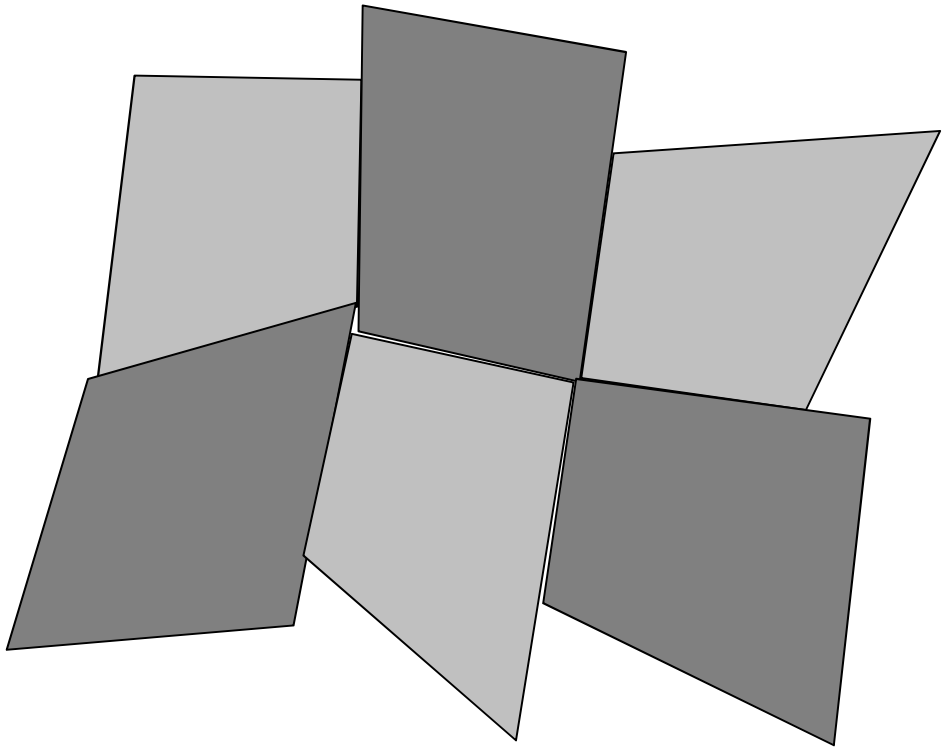
OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Ecuaciones de compatibilidad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad f(x, y, z)$$

¿Es válida cualquier función?



Se producirían HUECOS y SOLAPES

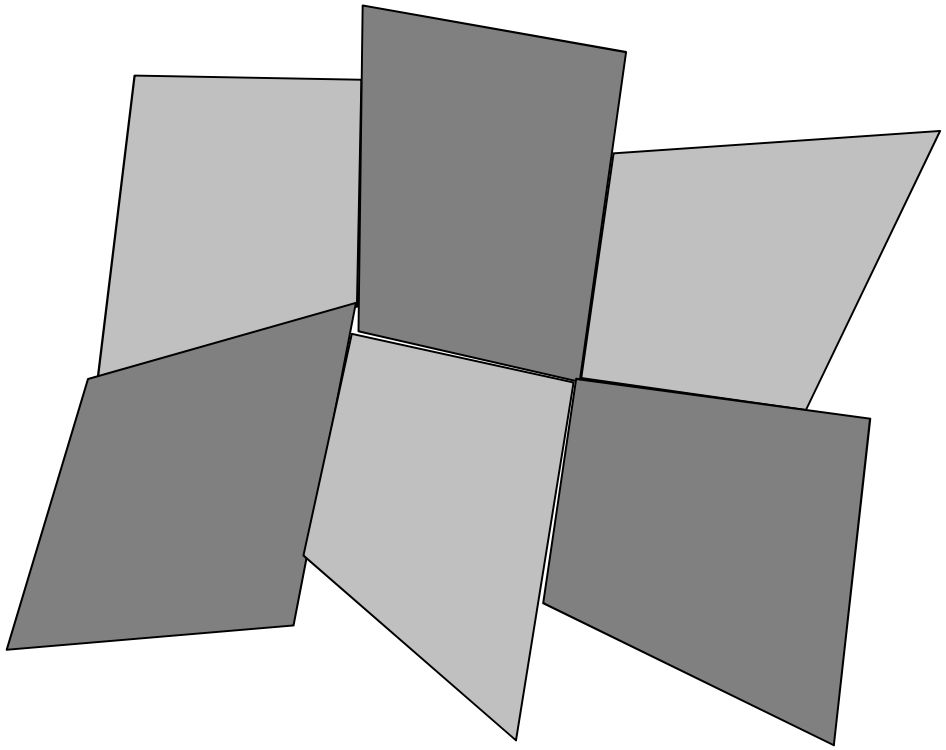
OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Ecuaciones de compatibilidad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad f(x, y, z)$$

¿Es válida cualquier función?



Se producirían HUECOS y SOLAPES

Campo de desplazamientos
DISCONTINUO
NO UNIVALUADO

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

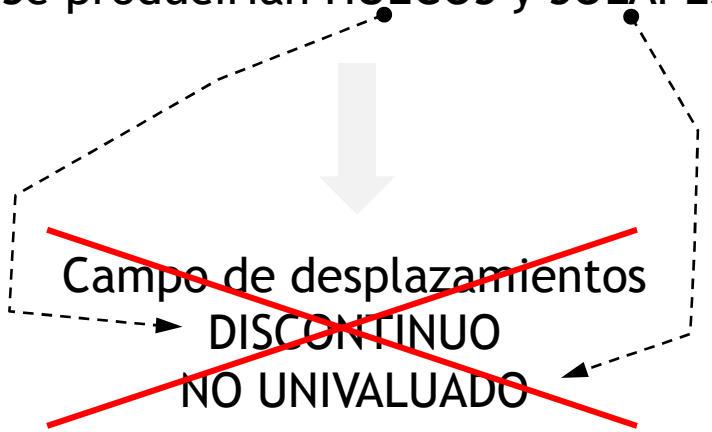
Ecuaciones de compatibilidad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad f(x, y, z)$$

¿Es válida cualquier función?

NO !!!

Se producirían HUECOS y SOLAPES



INACEPTABLE

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Ecuaciones de compatibilidad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \qquad f(x,y,z)$$

¿Es válida cualquier función?

NO !!!

Ecuaciones de compatibilidad

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right)$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Relaciones cinemáticas

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

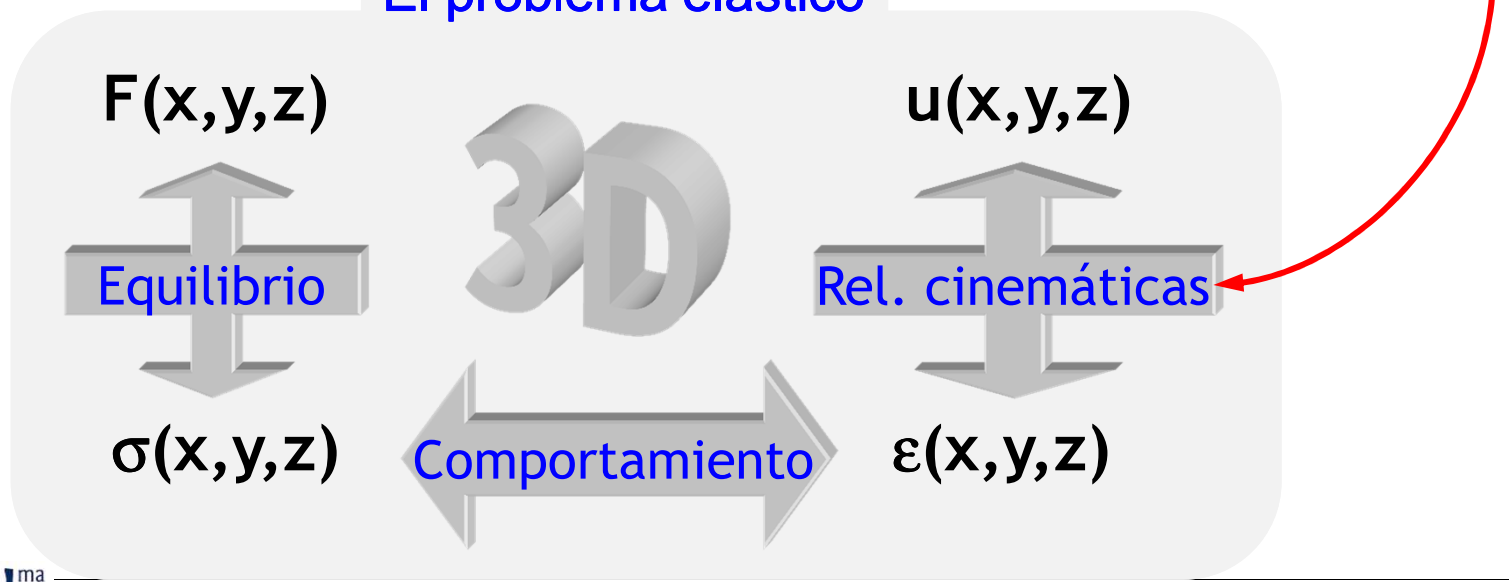
Ecs. De compatibilidad

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right)$$

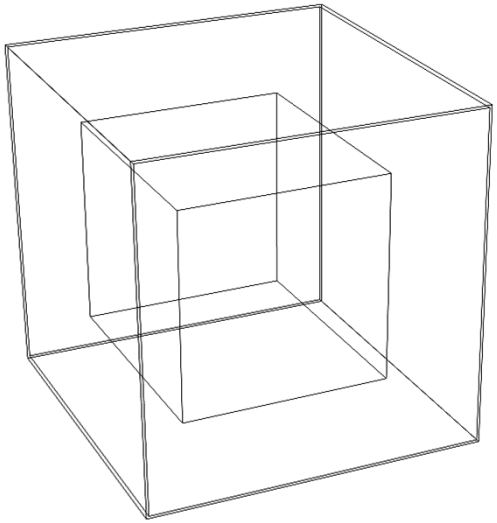
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right)$$

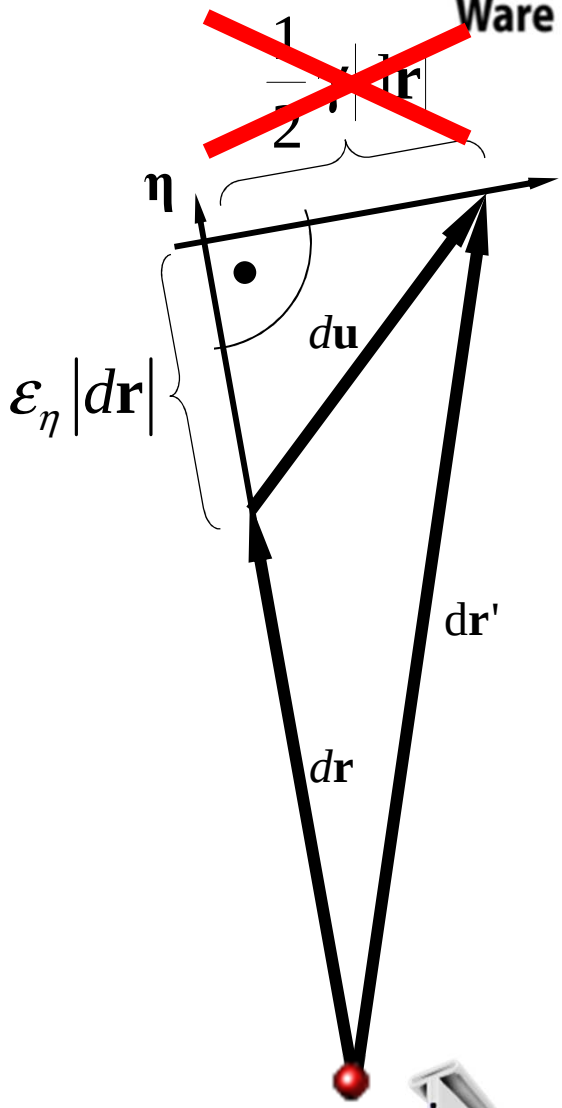
El problema elástico



Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

¿Es posible que el entorno de un punto se deforme sin deformación angular?





$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

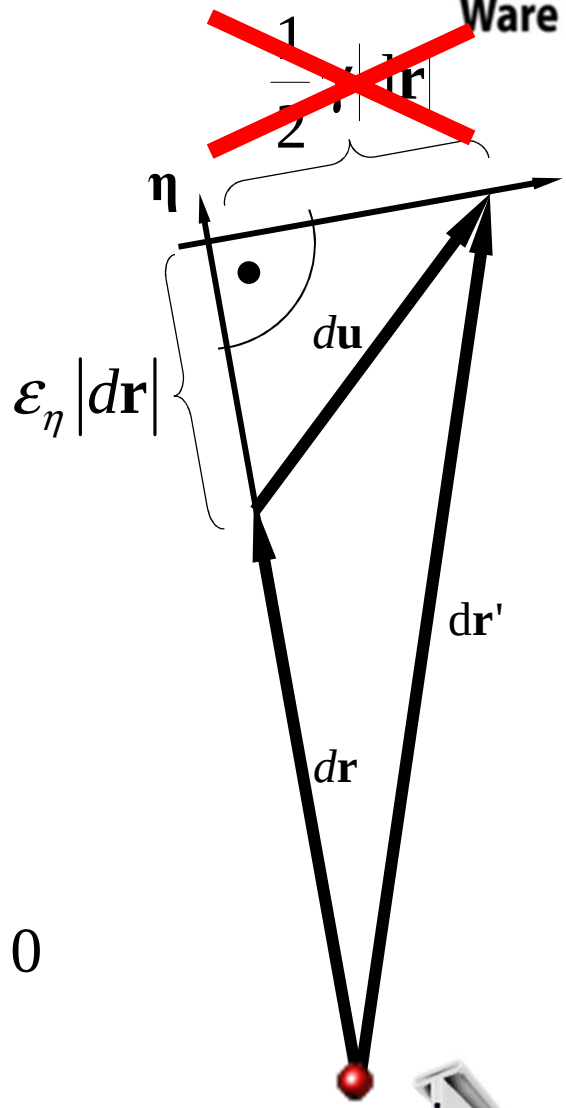
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

¿Es posible que el entorno de un punto se deforme sin deformación angular?

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

$\exists$ solución $\Leftrightarrow$ $$\det\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$



Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

¿Es posible que el entorno de un punto se deforme sin deformación angular?

$$\det\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_x-\lambda & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y-\lambda & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z-\lambda \end{pmatrix}\right]=0$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0$$

$$tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

$$\det[\boldsymbol{\varepsilon}]$$

$$\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}-\tfrac{1}{4}\gamma_{xy}^2\right)+\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}-\tfrac{1}{4}\gamma_{xz}^2\right)+\left(\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}-\tfrac{1}{4}\gamma_{yz}^2\right)$$

$\exists$ Tres raíces reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow (\boldsymbol{\varepsilon}-\lambda_i\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}_i = 0$ **DEFORMACIONES PRINCIPALES**

$$\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} = 0$$

$$\sqrt{l^2+m^2+n^2} = 1$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$

DIRECCIONES PRINCIPALES DE DEFORMACIÓN

$$\boldsymbol{\eta}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_j = 0$$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

¿SON LAS DIRECCIONES PRINCIPALES DE TENSIÓN

LAS MISMAS

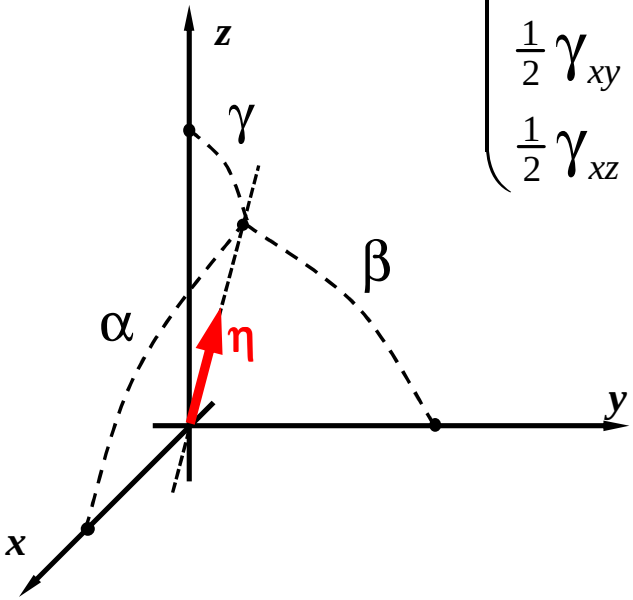
QUE LAS DIRECCIONES PRINCIPALES DE DEFORMACIÓN?

CONTINUARÁ …

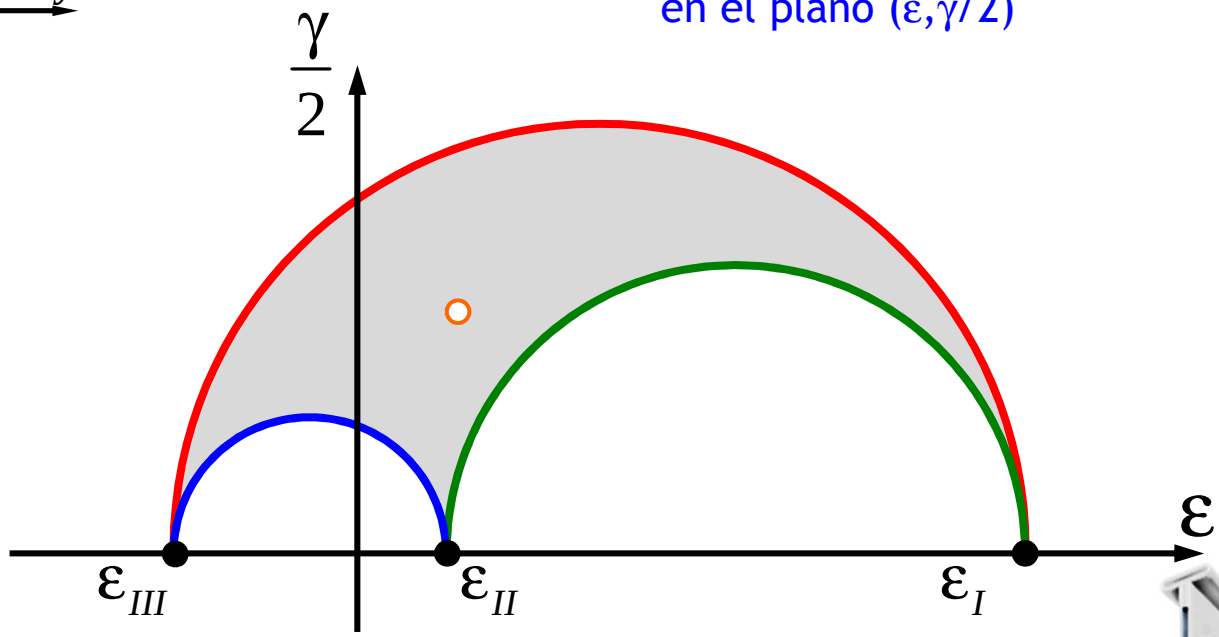
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Circunferencias de Möhr

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$



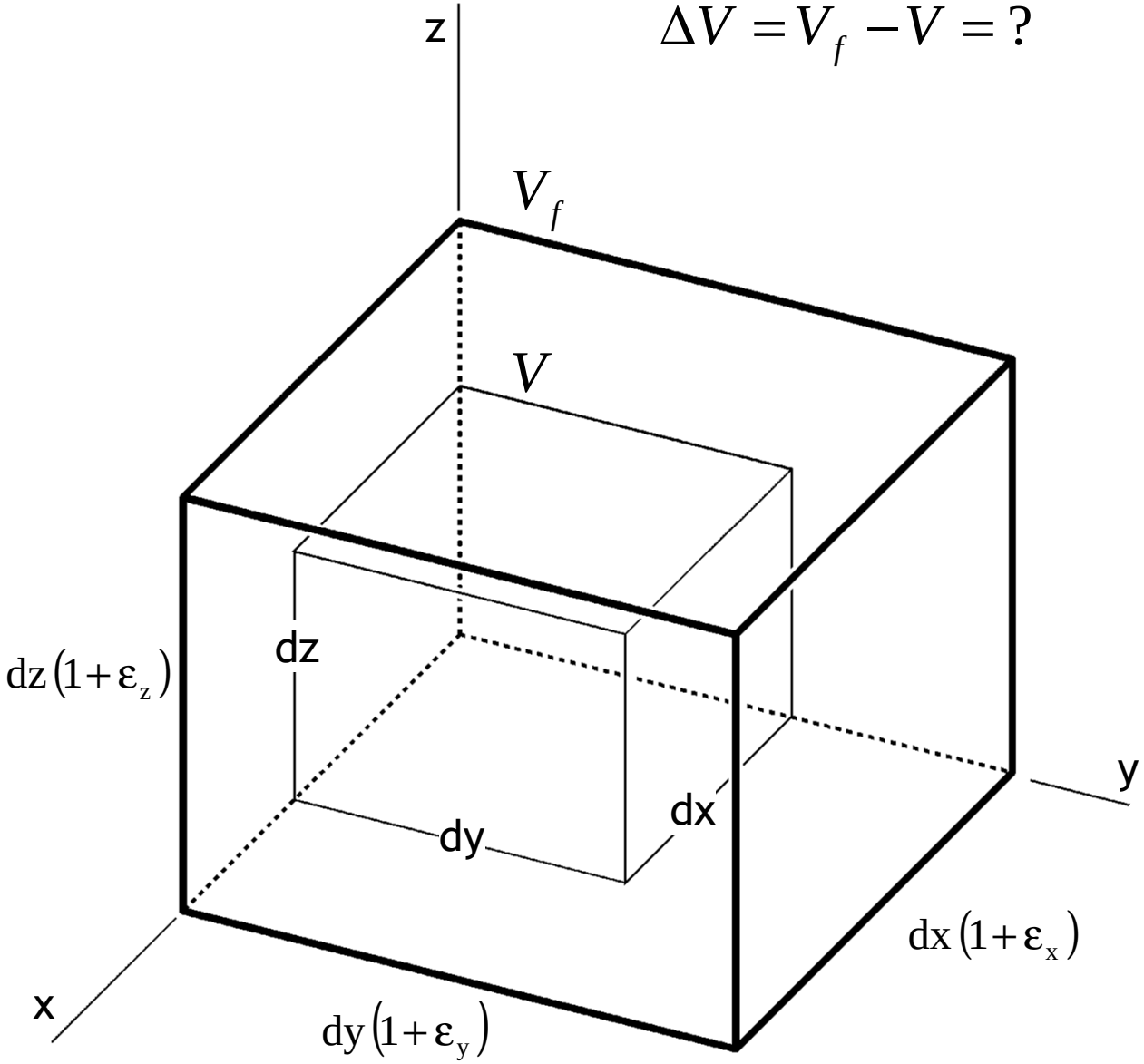
Al igual que ocurre con las tensiones,
las componentes intrínsecas de la deformación,
en el entorno de un punto,
no pueden ocupar cualquier posición
en el plano $(\varepsilon,\gamma/2)$



Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Incremento unitario de volumen

$$\Delta V = V_f - V = ?$$

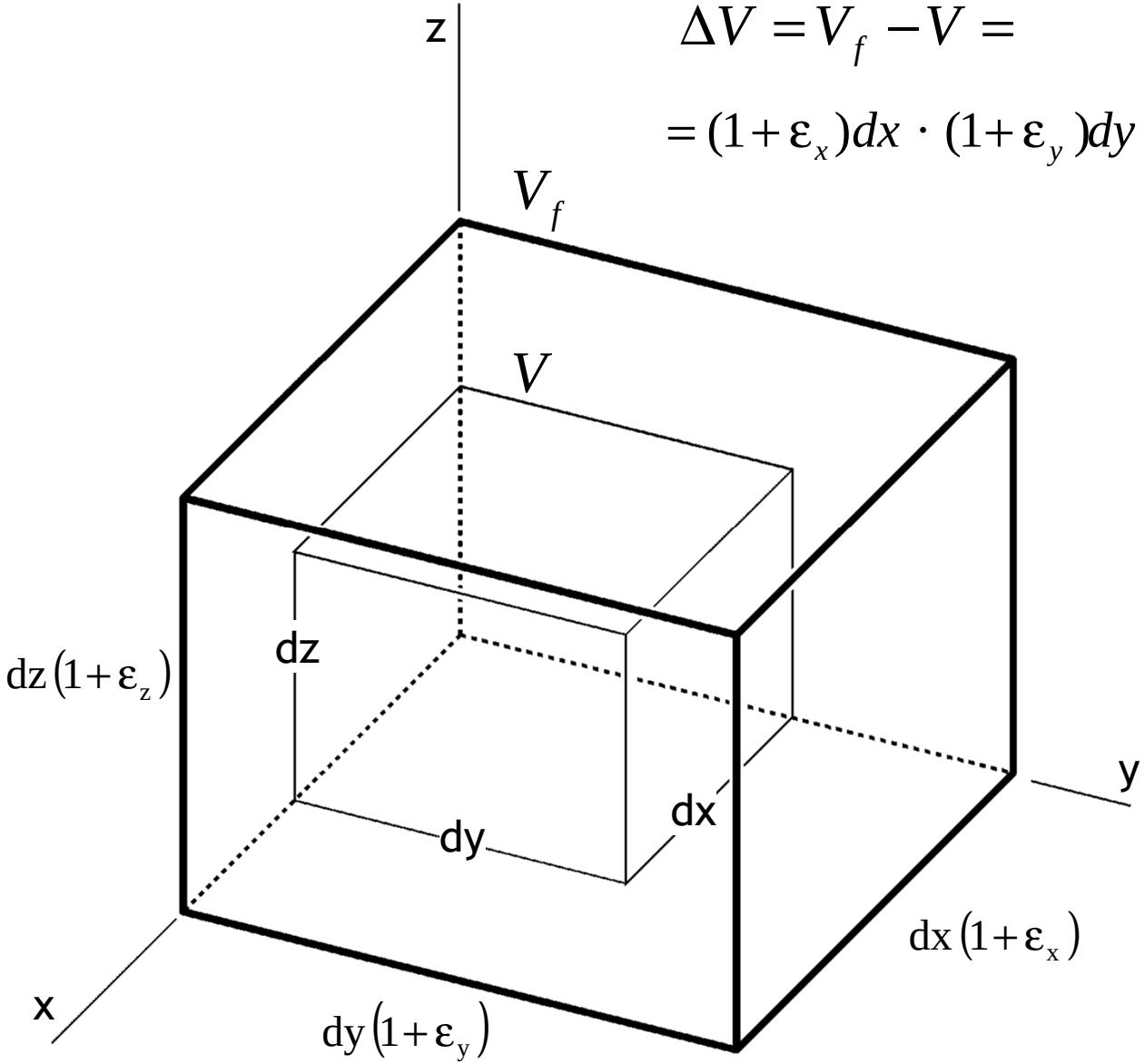


OCW UMA
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Incremento unitario de volumen

$$\Delta V = V_f - V =$$

$$= (1+\varepsilon_x)dx \cdot (1+\varepsilon_y)dy \cdot (1+\varepsilon_z)dz - dx \cdot dy \cdot dz$$



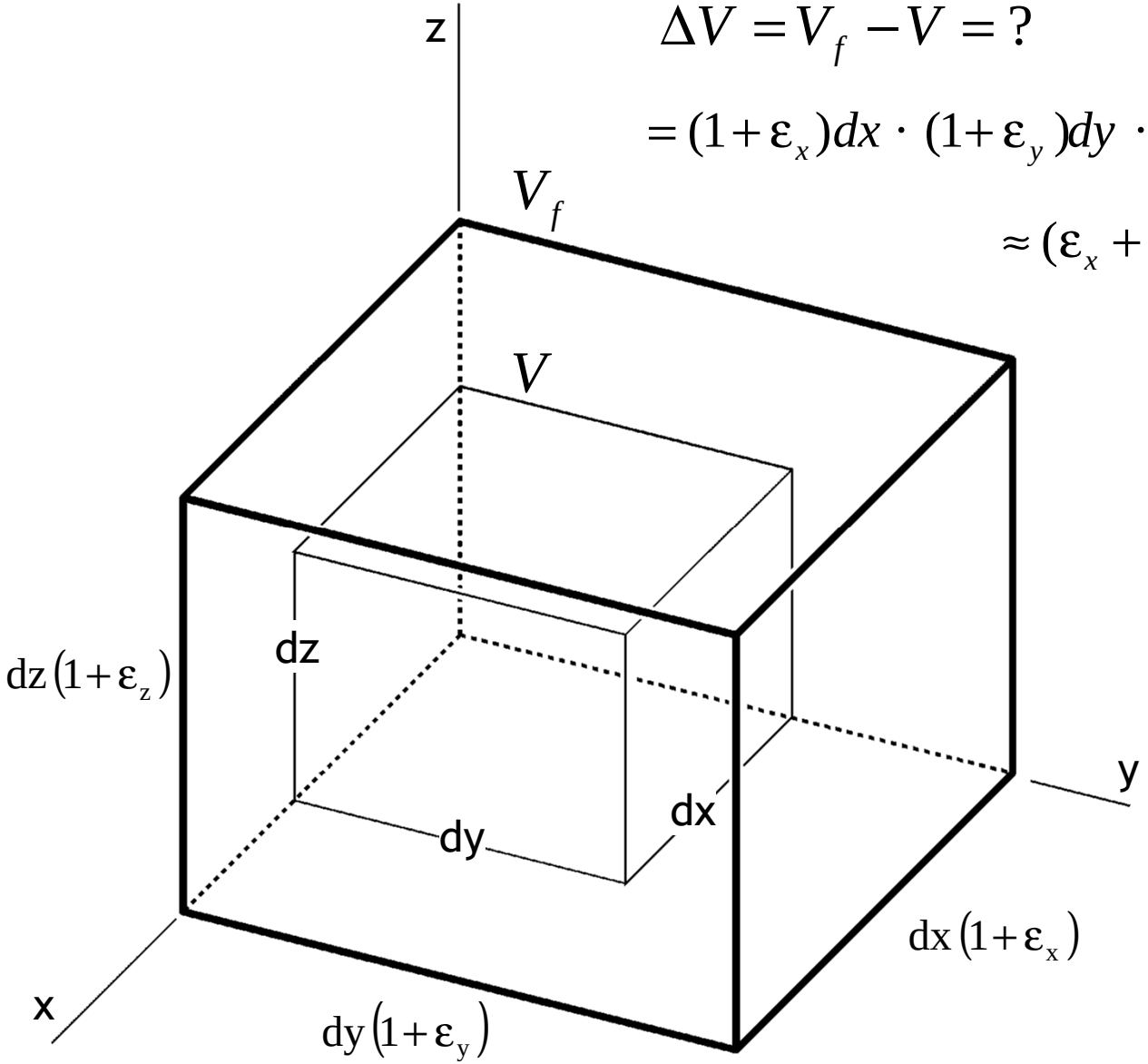
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Incremento unitario de volumen

$$\Delta V = V_f - V = ?$$

$$= (1+\varepsilon_x)dx \cdot (1+\varepsilon_y)dy \cdot (1+\varepsilon_z)dz - dx \cdot dy \cdot dz \approx$$

$$\approx (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dx \cdot dy \cdot dz = e\,V$$



$$e = \frac{\Delta V}{V}$$

Incremento unitario de volumen

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Tensores esférico y desviador de deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Sea

$$\boldsymbol{\varepsilon}^O = \frac{J_1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{e}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual incremento de volumen

Tensor desviador
de deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{e}{3}\mathbf{I} + \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{e}{3}\mathbf{I}\right)$$

Tensor esférico
de deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon}^D = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{e}{3} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \frac{e}{3} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \frac{e}{3} \end{pmatrix}$$

Contiene la información del cambio de volumen

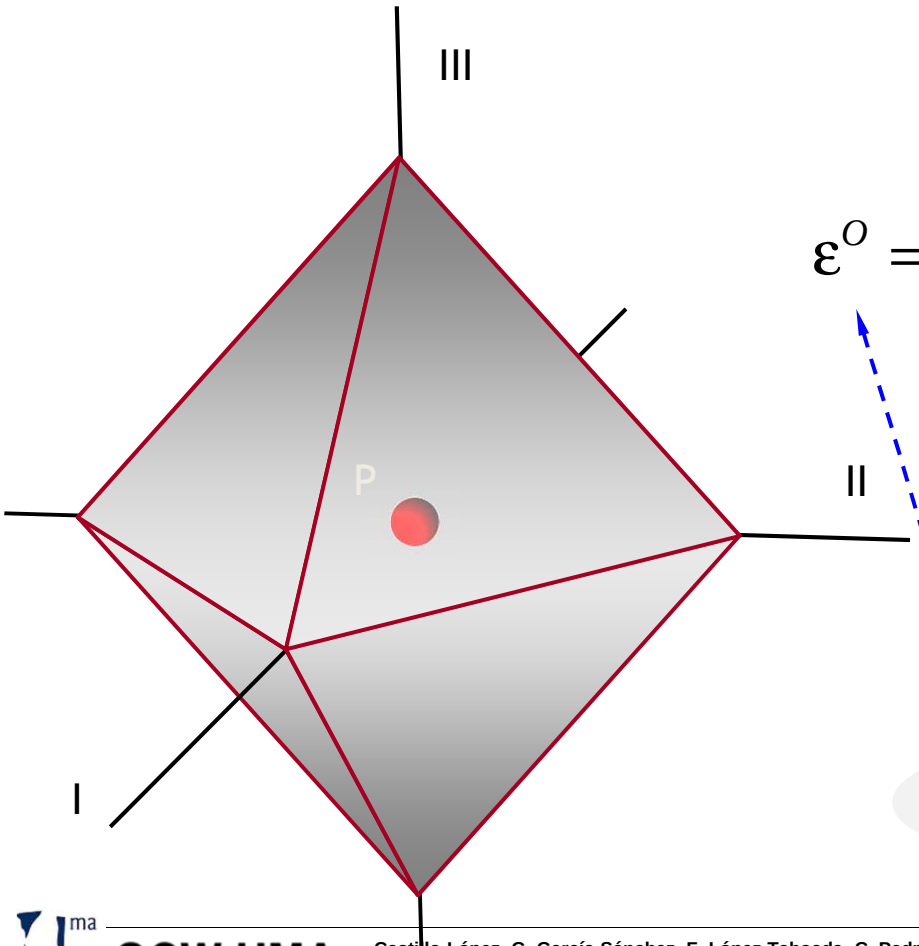
Contiene la información del cambio de forma

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Planos octaédricos

$$\boldsymbol{\eta}^O = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^O = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\varepsilon_I & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{II} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{III}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\varepsilon_I\\ \varepsilon_{II}\\ \varepsilon_{III}\end{pmatrix}$$



$$\varepsilon^O = \left(\mathbf{d}^O\right)^t \cdot \boldsymbol{\eta}^O = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}}{3} = \frac{J_1}{3} = \frac{e}{3}$$

$$\varepsilon_t^O = \sqrt{\left|\mathbf{d}^O\right|^2 - \varepsilon_n^{O2}} = \sqrt{\frac{2}{9}J_1^2 - \frac{2}{3}J_2}$$

INVARIANTES !!!

OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Correlación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones.

TENSIÓN

- Tensor simétrico
- Componentes intrínsecas

$$\sigma_n,\ \tau$$

- Tensiones y direcciones principales

$$\sigma_I,\ \sigma_{II},\ \sigma_{III}$$

$$\eta_I,\ \eta_{II},\ \eta_{III}$$

- Circulos de Möhr
- Invariantes

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2 = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_I\sigma_{III} + \sigma_{II}\sigma_{III} = \\ = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma})$$

- Tensiones octaédricas

$$\sigma^{oct} = I_1/3$$

$$\tau^{oct} = \sqrt{\tfrac{2}{9}I_1^2 - \tfrac{2}{3}I_2}$$

- Tensor esférico y desviador

$$\boldsymbol{\sigma}^O = \sigma^{oct}\mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \sigma^{oct}\mathbf{I}^o$$

- Tensión plana

DEFORMACIÓN

- Tensor simétrico
- Componentes intrínsecas

$$\varepsilon_n,\ \tfrac{1}{2}\gamma$$

- Tensiones y direcciones principales

$$\varepsilon_I,\ \varepsilon_{II},\ \varepsilon_{III}$$

$$\eta'_I,\ \eta'_{II},\ \eta'_{III}$$

- Circulos de Möhr
- Invariantes

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = e$$

$$J_2 = \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_I\varepsilon_{III} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} = \\ = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2$$

$$J_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$$

- Deformaciones octaédricas

$$\varepsilon^{oct} = J_1/3$$

$$\tfrac{1}{2}\tau^{oct} = \sqrt{\tfrac{2}{9}J_1^2 - \tfrac{2}{3}J_2}$$

- Tensor esférico y desviador

$$\boldsymbol{\varepsilon}^O = \varepsilon^{oct}\mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^D = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon^{oct}\mathbf{I}$$

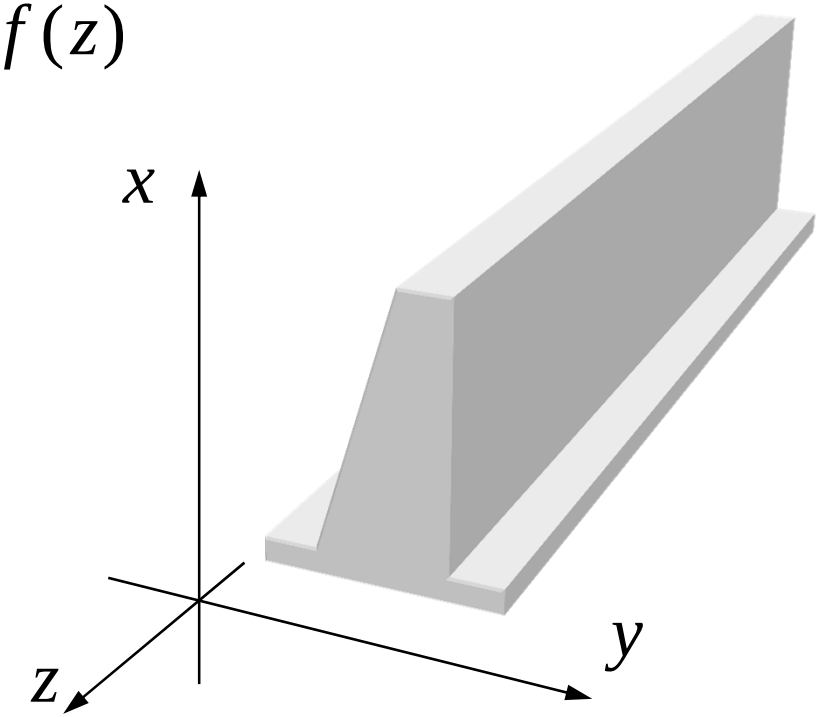
- Deformación plana

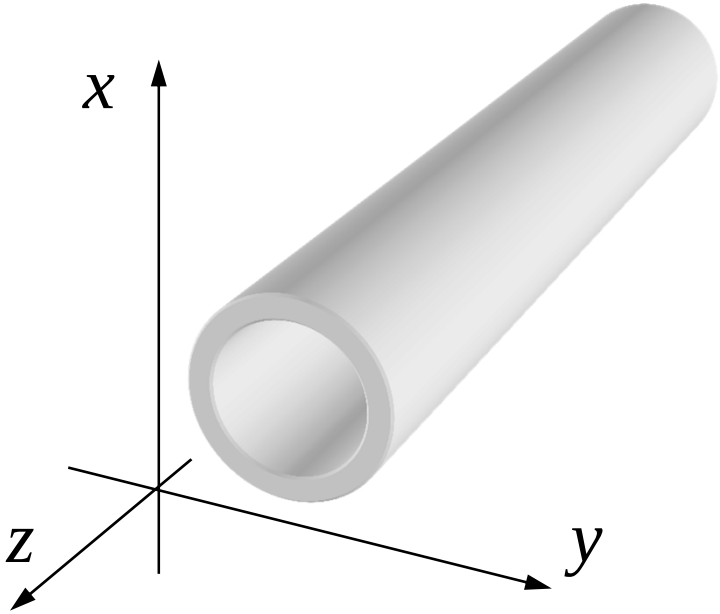
Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Deformación plana

$$\text{cargas} \neq f(z)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ cte \end{pmatrix}$$



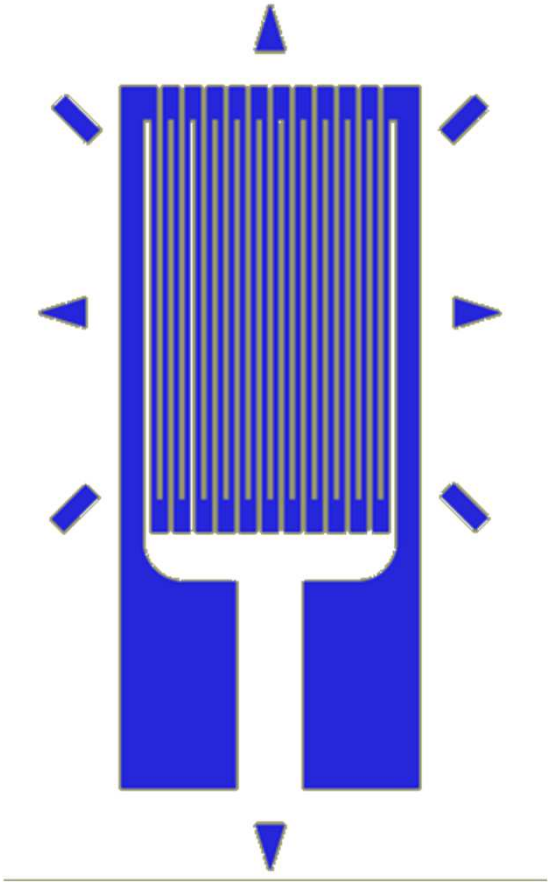


$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(x,y) & \varepsilon_{xy}(x,y) & 0 \\ \varepsilon_{xy}(x,y) & \varepsilon_y(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

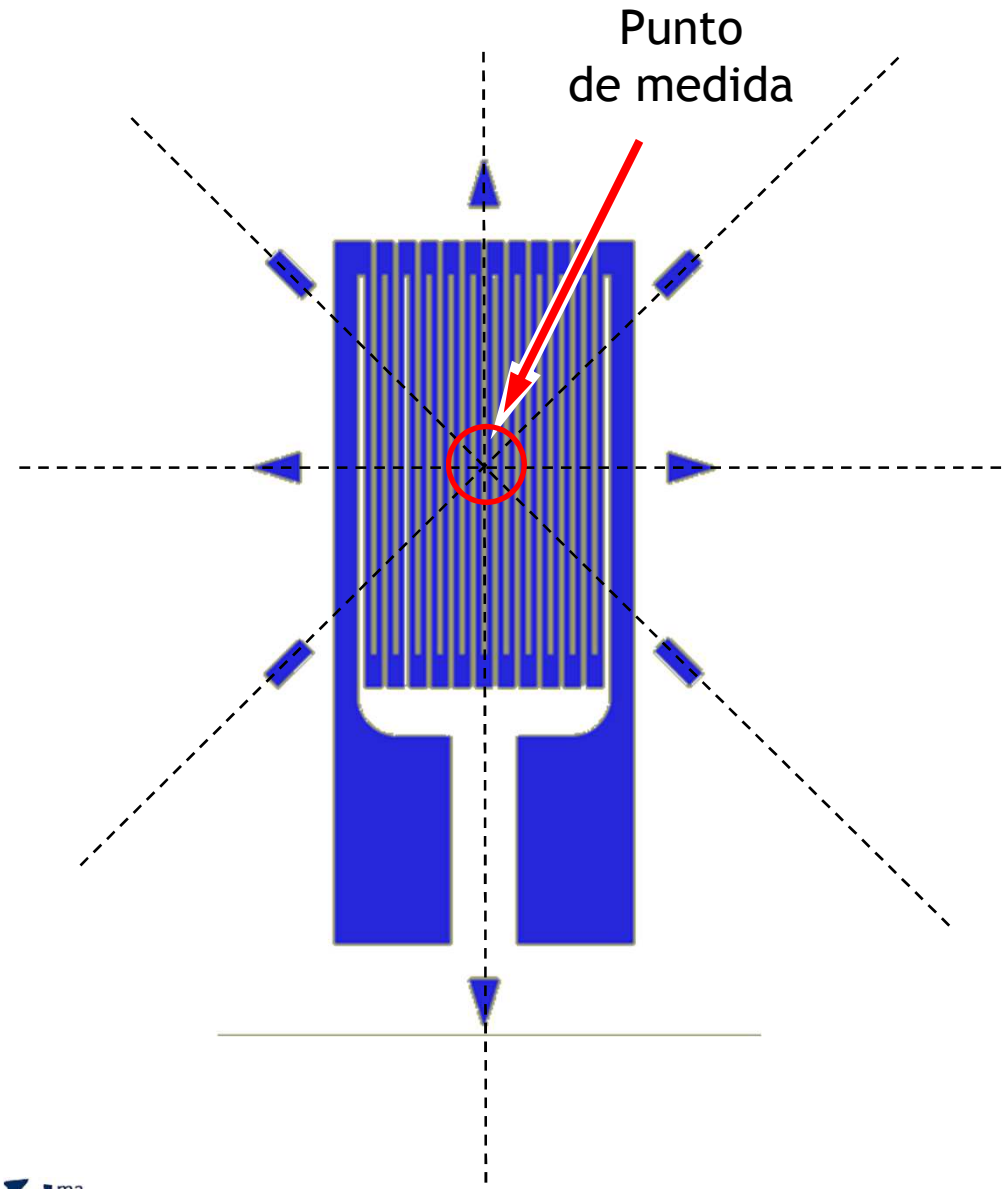
Medidas de deformación: galgas extensométricas



OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

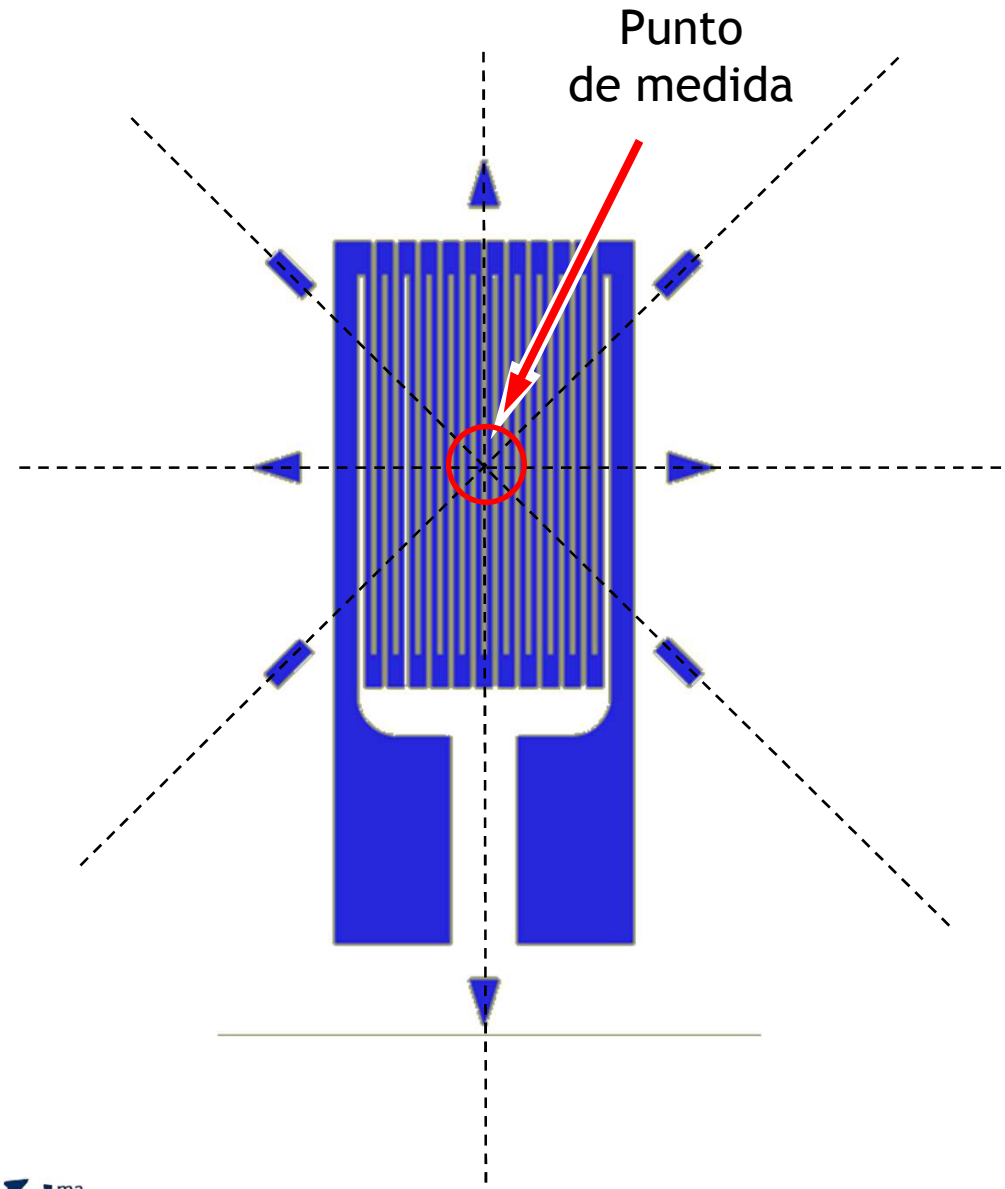
Medidas de deformación: galgas extensométricas



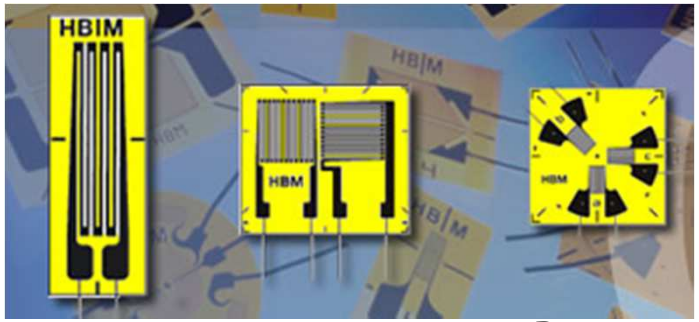
OCW UMA

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

Medidas de deformación: galgas extensométricas



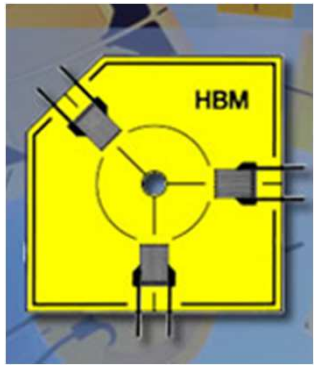
Roseta
dos galgas a 90º



Galga

Roseta
tres galgas

Roseta
para análisis de
tensiones residuales



Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. OCW-Universidad de Málaga. http://ocw.uma.es Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain