



Resistencia de Materiales

FLEXIÓN PLANA II: (Cálculo de desplazamientos)

CONTENIDO DE LA ASIGNATURA

BLOQUE TEMÁTICO: ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD Y LA RESISTENCIA DE MATERIALES

CAPÍTULO 2: EL SÓLIDO ELÁSTICO.

CAPÍTULO 3: CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN Y DE ROTURA

CAPÍTULO 4: RESISTENCIA DE MATERIALES. CONCEPTOS BÁSICOS

CAPÍTULO 5: TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

CAPÍTULO 6: FLEXIÓN PLANA ELÁSTICA.

CAPÍTULO 7: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO PLÁSTICO

CAPÍTULO 8: FLEXO-COMPRESIÓN DESVIADA

CAPÍTULO 9: TORSIÓN

CAPÍTULO 10: POTENCIAL ELÁSTICO DE BARRAS. MÉTODOS ENERGÉTICOS

CAPÍTULO 11: INESTABILIDAD DE BARRAS PRISMÁTICAS. PANDEO



Resistencia de Materiales

FLEXIÓN PLANA II: (Cálculo de desplazamientos)

1. Ecuación de la elástica. Ecuación de los giros.
2. Cálculo de la deformada de una viga a partir de la ecuación diferencial de la elástica.
3. Cálculo de la deformada de una viga mediante el método de superposición.
4. Energía de deformación debida al momento flector.
5. Energía de deformación debida al cortante.
6. Efecto de la cizalladura en la deformación de vigas.
7. Diagramas a estima.

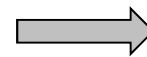
Ecuación de la elástica. Ecuación de los giros

Al estudiar la flexión pura de una barra prismática, se vio que la curvatura de la superficie neutra venía dada por la expresión:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_z(x)}$$

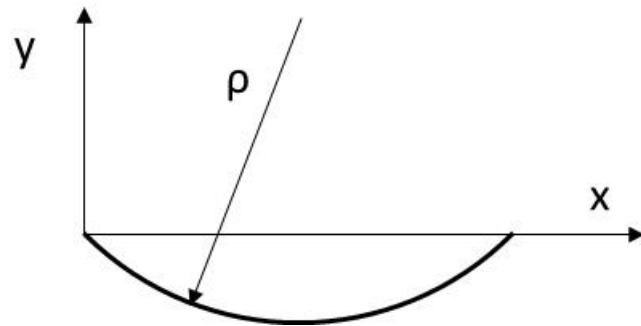
Flexión pura: el momento flector (M_z) = constante

Si el producto $E \cdot I_z$ es constante a lo largo de la viga



arco de circunferencia.

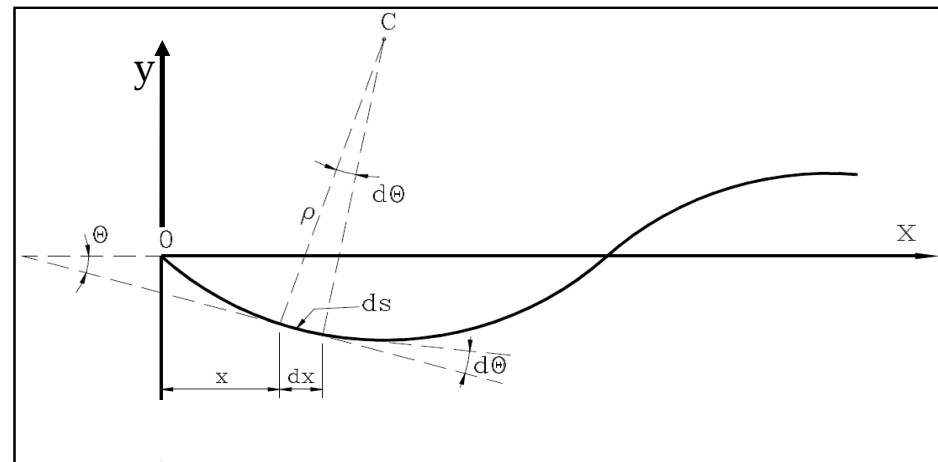
A la deformación del eje neutro se le denomina "*Línea Elástica*", "*Curva de deformación*" o simplemente "*Deformada*".



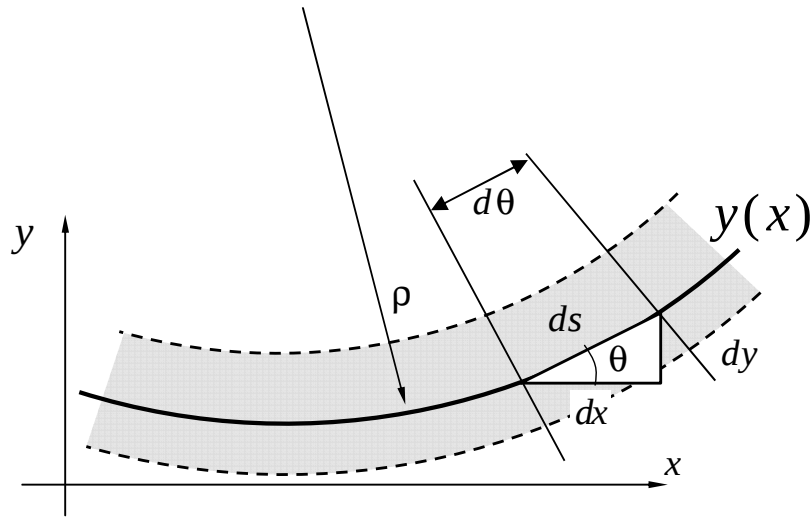
Si el momento flector es variable (flexión simple)



arco de circunferencia.



Si admitimos que para cada elemento diferencial dx , su deformada es un arco, tendremos:



$$ds = \rho \cdot d\theta$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

Dentro del límite elástico, las deformaciones son muy pequeñas por lo que podemos admitir:

$$dx \approx ds \quad \theta \ll 1 \quad \theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

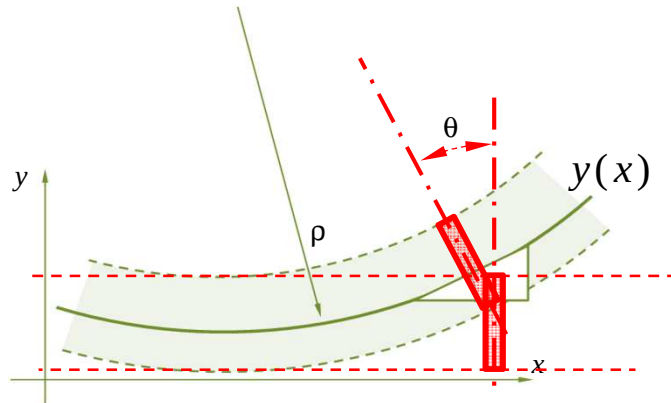
De esta forma obtenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z(x)} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Ecuación diferencial de la elástica.



Una vez obtenida la ecuación diferencial, las constantes de integración se deducen de las condiciones de contorno del problema.



$$y'(x) = \int \frac{M_z(x)}{E I_z(x)} + C_1$$

$$\theta_z(x) = \int \frac{M_z(x)}{E I_z(x)} + C_1$$

Ecuación de GIROS

$$y(x) = \int \left(\int \frac{M_z(x)}{E I_z(x)} dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

Ecuación de la Elástica

Notas:

- Sólo válida dentro del campo elástico
- se desprecian las deformaciones producidas por las tensiones de cizalladura (como veremos más adelante esta influencia puede no ser despreciable en algunos casos).



Notas:

- Para cualquier función $y=f(x)$, matemáticamente se puede demostrar:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

- Dentro del campo elástico:

$$\theta \ll 1 \quad \theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad \longrightarrow \quad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \approx 1$$

- Si diferenciamos dos veces dicha ecuación y teniendo en cuenta:

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = V(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

$$EI_z(x) \cdot y''' = \frac{dM_z(x)}{dx} = V_y(x)$$

$$EI_z(x) \cdot y^{IV} = \frac{dV_y(x)}{dx} = -q(x)$$

$V_y(x)$ = esfuerzo cortante

$q(x)$ = carga uniformemente repartida (F/L)



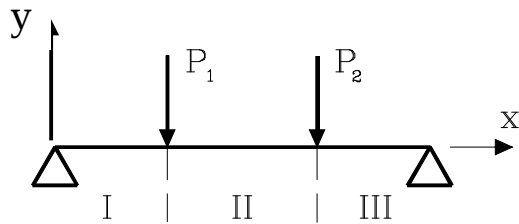
- La integración es sencilla cuando M_z tiene una expresión analítica simple e integrable.
- Las constantes de integración se determinan por las condiciones de contorno.
- Si M_z se anula en algún punto, se anula también y'' la elástica tiene un punto de inflexión.
- y e y' no pueden ser discontinuas ya que en el primer caso supone rotura de la viga y en el segundo habría un punto anguloso en el que $\rho=0$, lo que supondría que M_z es infinito $\sigma > \sigma_e$.
- y'' es discontinua en todos los puntos donde M/EI lo sea, por aplicación de un momento exterior o cambio de sección o material.
- Si la expresión analítica de M varía de un tramo a otro, habrá que integrar separadamente cada trozo.

Constantes de integración = condiciones de apoyo + condiciones de continuidad de la elástica en las secciones de discontinuidad de los momentos flectores.

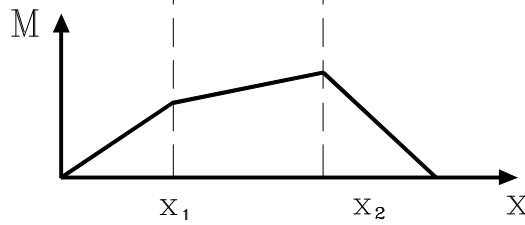


Mecánica de
Medios Continuos y
Teoría de Estructuras

Ejemplo



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z(x)}$$



Tres Tramos (I,II,III) $\rightarrow$ Tres Ecuaciones de la elástica

Seis constantes de integración.

Condiciones de apoyo

Condiciones de continuidad

$$x=0; \quad y=0$$

$$x=L; \quad y=0$$

$$x=x_1 \begin{cases} y_I = y_{II} \\ \theta_I = \theta_{II} \end{cases}$$

$$x=x_2 \begin{cases} y_{II} = y_{III} \\ \theta_{II} = \theta_{III} \end{cases}$$



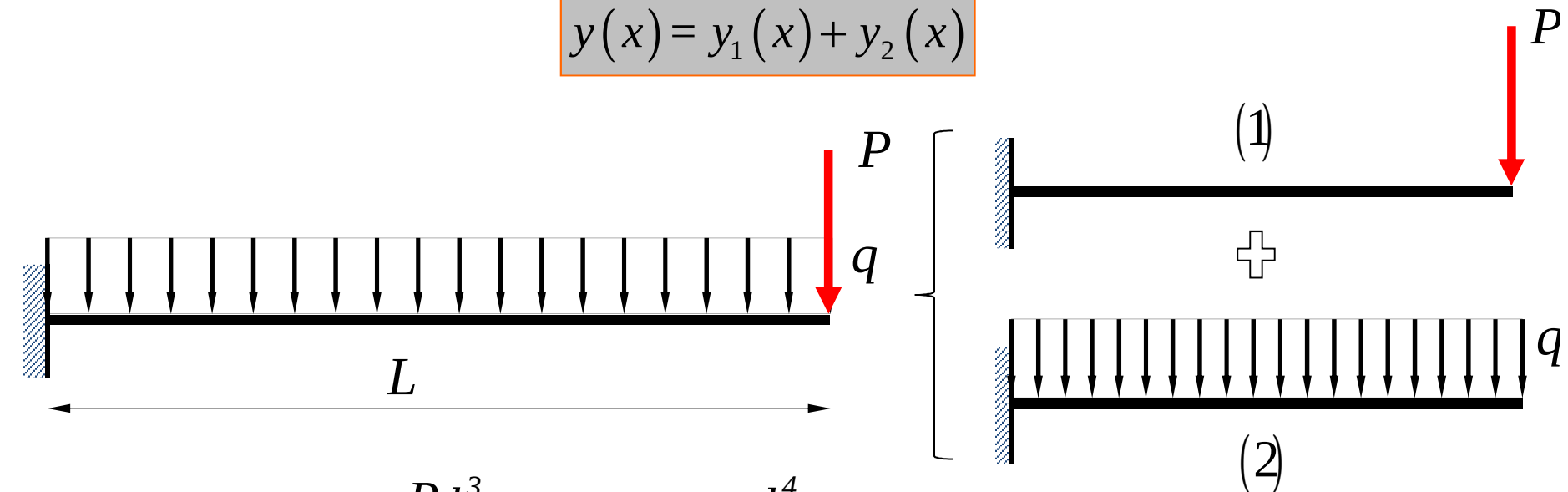
Mecánica de
Medios Continuos y
Teoría de Estructuras

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z(x)}$$

Ecuación diferencial de la elástica.

Ecuación diferencial lineal en y'' $\implies$ Las soluciones para varios casos de carga pueden superponerse.

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$



$$\delta_1 = \frac{P \cdot l^3}{3EI}$$

$$\delta_2 = \frac{q \cdot l^4}{8EI}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P \cdot l^3}{3EI} + \frac{q \cdot l^4}{8EI}$$

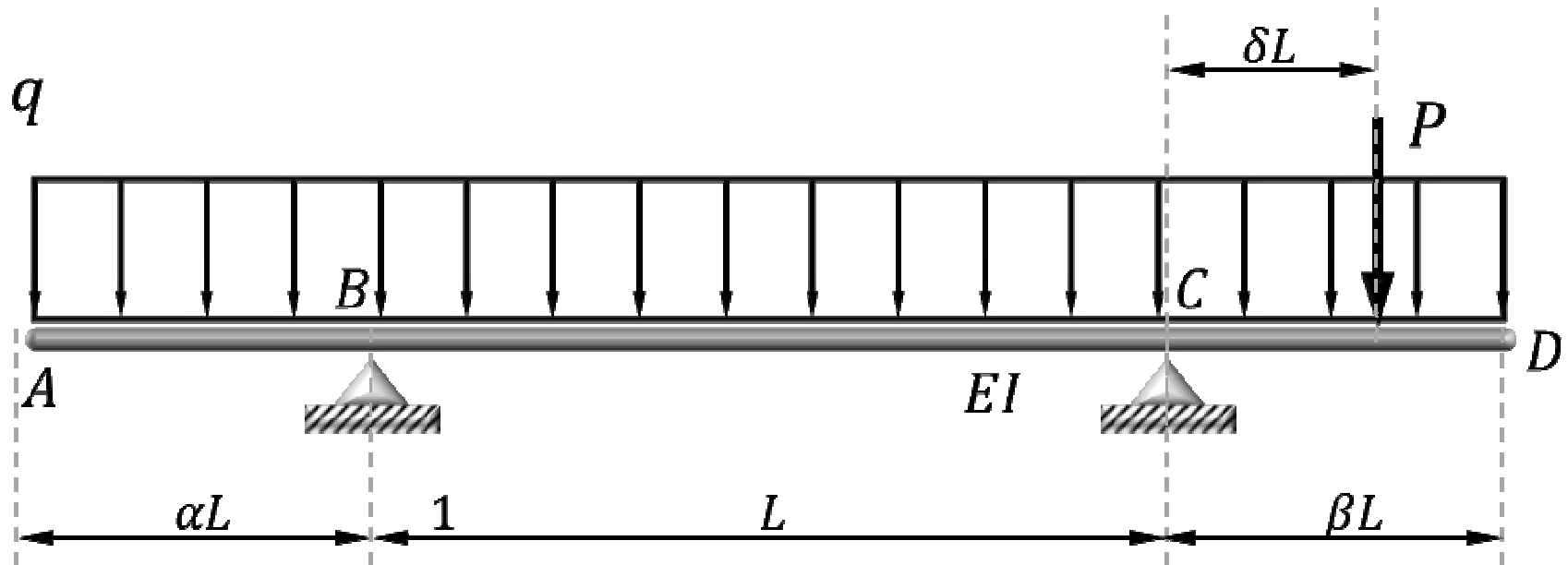


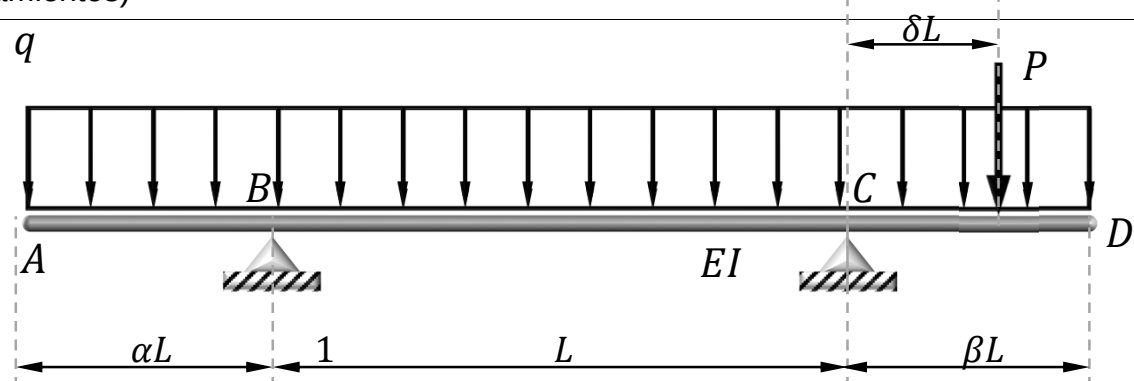
Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

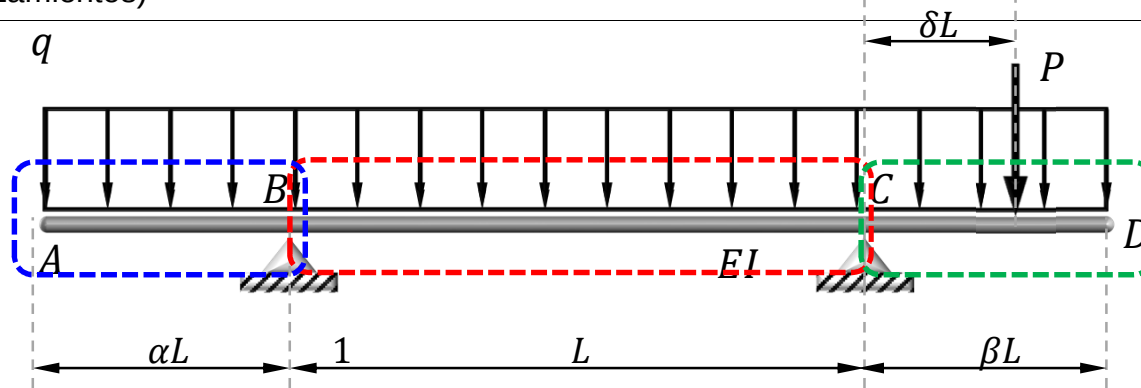


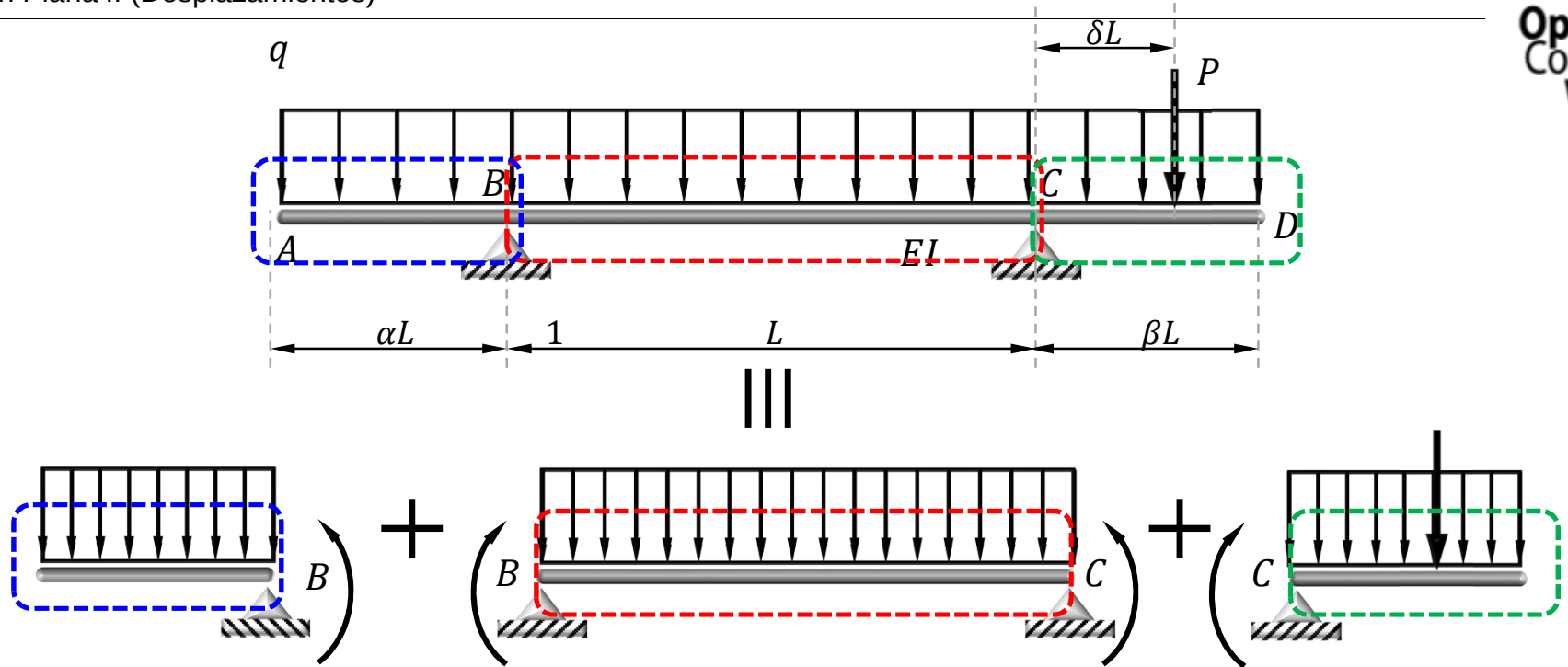
APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN A LA DETERMINACIÓN DE LA DEFORMADA DE SISTEMAS DE BARRAS

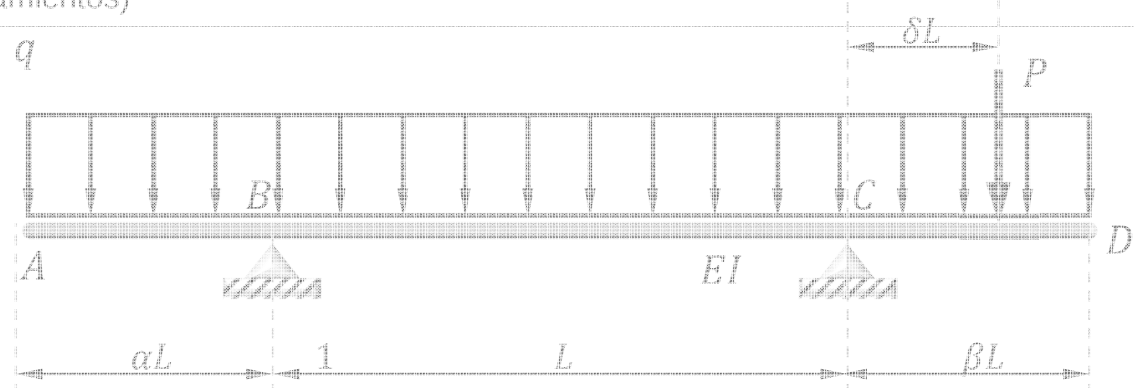
Ejemplo 1



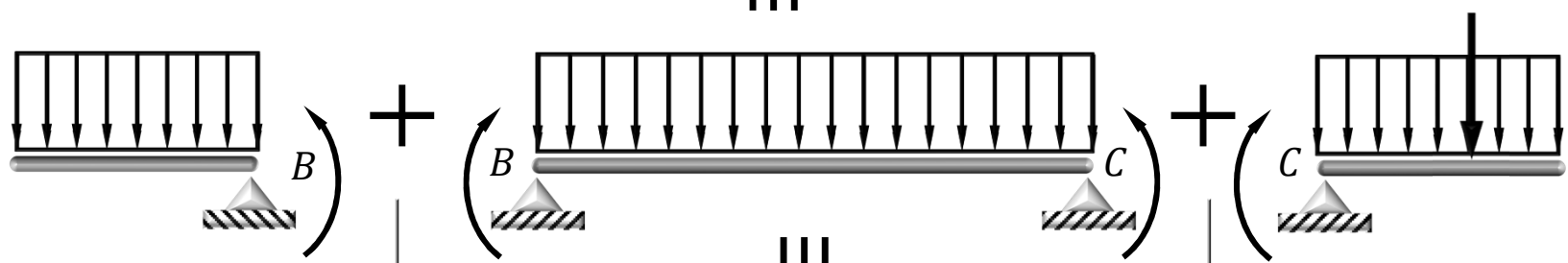




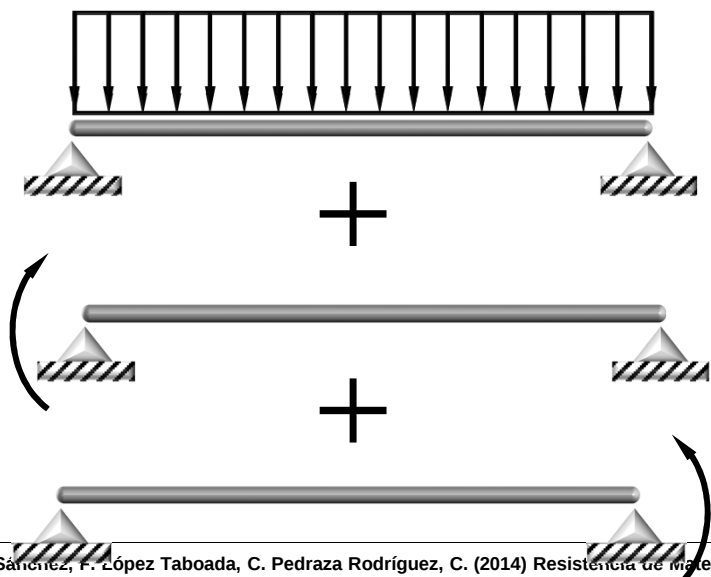


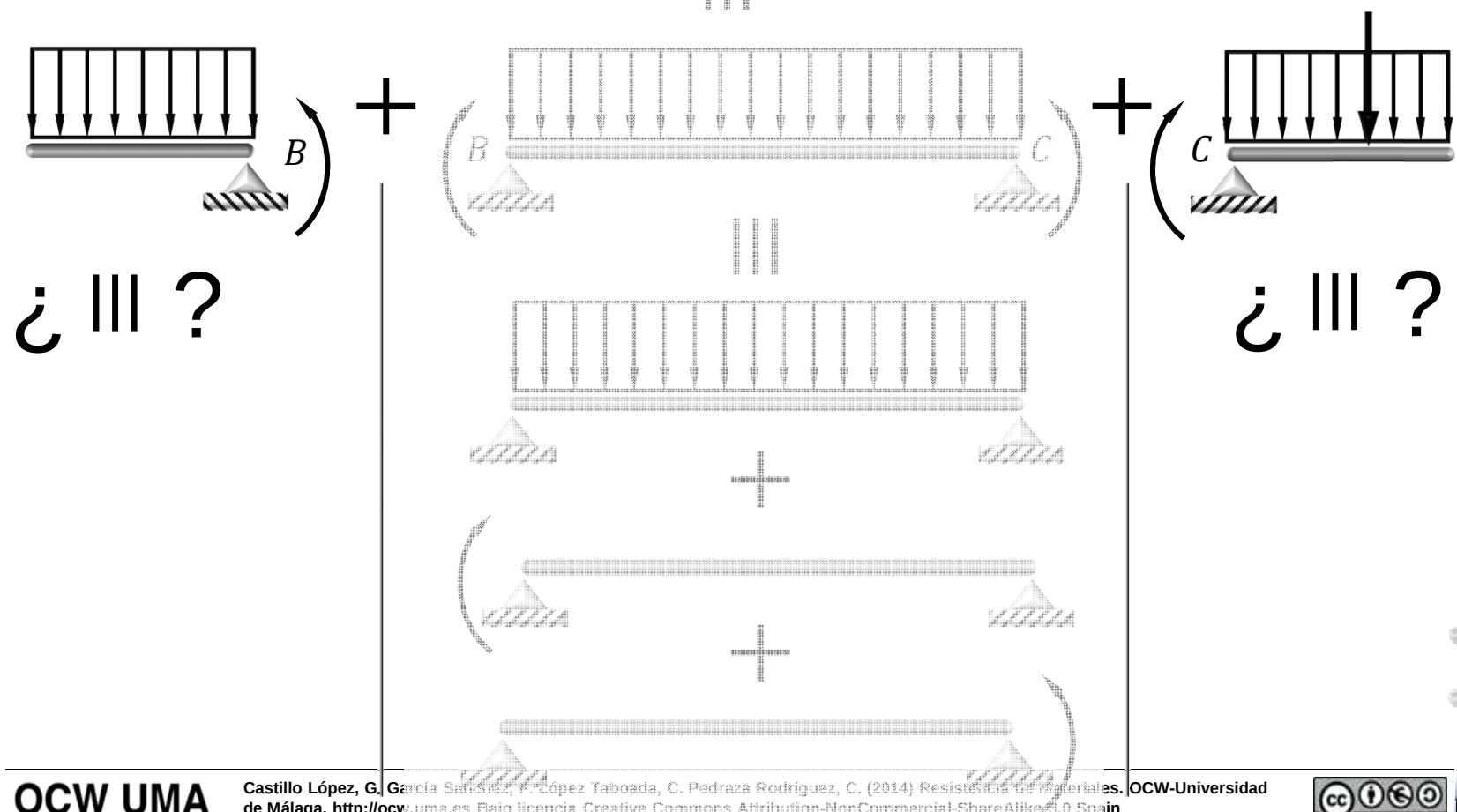
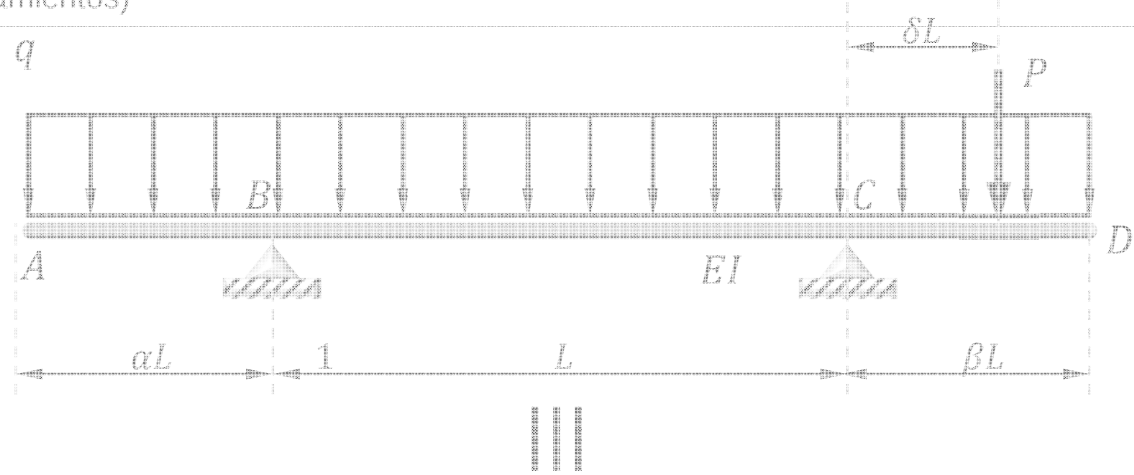


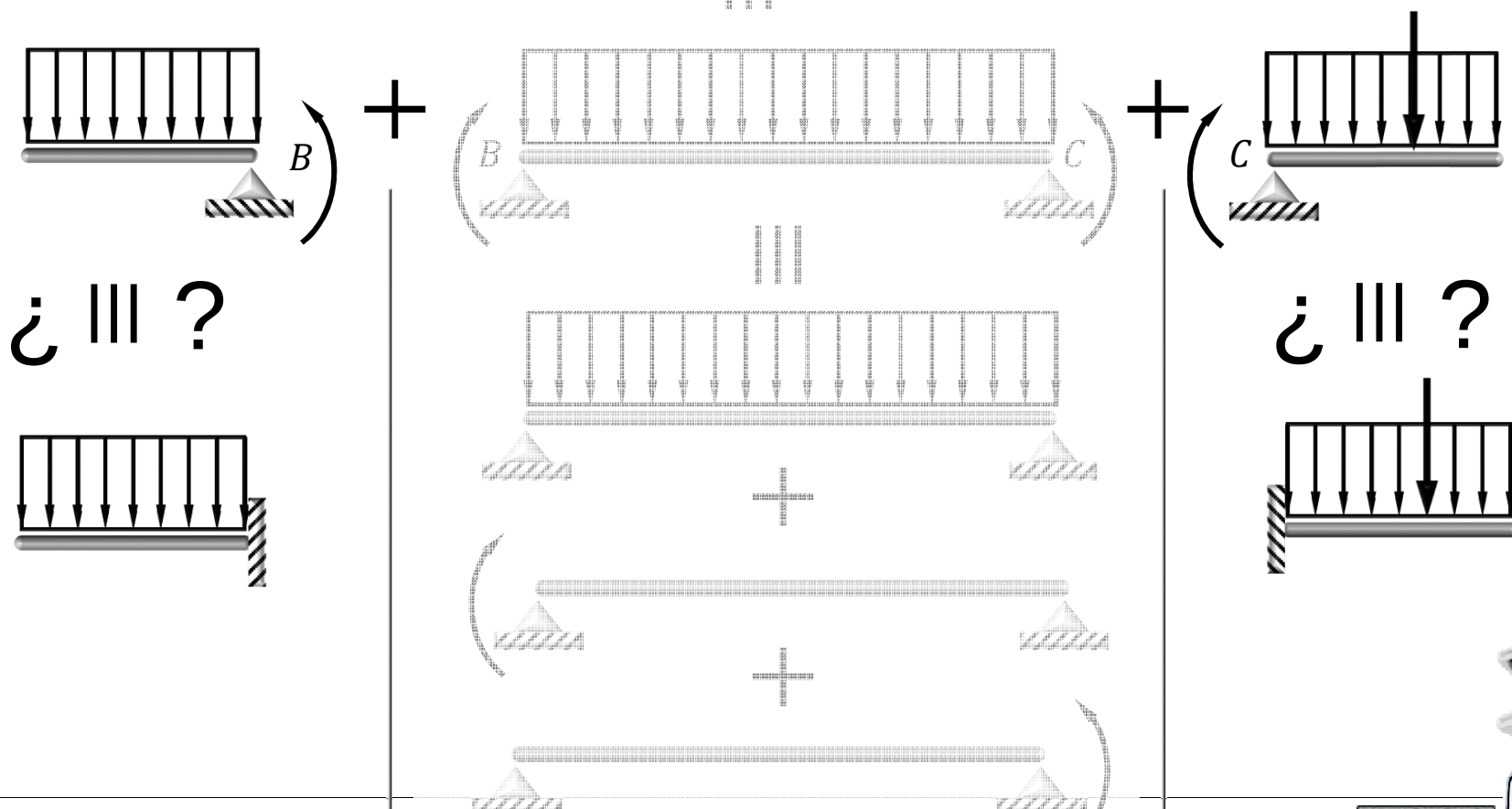
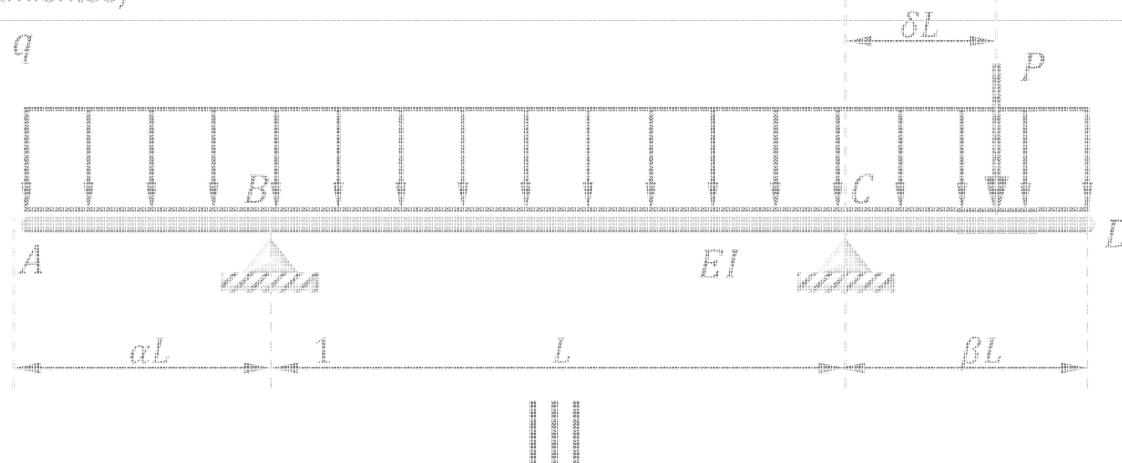
III

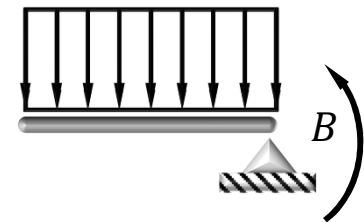
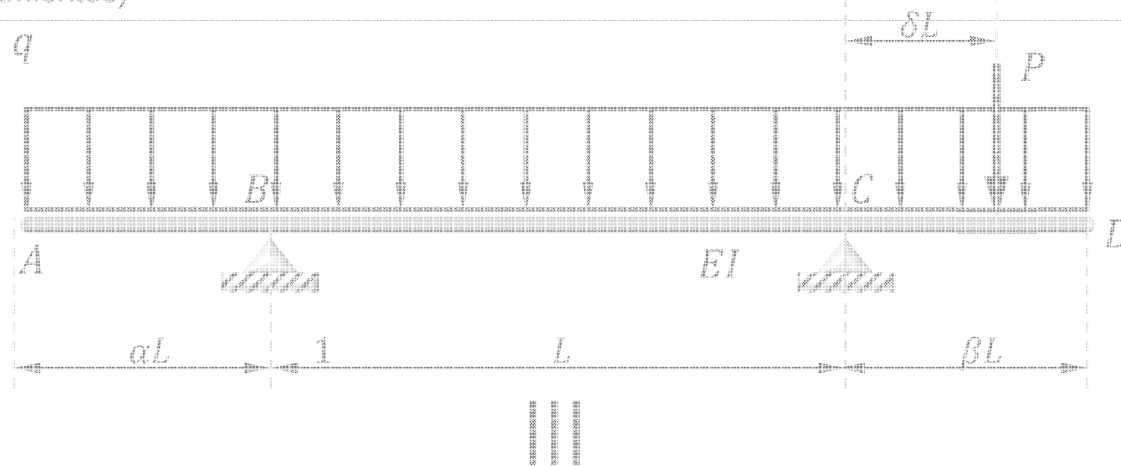


III

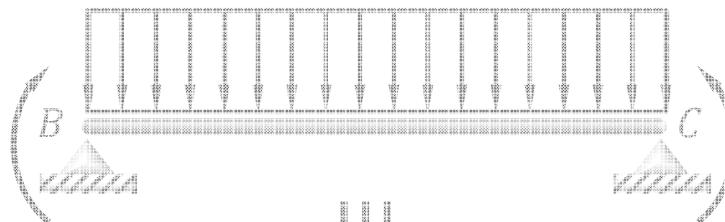




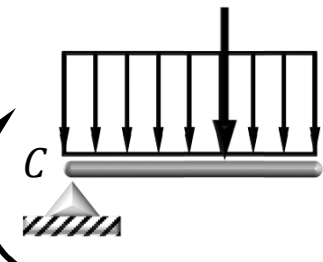




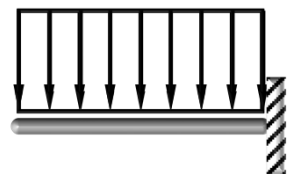
+



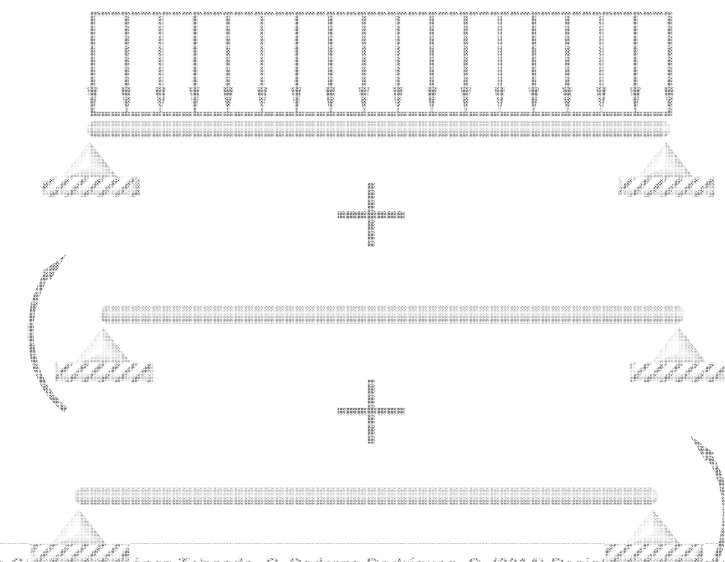
+



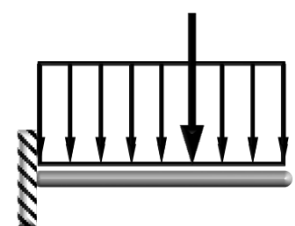
¿ ||| ?



No exactamente

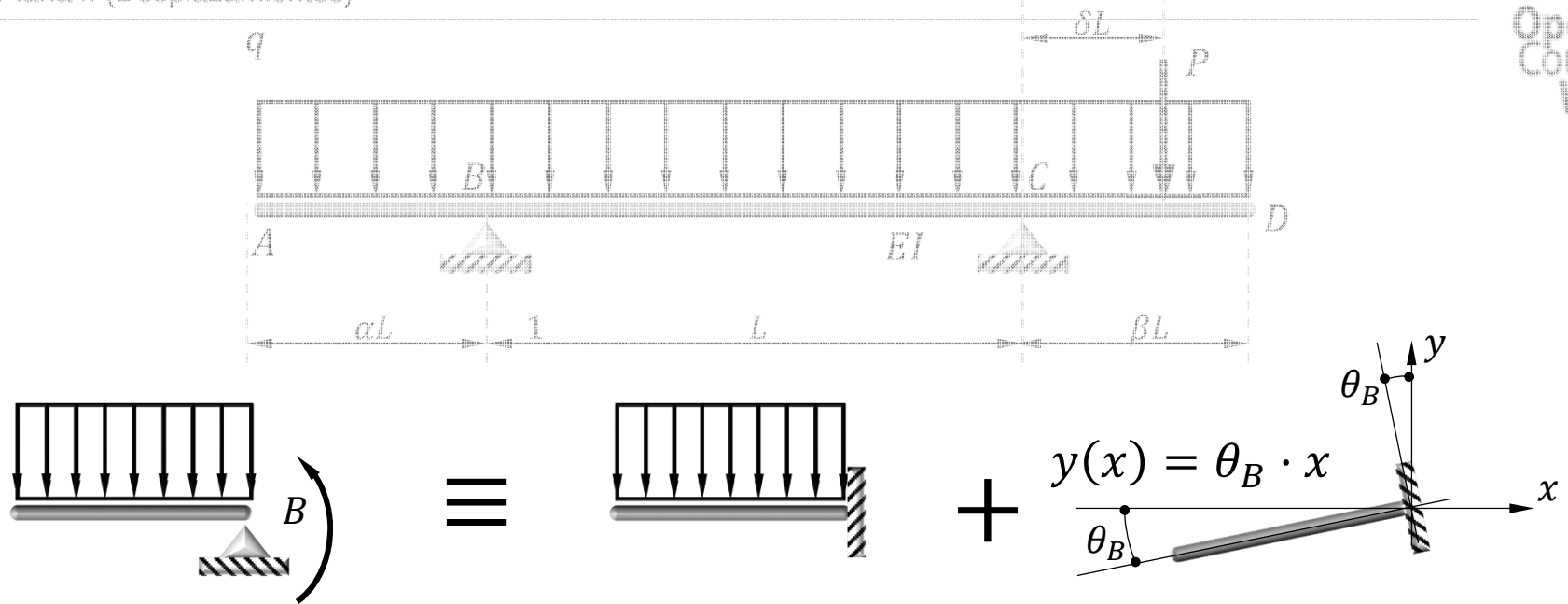


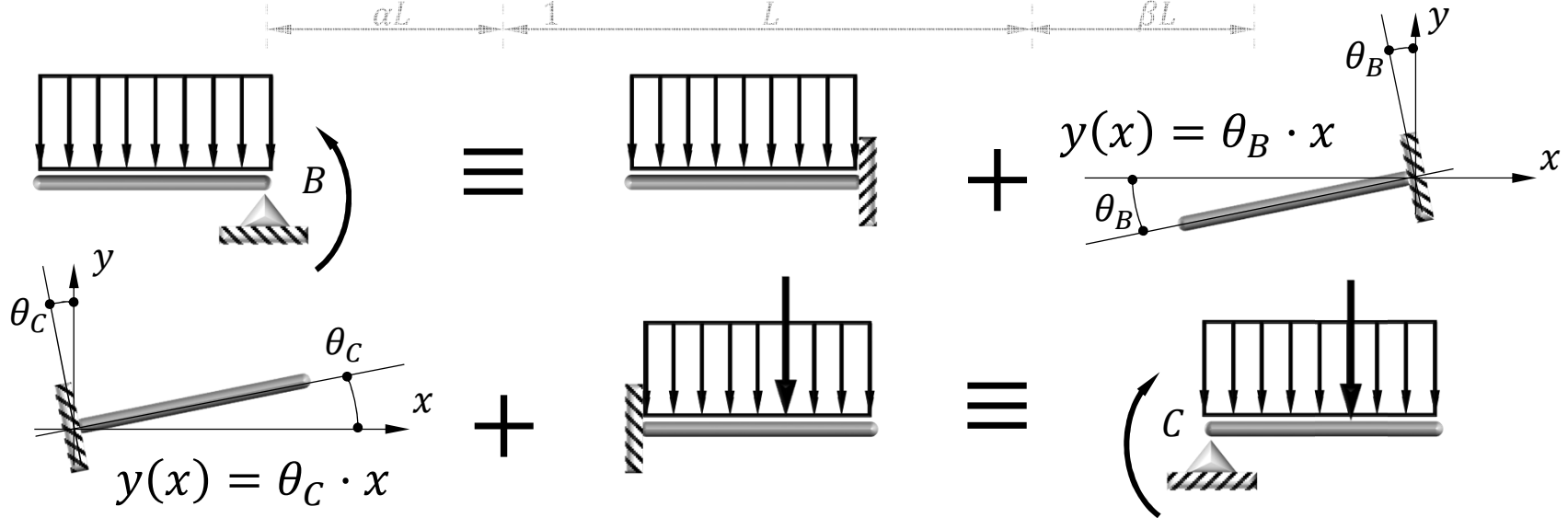
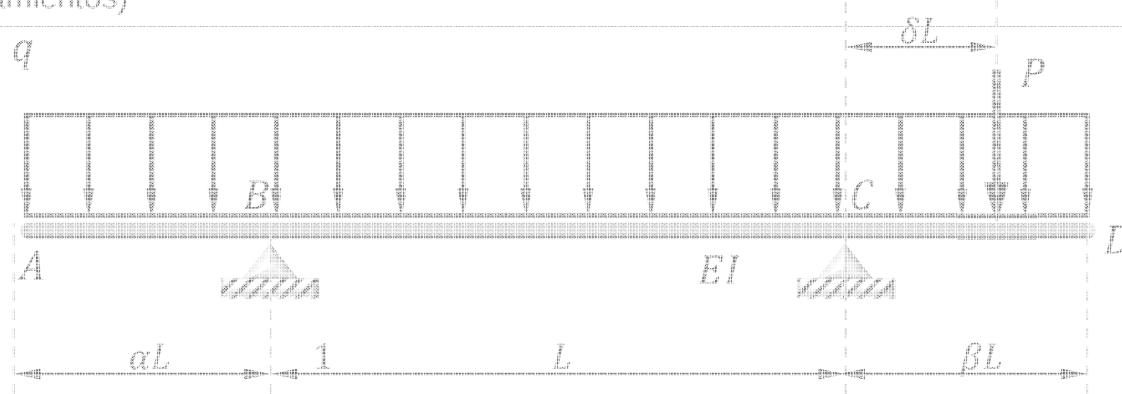
¿ ||| ?

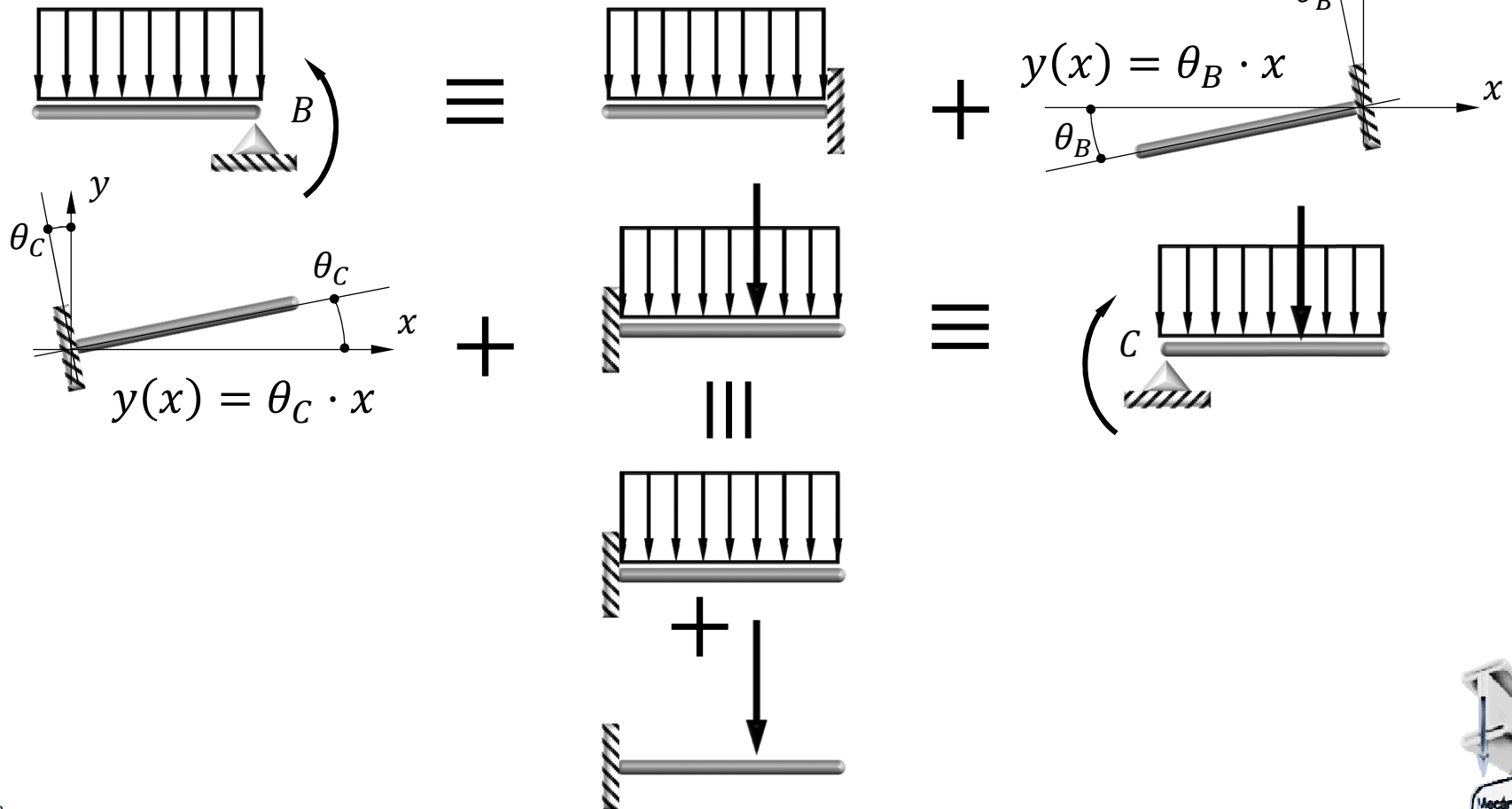
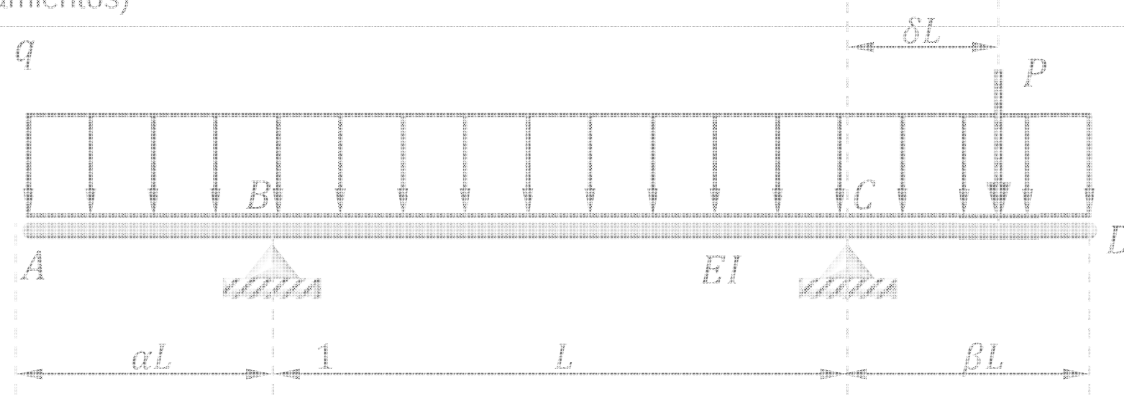


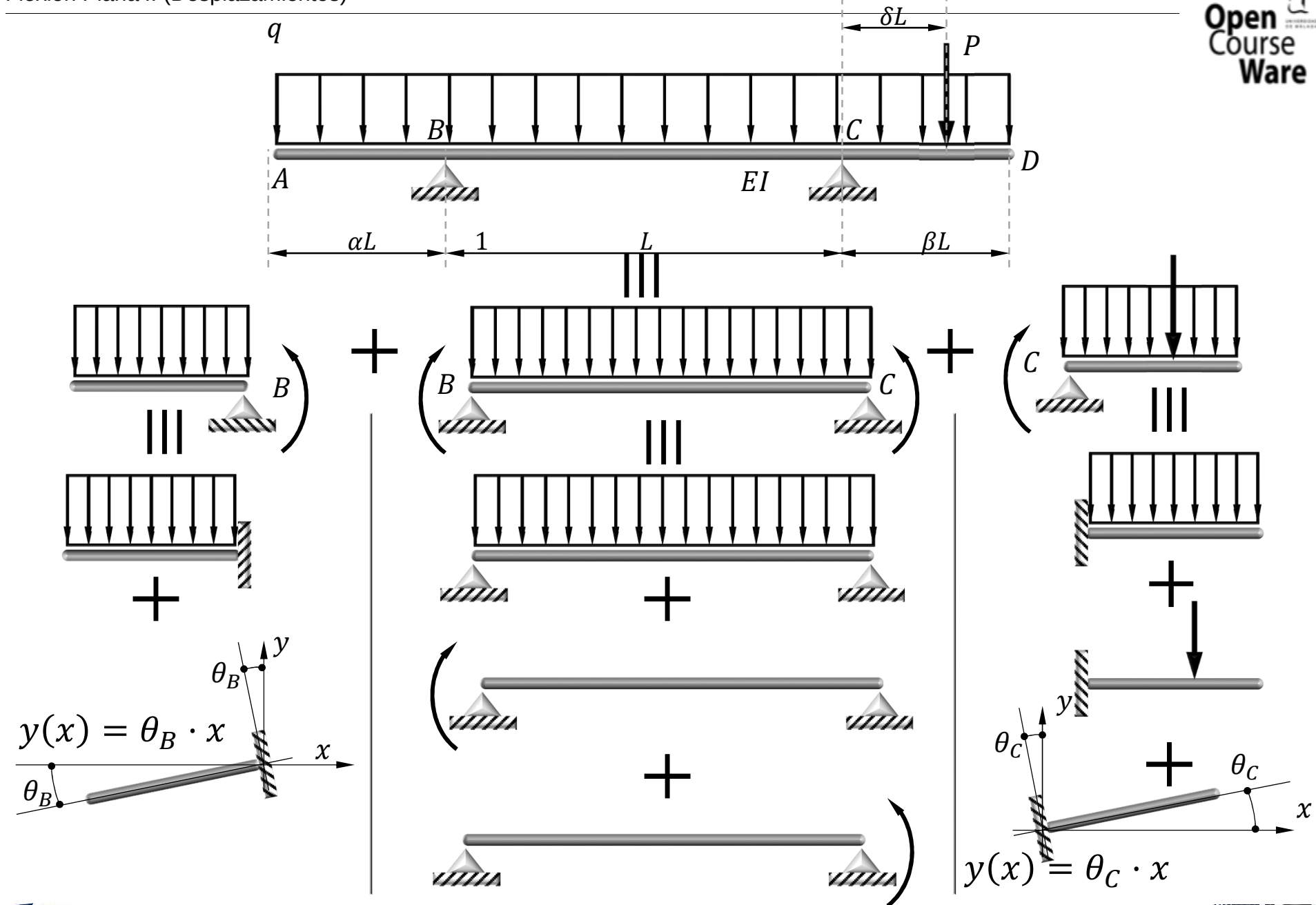
No exactamente



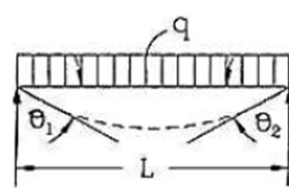


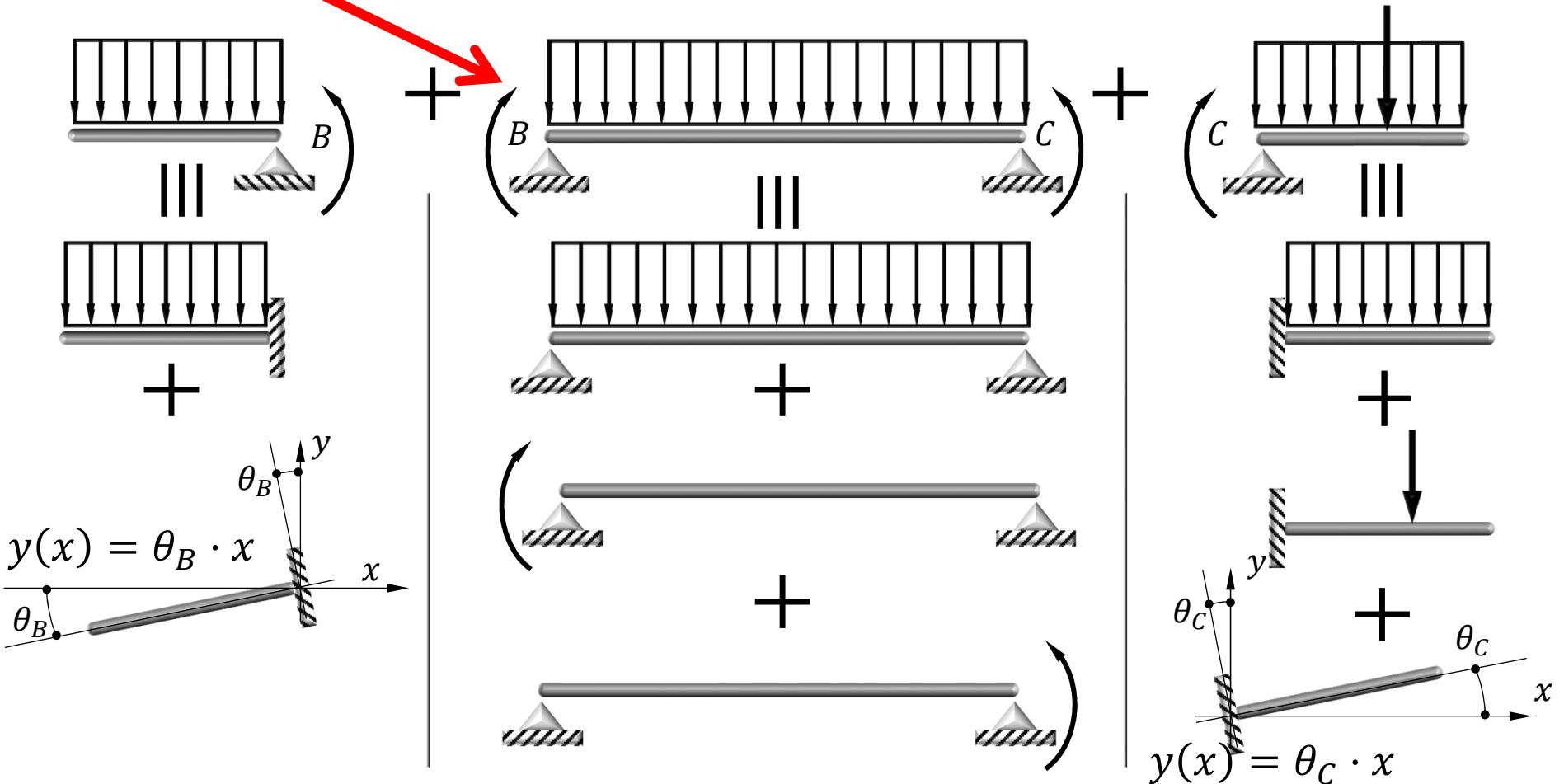




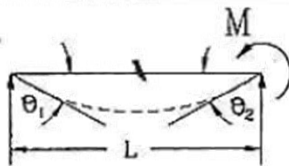


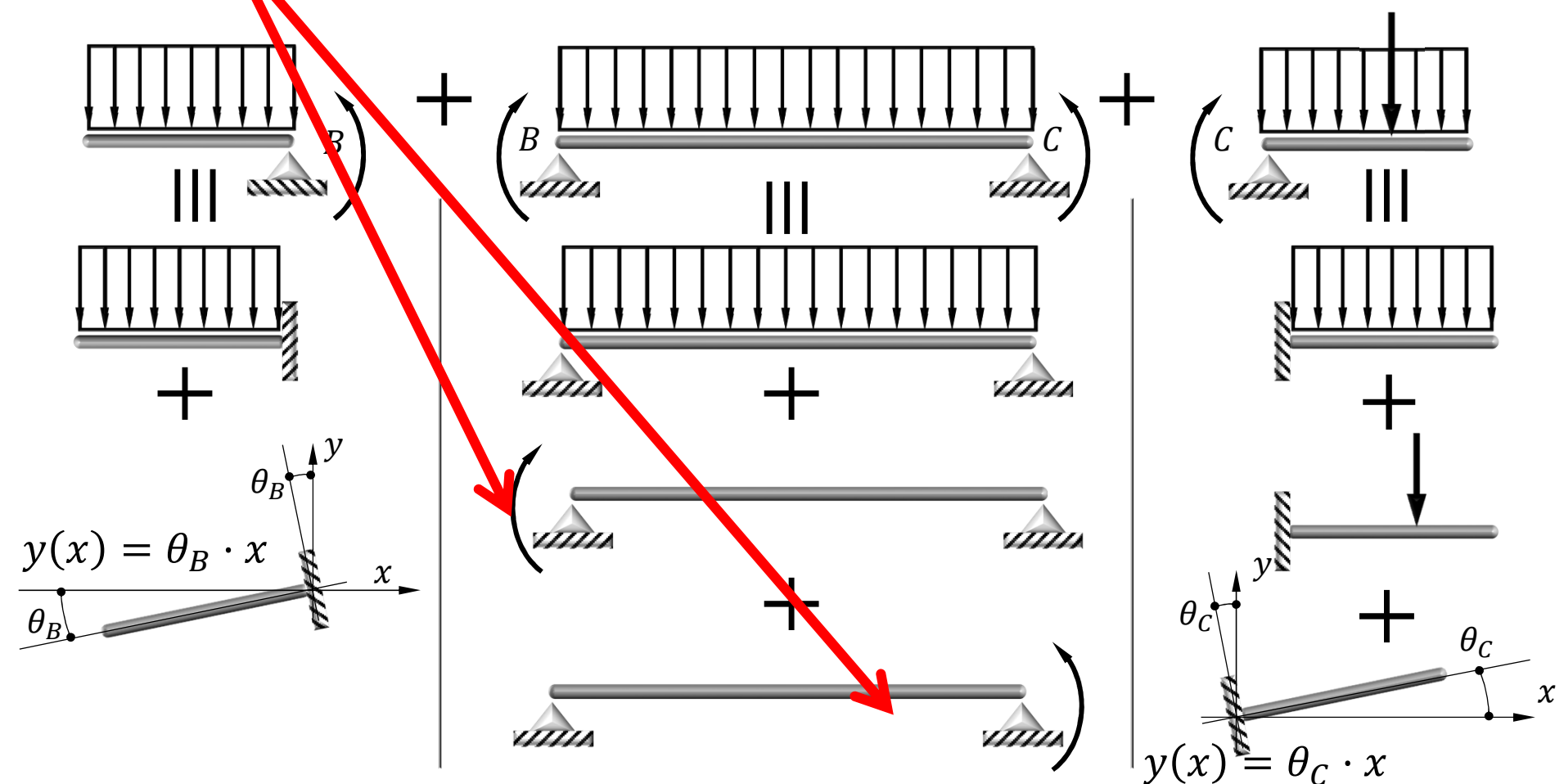
8.- Viga simplemente apoyada en los extremos - Carga uniformemente distribuida q .

	$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ $\theta = \frac{q L^3}{24 E I}$	$y = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$	$\delta = \frac{5qL^4}{384EI}$
--	--	---	--------------------------------

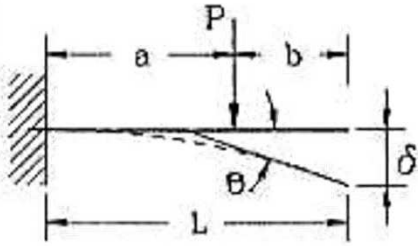


9.- Viga simplemente apoyada en los extremos - Momento M en el extremo de la derecha

	$\theta_1 = \frac{ML}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{ML}{3EI}$	$y = \frac{MLx}{6EI} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$	$\delta = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI} \quad \text{en } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ En el centro: $\delta = \frac{ML^2}{16EI}$
--	---	--	--



2.- Viga en voladizo - Carga concentrada P en un punto cualquiera.

	$\theta = \frac{P a^2}{2 E I}$	Para $0 < x < a$: $y = \frac{P x^2}{6 E I} (3a - x)$ Para $a < x < L$: $y = \frac{P a^2}{6 E I} (3x - a)$	$\delta = \frac{P a^2}{6 E I} (3L - a)$
--	--------------------------------	---	---

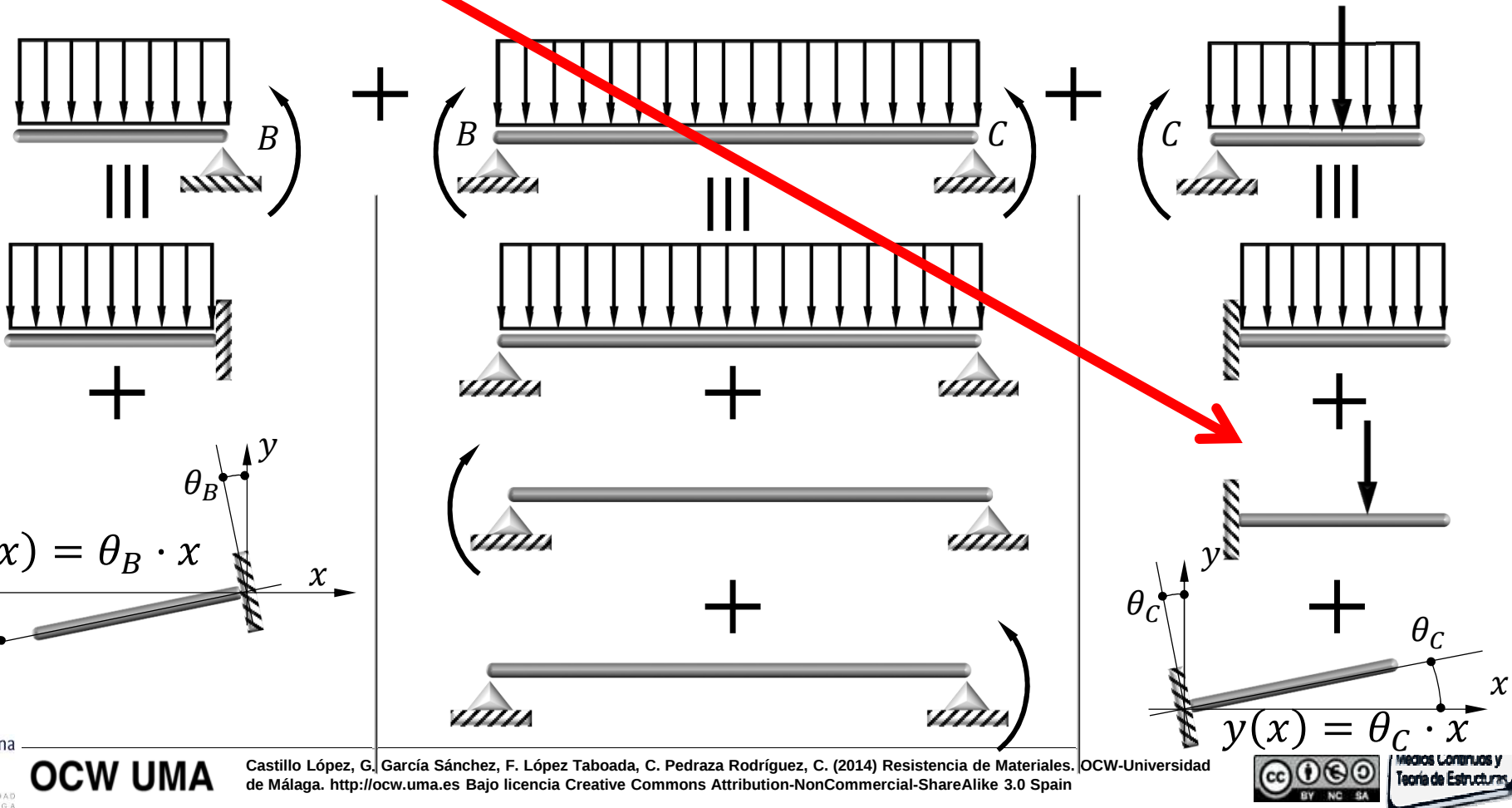


Diagram illustrating the superposition of three beam models to derive the deflection of a cantilever beam with a point load P at distance a from the fixed end.

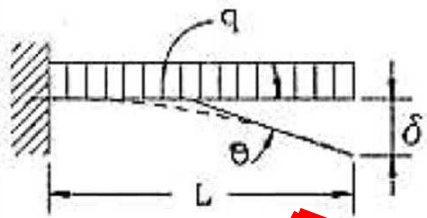
The three models are:

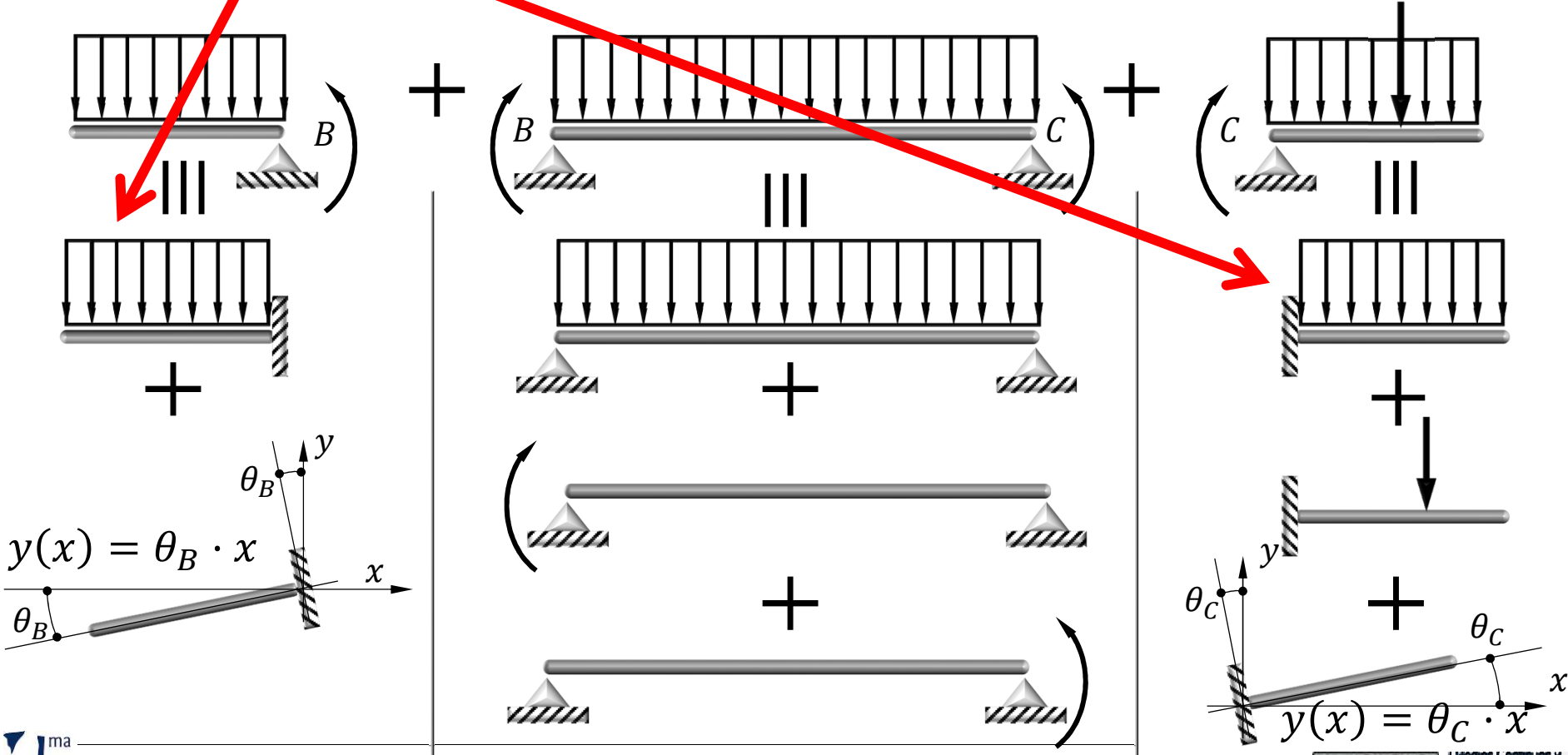
- Model 1: A cantilever beam of length L with a uniformly distributed load of intensity $\frac{P}{a}$ over the first segment of length a . The rotation at the fixed end is θ_B .
- Model 2: A simply supported beam of length L with a uniformly distributed load of intensity $\frac{P}{a}$ over the first segment of length a . The reactions at the supports are $\frac{Pa}{2L}$ and $\frac{Pa}{2}$.
- Model 3: A cantilever beam of length a with a uniformly distributed load of intensity $\frac{P}{a}$. The rotation at the free end is θ_C .

The resulting beam (bottom right) is a cantilever of length L with a point load P at distance a from the fixed end. The deflection curve is given by:

$$y(x) = \theta_C \cdot x \quad \text{for } x > a$$

3.- Viga en voladizo - Carga uniformemente repartida de q Kg/ml.

	$\theta = \frac{q L^3}{6 E I}$	$y = \frac{q x^2}{24 E I} (x^2 + 6L^2 - 4Lx)$	$\delta = \frac{q L^4}{8 E I}$
--	--------------------------------	---	--------------------------------



$y(x) = \theta_B \cdot x$

$y(x) = \theta_C \cdot x$

Castillo López, G. García Sánchez, F. López Taboada, C. Pedraza Rodríguez, C. (2014) Resistencia de Materiales. de Málaga. <http://ocw.uma.es> Bajo licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain

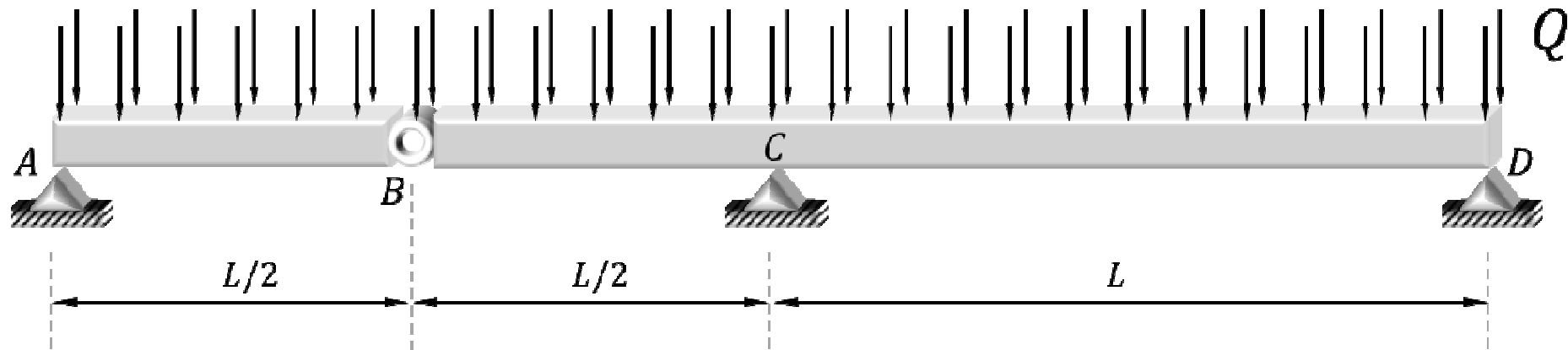
OCU-Universidad de Málaga

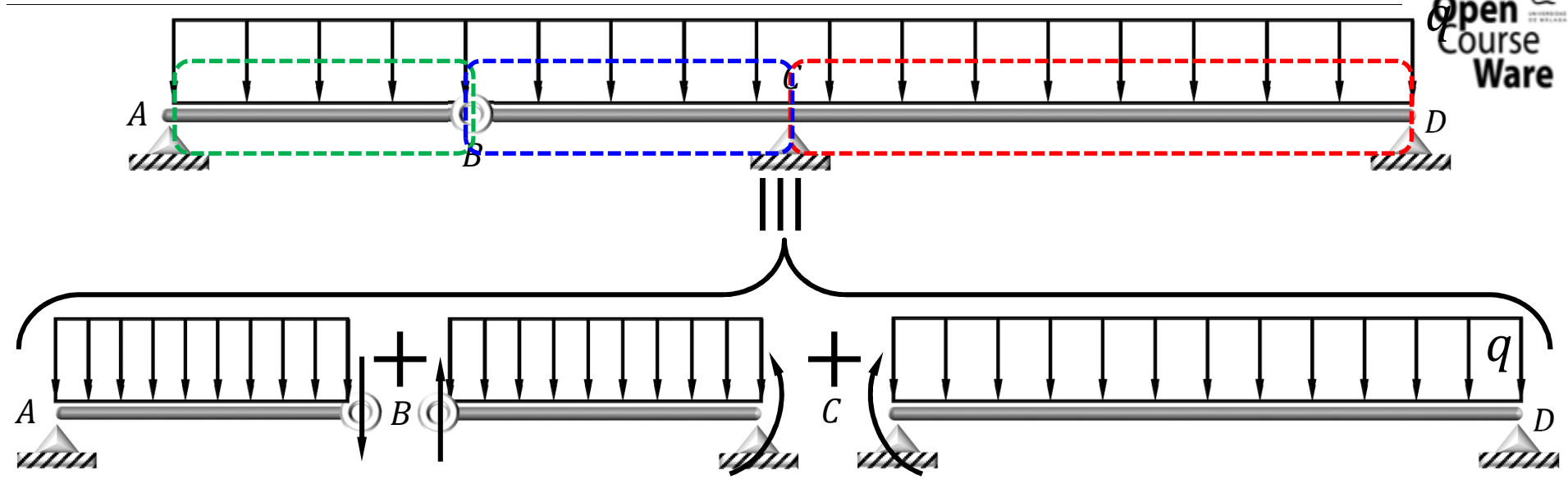
CC BY NC SA

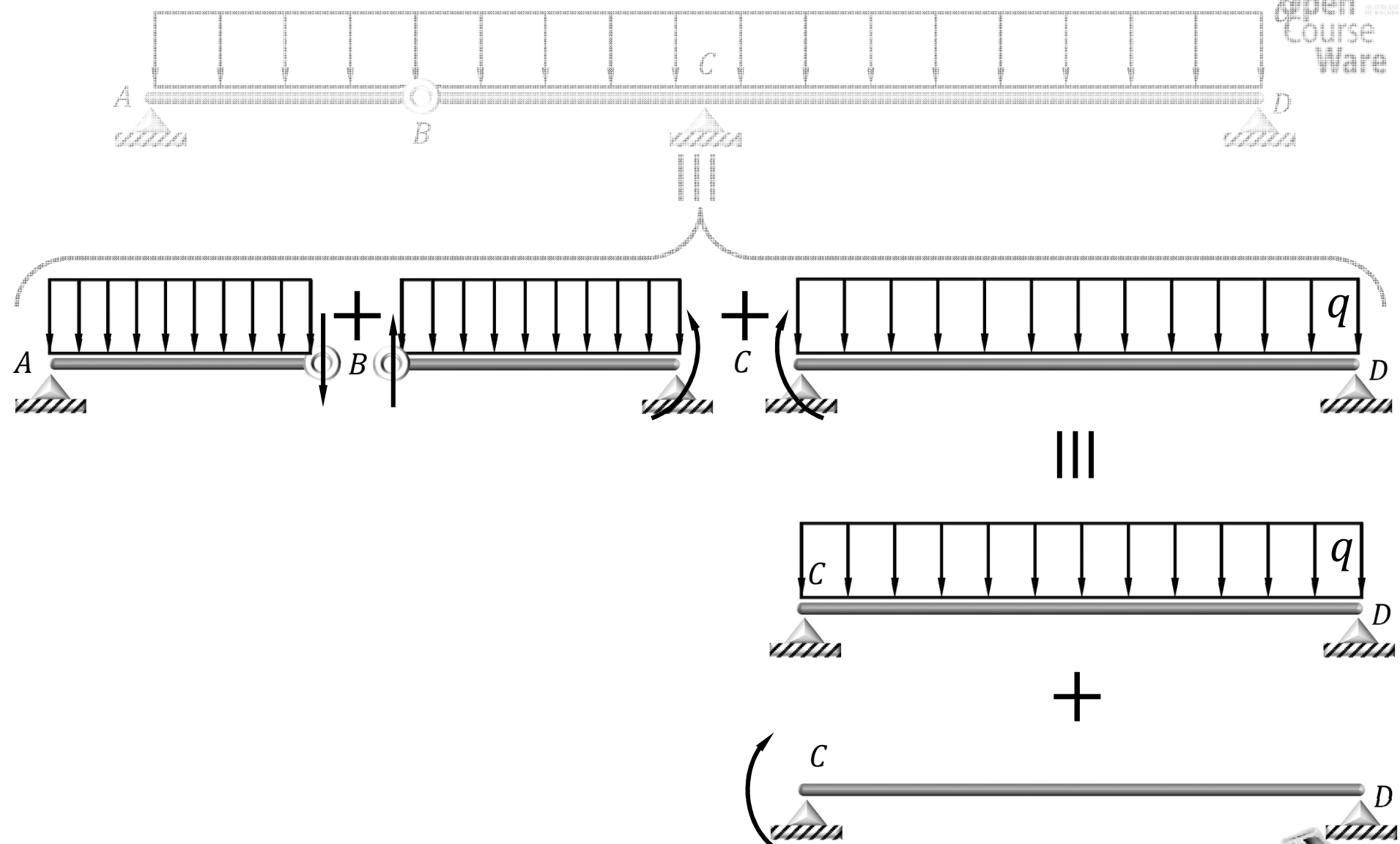
Medios Continuos y Teoría de Estructuras

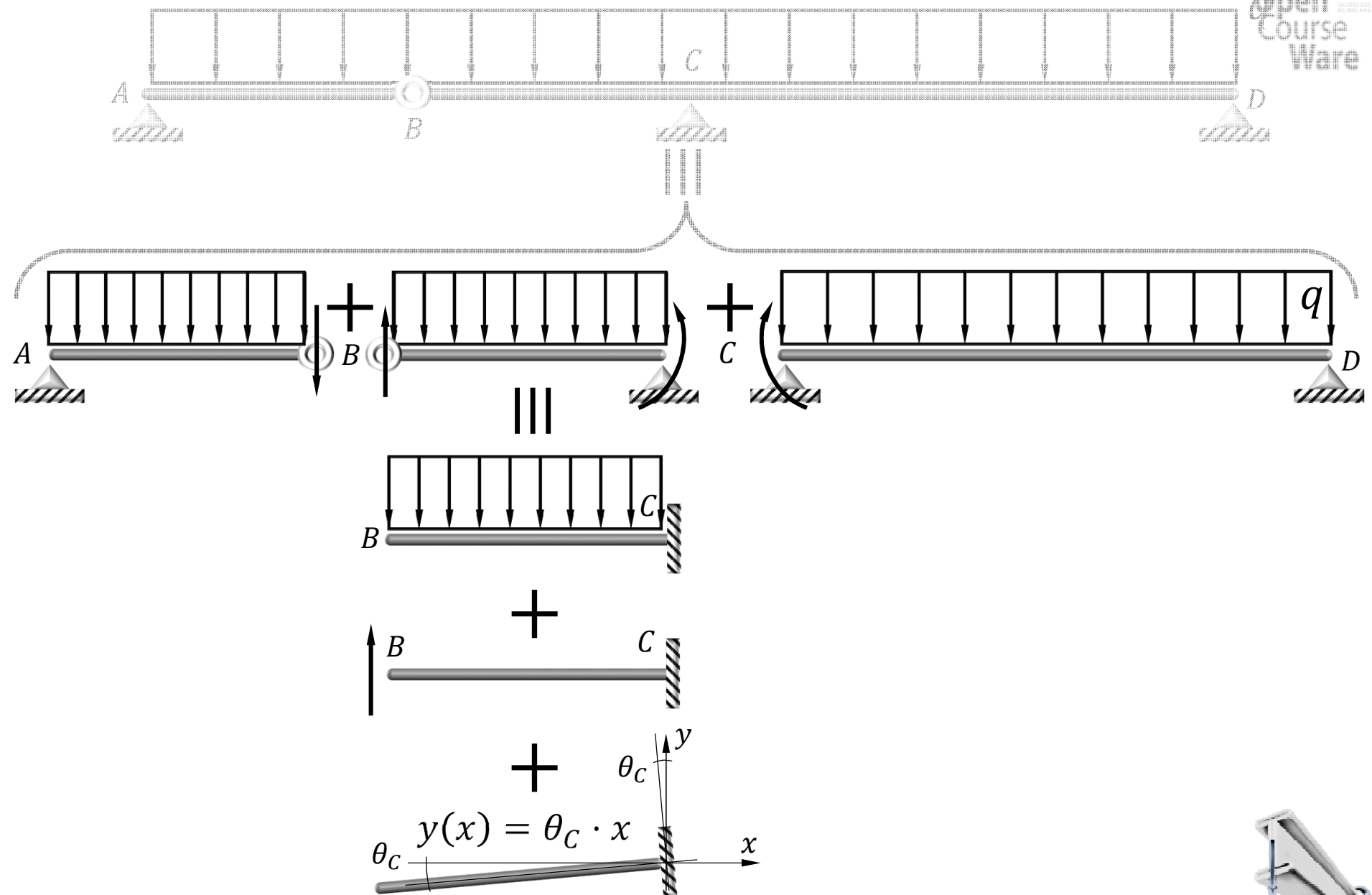
APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN A LA DETERMINACIÓN DE LA DEFORMADA DE SISTEMAS DE BARRAS

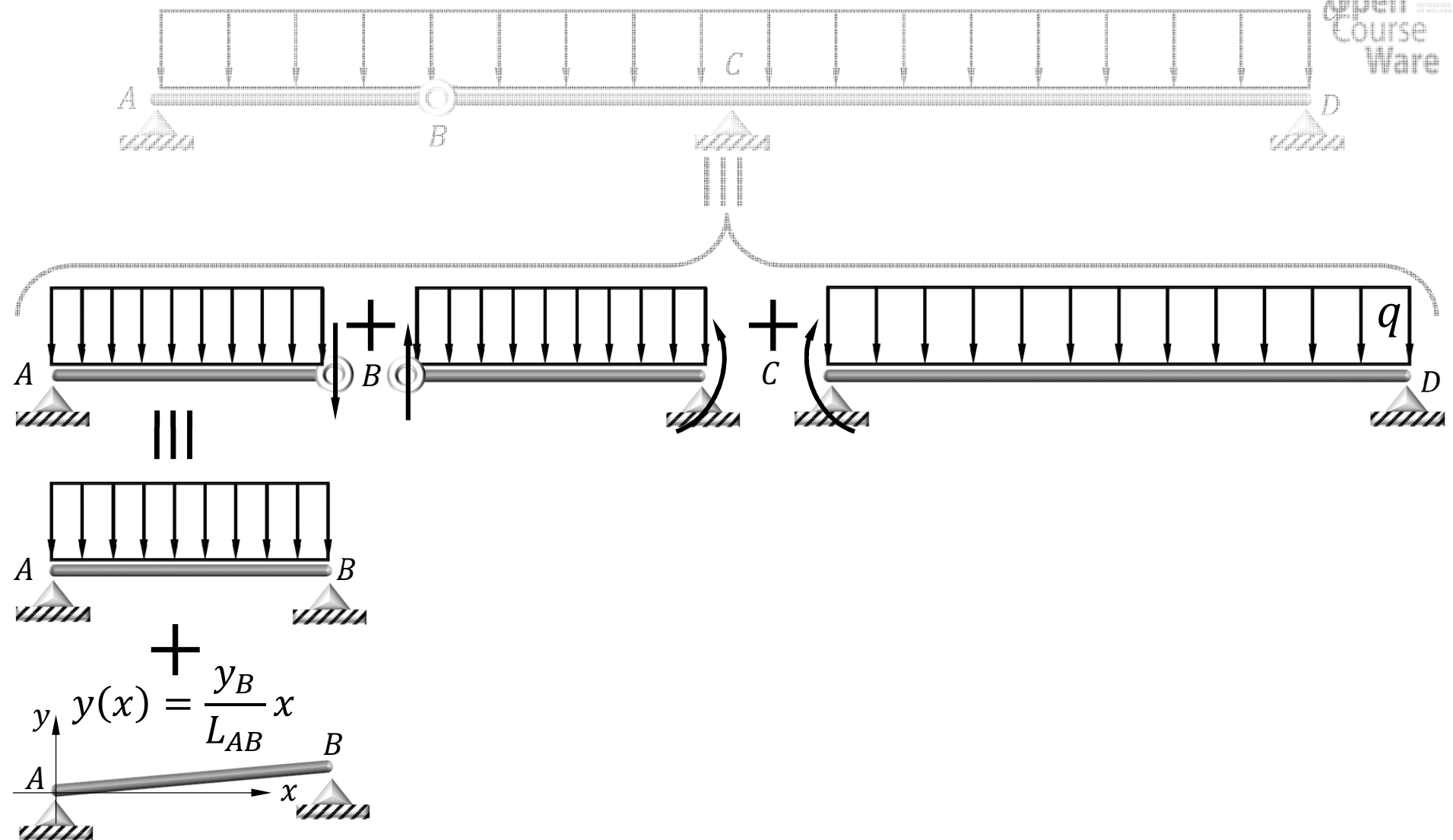
Ejemplo 2

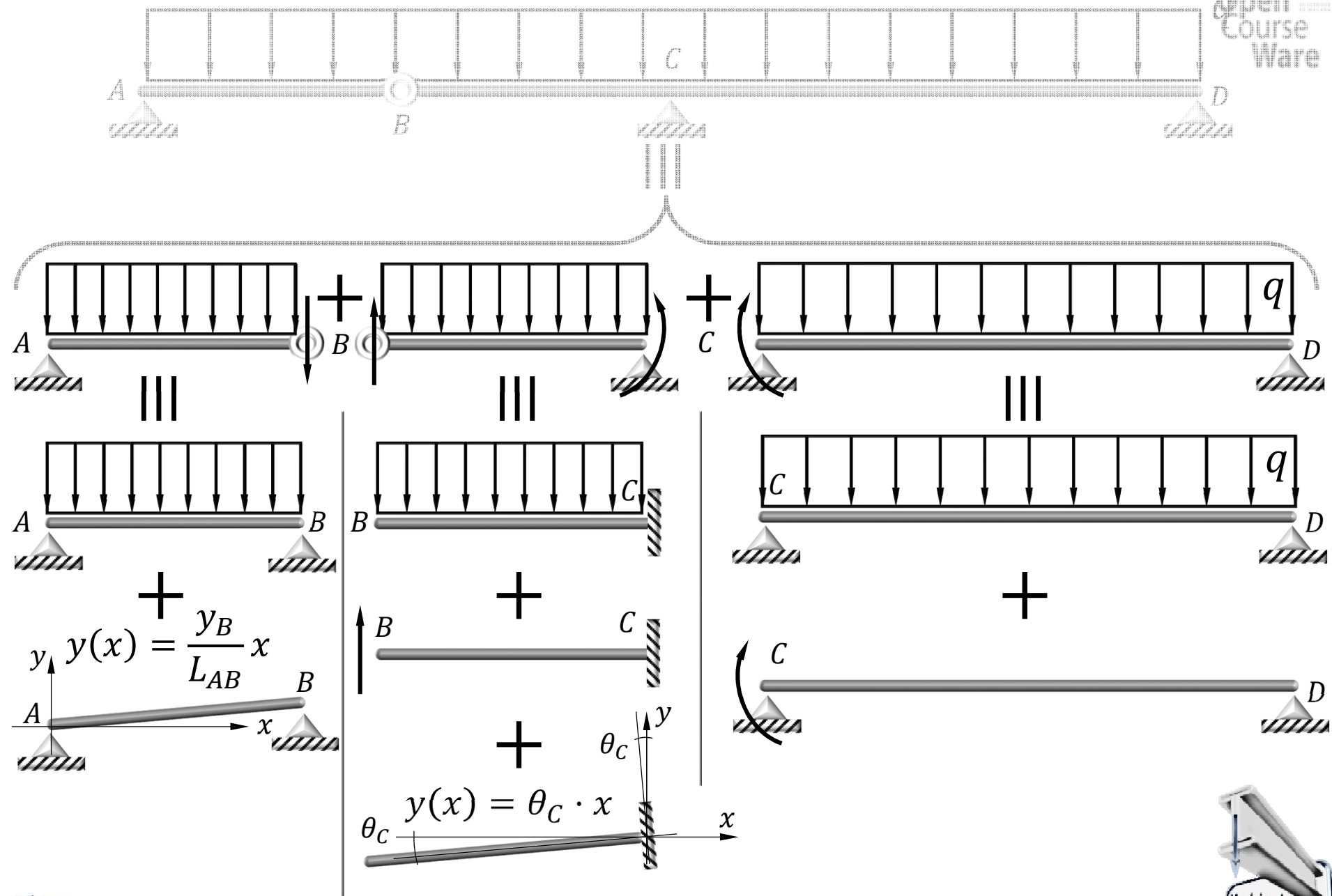




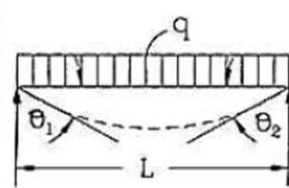


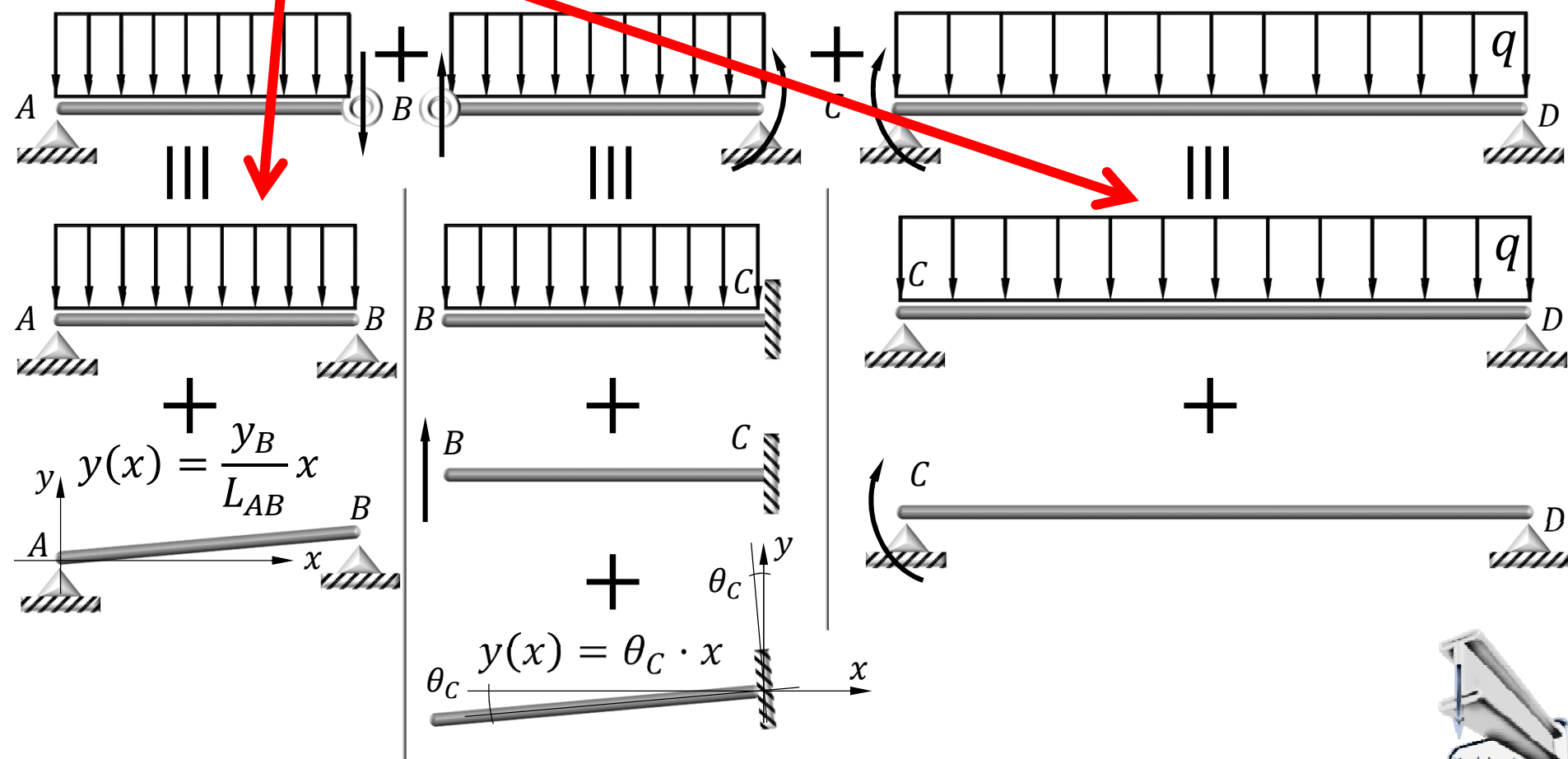




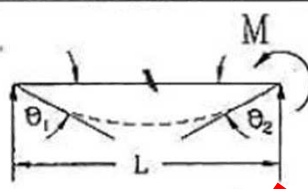


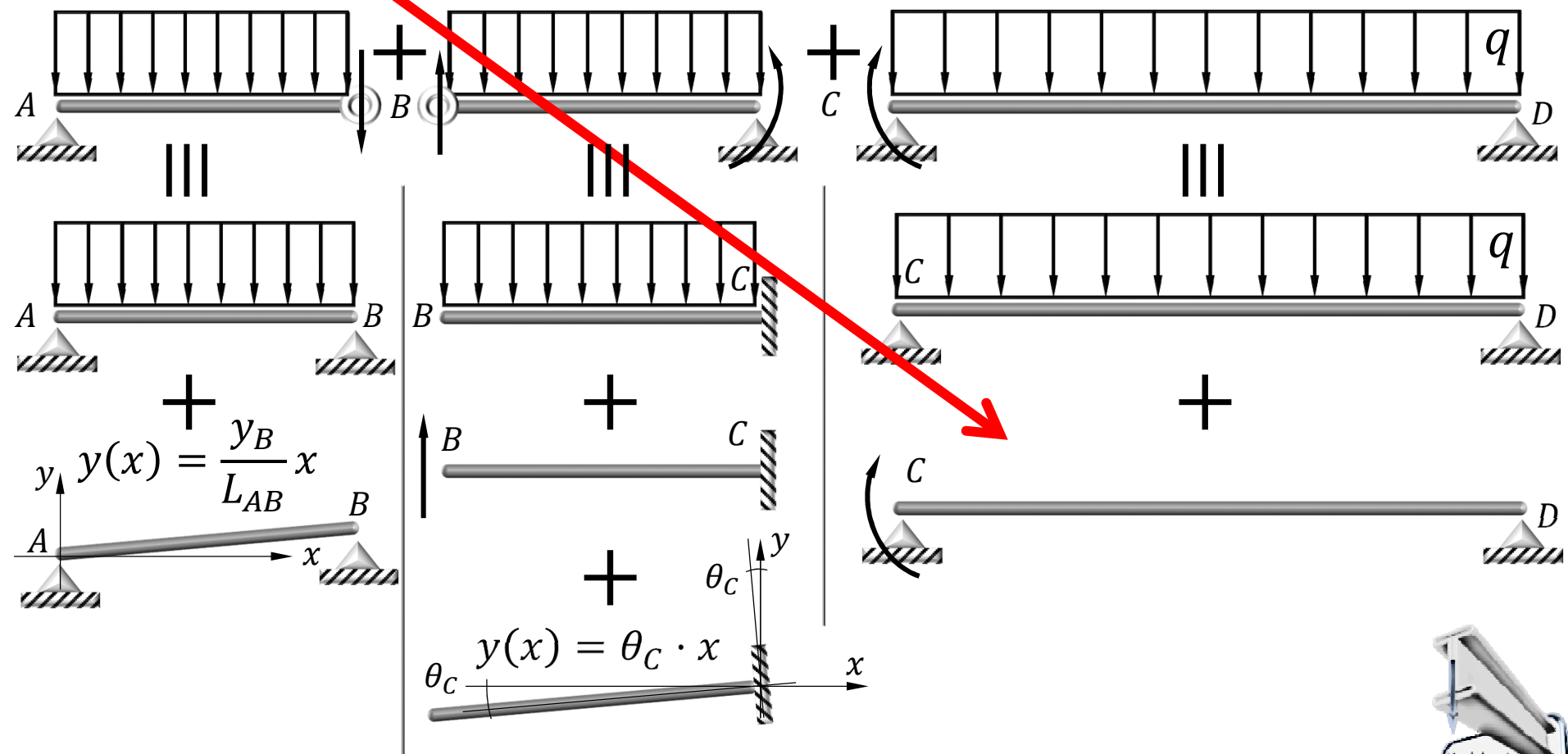
8.- Viga simplemente apoyada en los extremos - Carga uniformemente distribuida q .

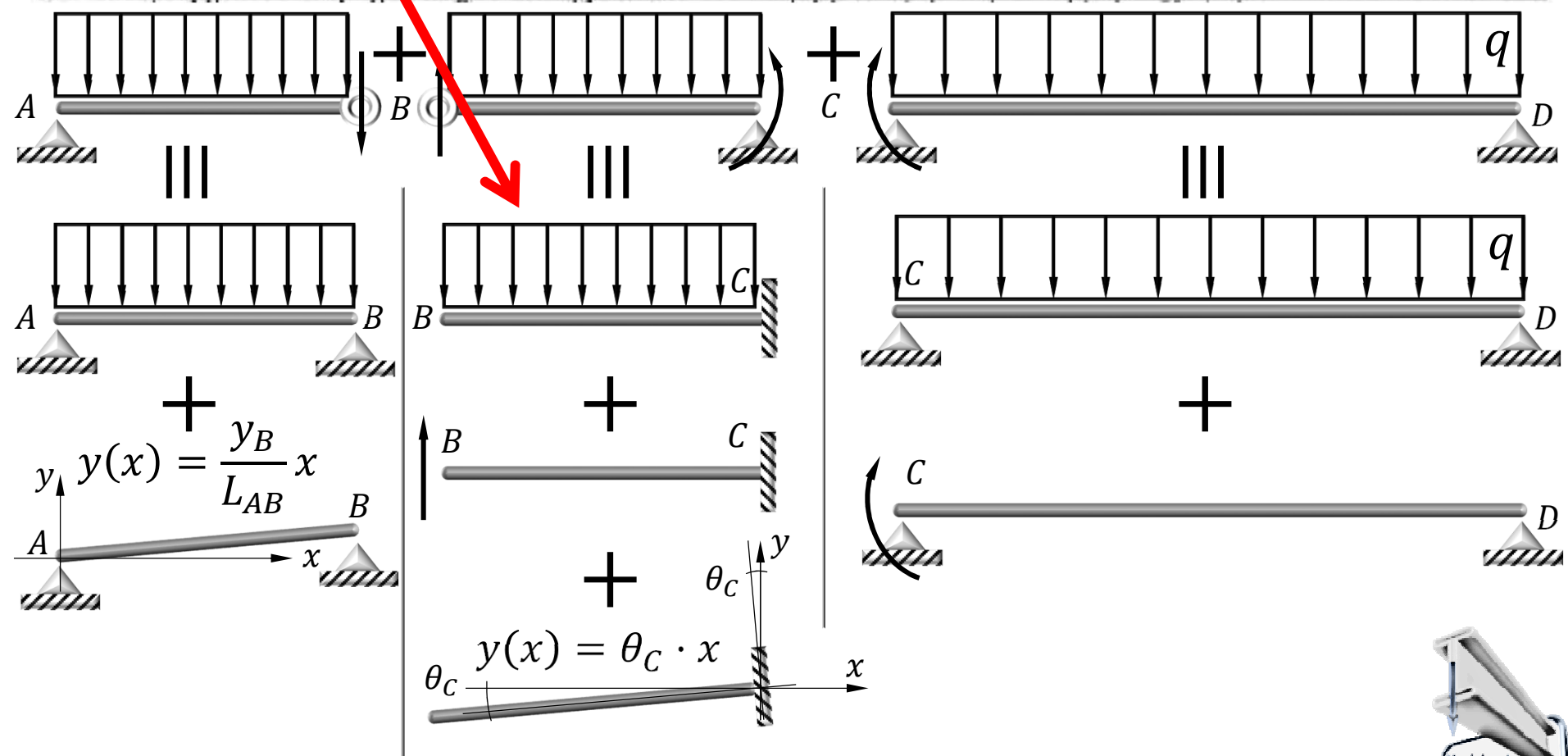
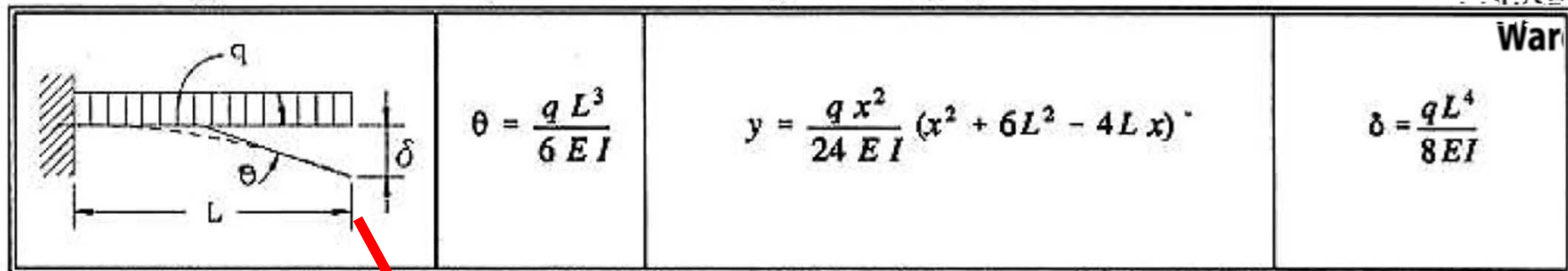
	$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ $\theta = \frac{q L^3}{24 EI}$	$y = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$	$\delta = \frac{5qL^4}{384EI}$
--	---	---	--------------------------------



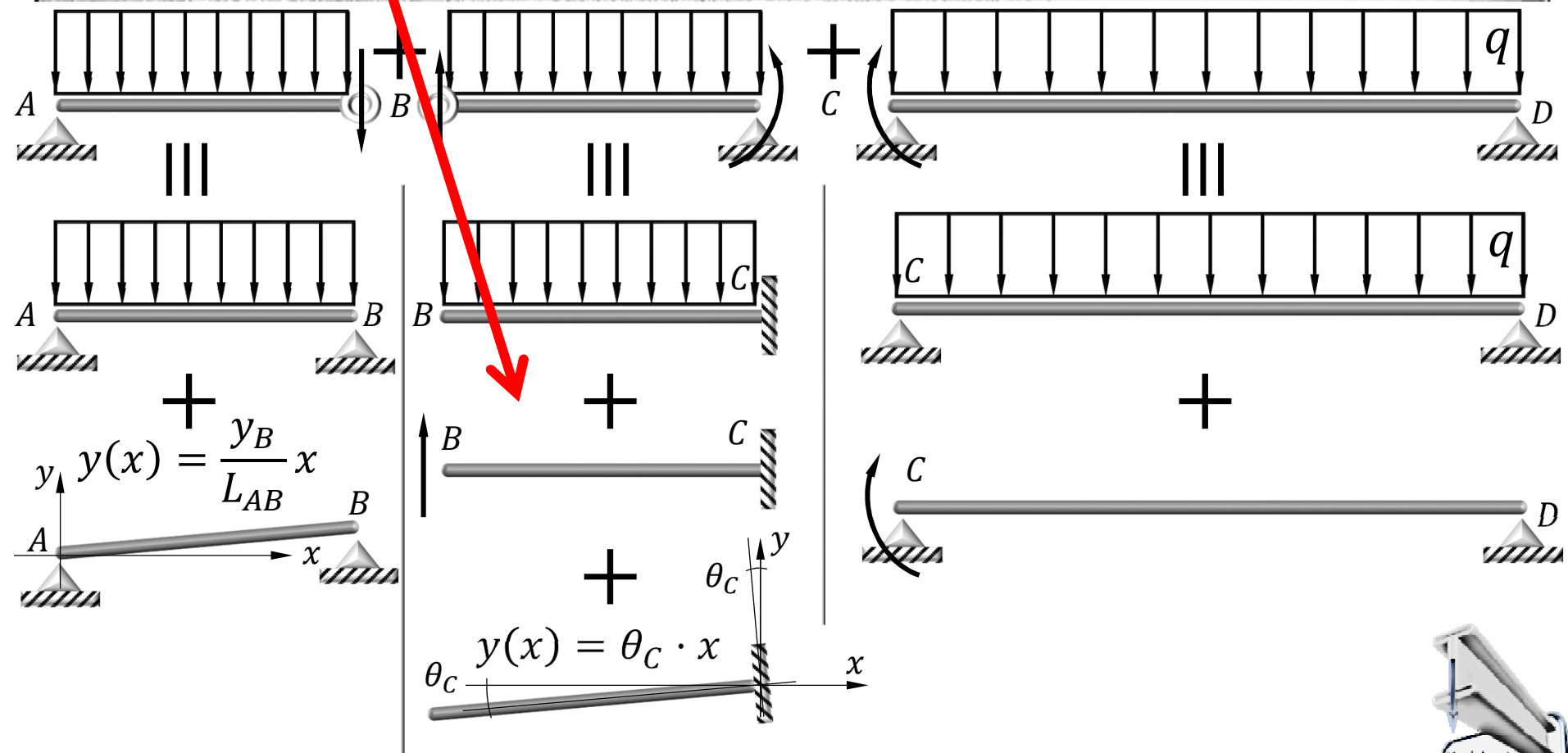
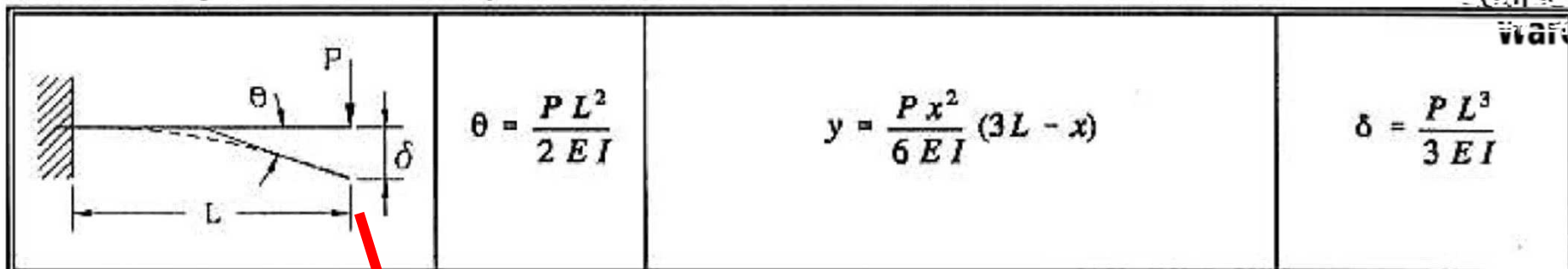
9.- Viga simplemente apoyada en los extremos - Momento M en el extremo de la derecha

	$\theta_1 = \frac{ML}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{ML}{3EI}$	$y = \frac{MLx}{6EI} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$	$\delta = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI} \quad \text{en } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ En el centro: $\delta = \frac{ML^2}{16EI}$
--	---	--	--



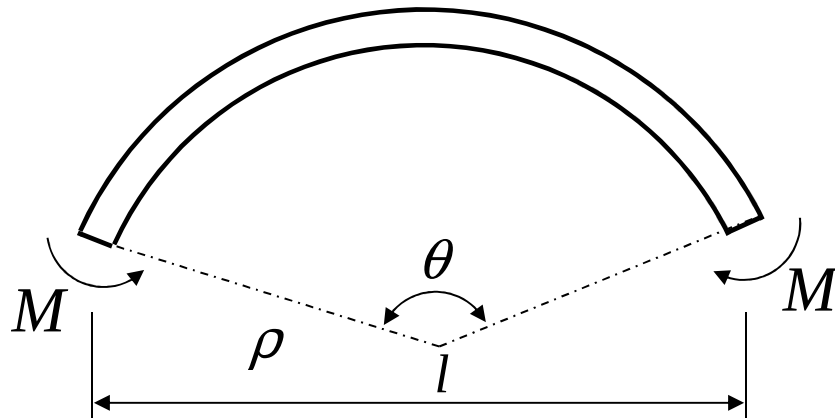
3.- Viga en voladizo - Carga uniformemente repartida de q Kg/ml.


1.- Viga en voladizo - Carga concentrada P en el extremo libre.



Flexión Pura

La deformada es un arco de circunferencia.



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \longleftrightarrow \quad l = \rho \cdot \theta$$

$$\theta = \frac{Ml}{EI}$$

Ensayo de flexión

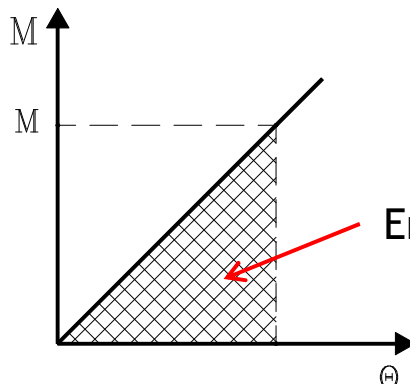


Zona elástica
($\sigma_{\max} < \sigma_e$)



Relación lineal

momento flector - rotación



Energía de deformación

$$U = \frac{M\theta}{2}$$

$$U = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{EI \theta^2}{2l}$$



Mecánica de
Medios Continuos y
Teoría de Estructuras

Flexión Simple

Deformada $\neq$ arco de circunferencia.

Energía de deformación en flexión debida a las tensiones normales

Hipótesis:

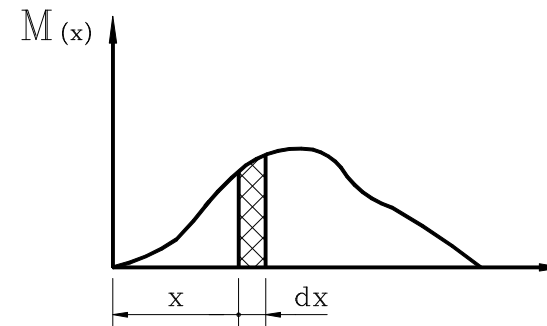
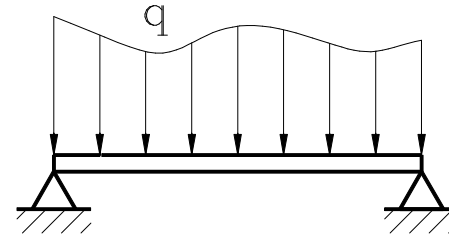
- En una rebanada de viga de longitud dx , la deformada se puede aproximar a un círculo.



M_z constante dentro de la longitud dx (pero función de x).

La energía de deformación dentro de la rebanada de longitud dx será:

$$dU = \frac{M_z^2(x) \cdot dx}{2EI}$$



e integrándola entre 0 y L:

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2(x) \cdot dx}{2EI}$$



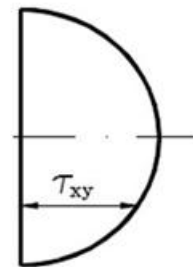
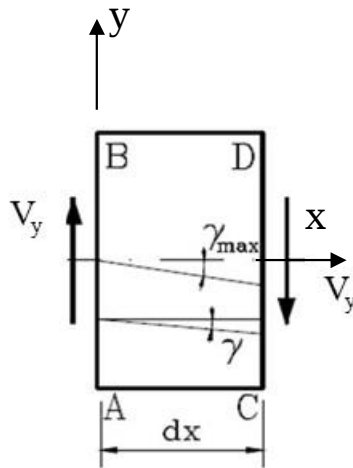
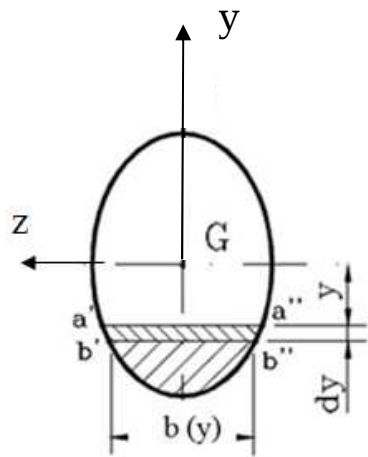
Mecánica de
Medios Continuos y
Teoría de Estructuras

Flexión Simple

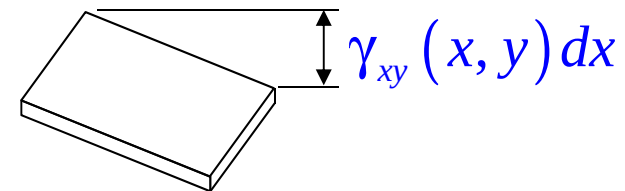
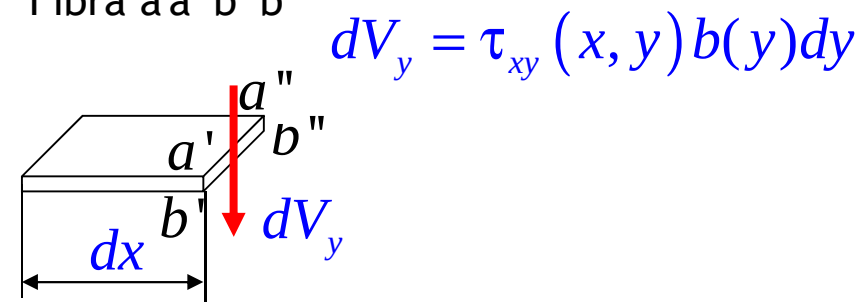
Energía de deformación en flexión debida a las tensiones de cizalladura

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{S_z(y)}{I_z b(y)} V_y(x)$$

Ley de Hooke: $\tau_{xy} = G\gamma \rightarrow \gamma = \frac{\tau_{xy}}{G}$



Fibra a'a''b''b'



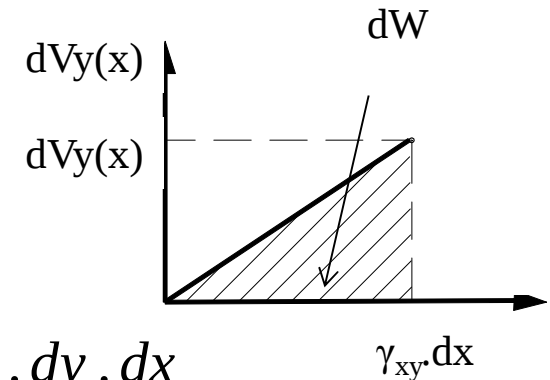
Flexión Simple

Energía de deformación en flexión debida a las tensiones de cizalladura

Trabajo elemental en la capa a'a" b" b de longitud dx, será:

$$dW = \frac{1}{2} \cdot dV_y \cdot \gamma_{xy} \cdot dx$$

$$dW = \frac{1}{2} \cdot dV_y \cdot \gamma_{xy} \cdot dx = \frac{\tau_{xy} b(y) dy}{2} \cdot \frac{\tau_{xy}}{G} \cdot dx = \frac{\tau_{xy}^2 b(y)}{2G} \cdot dy \cdot dx$$



Suponiendo que no hay ninguna pérdida de energía, dicho trabajo se convertirá en energía de deformación e Integrando en ABCD, se obtendrá la energía de deformación acumulada en el dx:

$$dU = \frac{dx}{2.G} \int_A \tau_{xy}^2 \cdot b(y) \cdot dy$$

Reemplazando el valor τ_{xy} por su valor según Colignon e integrando:

$$dU = \frac{dx}{2.G} \int_A \left(\frac{V_y \cdot S_z(y)}{I_z \cdot b(y)} \right)^2 \cdot b(y) \cdot dy = \frac{V_y^2 \cdot dx}{2.G \cdot I_z^2} \cdot \int_A \frac{S_z^2(y)}{b(y)} \cdot dy$$



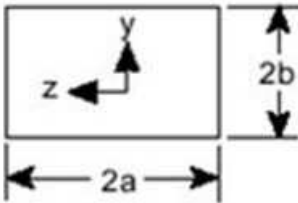
Mecánica de
Medios Continuos y
Teoría de Estructuras

Que puede escribirse de la forma:

$$dU = \frac{V_y^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot A'}$$

$$A' = \frac{I_z^2}{\int_A \frac{S_z^2(y)}{b(y)} \cdot dy}$$

A' es la SECCIÓN REDUCIDA, tiene unidades de área y que depende únicamente de las dimensiones del tipo de sección. Así para una sección circular $A'=0,9.A$ (ver tabla).

Tipo de sección	Sección reducida (A') (*)
	0,9. A
	0,5. A
	0,8333. A

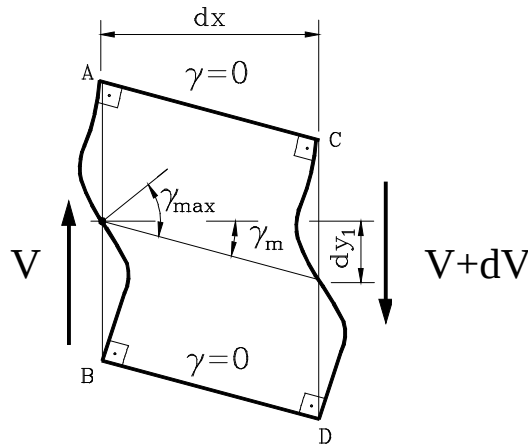


Mecánica de
Medios Continuos y
Teoría de Estructuras

Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de una viga

Según Colignon la cizalladura tiene el valor de 0 en las fibras superior e inferior y su valor es máximo a mitad de la altura.

$$\tau_{xy} = G\gamma \rightarrow \gamma = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



- La sección no puede mantenerse recta.
- $\gamma = 0$ en los extremos, $\gamma_{\max}$ en el eje neutro
- γ_m = distorsión media

$$\gamma_m = \frac{dy_1}{dx} \quad (\text{Pequeños desplazamientos})$$

Trabajo exterior de deformación de ABCD

$$dU = \frac{1}{2} V \cdot dy_1 = \frac{1}{2} V \cdot \gamma_m \cdot dx$$

Energía de deformación:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{V^2}{G \cdot A'} dx$$

$$\frac{1}{2} V \cdot \gamma_m \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{V^2}{G \cdot A'} dx$$



Mecánica de
Medios Continuos y
Teoría de Estructuras



Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de una viga

$$\gamma_m = \frac{dy_1}{dx} = \frac{V}{G.A'}$$

$$y_1 = \int_0^x \frac{V}{G.A'} dx$$

Teniendo en cuenta la relación entre el cortante y el momento flector:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$y_1 = \int_0^x \frac{dM}{G.A'}$$

y en el caso en que la sección reducida de la viga sea constante:

$$y_1 = \frac{1}{G.A'} [M_{(x)} - M_{(0)}]$$

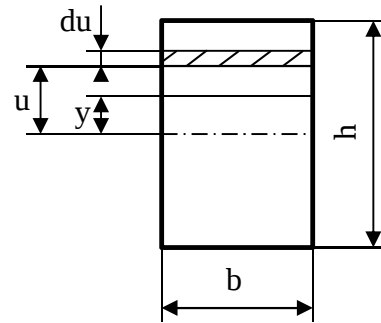
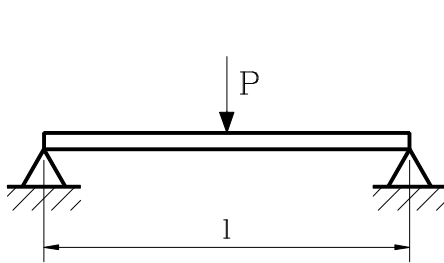
Esta deformación debería añadirse a la dada por la elástica cuando interviene sólo el momento flector. Sin embargo la deformación debida al esfuerzo cortante se suele despreciar respecto a la producida por el momento flector cuando se trata de vigas esbeltas.



Ejemplo:

Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de una viga

Calcular las flechas máximas producidas por M y V en una viga simplemente apoyada de sección rectangular sometida a una carga concentrada en su punto medio:



$$I_z = \frac{1}{12}bh^3$$

$$S_{(y)} = \int_y^{\frac{1}{2}h} b u \, du = \frac{b}{2} \frac{h^2 - y^2}{2}$$

$$\int_A \frac{S^2}{b} dy = \frac{bh^5}{120}$$

$$A' = \frac{I_z^2}{\int \frac{S^2}{b} dy}$$

$$A' = \frac{5}{6}bh$$

$$y_{\max}^M = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{PL^3}{4Eb h^3}$$

$$y_{\max}^V = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P/2}{G \frac{5}{6}bh} dx = \frac{3Pl}{10Gb h}$$

$$y_{\max} = y_{\max}^M + y_{\max}^V$$

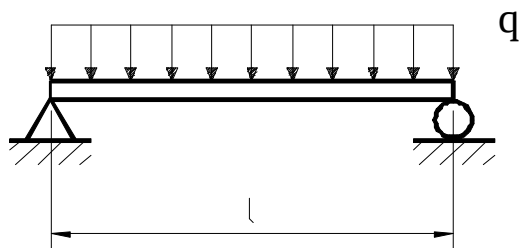
Acero $G \approx \frac{3.E}{8}$

$$\frac{y_{\max}^V}{y_{\max}^M} = 3,2 \left(\frac{h}{l} \right)^2$$



Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de una viga

Idem para el caso de una viga simplemente apoyada sometida a una fuerza distribuida normal y constante:



$$y_{\max}^M = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{32 \cdot E \cdot b \cdot h^3}$$

$$y_{\max}^V = \frac{3 \cdot q \cdot l^2}{20 \cdot G \cdot b \cdot h}$$

$$\frac{y_{\max}^V}{y_{\max}^M} = 2,56 \left(\frac{h}{l} \right)^2$$

Acero $G \approx \frac{3 \cdot E}{8}$		h/l			
		1/6	1/8	1/10	1/12
$\frac{y_{\max}^V}{y_{\max}^M} = 2,56 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \times 100$	Carga uniformemente repartida	7,11	4	2,56	1,77
$\frac{y_{\max}^V}{y_{\max}^M} = 3,2 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \times 100$	Carga puntual concentrada	8,88	5	3,2	2,22



Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de una viga

Caso de Vigas en doble T

El alma soporta prácticamente toda la deformación $y_{\max}^V \gg$

Suponiendo que el alma es de espesor constante y que el eje neutro esté trabajando al máximo de cizalladura:

$$\tau_{xy} = \tau_{adm} = \frac{R_m}{\sqrt{3}}$$

Carga uniformemente repartida

$$\frac{y_{\max}^V}{y_{\max}^M} = 1,5 \frac{h}{l}$$

Carga puntual centrada

$$\frac{y_{\max}^V}{y_{\max}^M} = 3 \frac{h}{l}$$

		h/l			
		1/8	1/10	1/12	1/20
$\frac{y_{\max}^V}{y_{\max}^M} \times 100$	Carga uniformemente repartida	18,7	15	12,5	7,5
	Carga puntual concentrada	37,5	30	25,2	15



Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de una viga

Conclusiones

- En la mayoría de los casos, las deformaciones debidas a la cizalladura son despreciables frente a las de flexión.
- Flecha debida a cizalladura aumenta proporcionalmente a h/l .
- En el caso de vigas huecas y de alma delgada y de gran altura (por ejemplo vigas en doble T), el error en el cálculo de desplazamientos comienza a ser considerable.
- En el caso de vigas sandwich en los que habitualmente el núcleo suele fabricarse de un material ligero y con un módulo de cizalladura bajo, el efecto de la cizalladura debe tomarse en cuenta ya que la flecha debida a la cizalladura puede ser incluso superior a la de la flexión.

