



Matemáticas III
Segunda prueba de Evaluación
Integración

Dispone de dos horas y media para resolver, sin ninguna ayuda el siguiente examen. Las soluciones están disponibles en hoja aparte.

Ejercicio 1 — Hallar la integral $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, siendo V el recinto limitado por los planos $z = 0$, $z = 1$, y el interior del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Ejercicio 2 — Dado el campo $F(x, y, z) = (5y + 29x, 6z + 21y^2 + 5x, 6y)$, calcular:

1. El potencial de F .
2. La integral de línea de F a lo largo de la curva $r(t) = (9 \sin^3 t, 5 \cos^6 t, 7 \sin^7 t)$, con $t \in [0, \pi/2]$.

Ejercicio 3 — Calcular la integral de línea de $F(x, y) = (e^x y^2 + 3x^2 y, 2y e^x + x^3)$ a lo largo de cualquier curva que empiece en $(0, 0)$ y termine en $(1, 1)$.

Ejercicio 4 — Calcular el flujo de $F(x, y, z) = (2x + 3z, -xz - y, y^2 + 2z)$ a través de la esfera de centro $(7, -1, 4)$ y radio 7.

Ejercicio 5 — Responder a las siguientes cuestiones:

1. Hallar la solución de la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x} - x^2 - y^2 = \frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Dada la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$, para $0 < x < a$ y $0 < y < b$, con condiciones $u(x, 0) = 0$ y $u(x, b) = \varphi(x)$, para todo $0 < x < a$, y $u_x(0, y) = 0$ y $u_x(a, y) = 0$, para todo $0 < y < b$, cuya solución viene dada por

$$u(x, y) = a_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right),$$

con

$$a_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a \varphi(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \int_0^a \varphi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx,$$

calcular su solución para $a = b = \pi$ y $\varphi(x) = 3$.