Matemáticas III
Soluciones segunda prueba de Evaluación
Integración

Debe tener en cuenta que los métodos de resolución son variados, por tanto, los ejercicios pueden estar correctamente resueltos aunque no se hagan como aquí se expone.

Solución (Ejercicio 1) — Realizando un camio a cilíndricas:

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{1} \sqrt{r^2}\cdot r\, dzdrd\theta =$$
$$= 2\,\pi \int_0^1 (1-r)\, r^2 dr = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

Solución (Ejercicio 2) —

1. $U(x,y,z) = 6\,y\,z + 7\,y^3 + 5\,x\,y + \dfrac{29\,x^2}{2} + C$ con C constante.
2. Consideramos únicamente los puntos inticial y final de la curva, $A = r(0) = (0,5,0)$ y $B = r(\pi/2) = (9,0,7)$, entonces
$$\int_C F\cdot dC = U(B) - U(A) = \frac{599}{2}$$

Solución (Ejercicio 3) — Como no nos dan la curva, pensamos que el campo puede ser conservativo, extremo que podemos comprobar:

$$\frac{\partial\left(e^x y^2 + 3x^2 y\right)}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 = \frac{\partial\left(2ye^x + x^3\right)}{\partial x}.$$

Pasamos por tanto a calcular la función potencial $U(x,y)$. Como

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial U}{\partial x} & = & e^x y^2 + 3x^2 y, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} & = & 2ye^x + x^3, \end{array}\right.$$

de la primera ecuación obtenemos que

$$U(x,y) = e^x y^2 + x^3 y + C(y),$$

y entonces la segunda nos dice que

$$2ye^x + x^3 + C'(y) = 2ye^x + x^3.$$

Por tanto, $C'(y) = 0$ y $C(y) = C$, resultando que $U(x,y) = e^x y^2 + x^3 y + C$. Y la integral de línea valdrá $U(1,1) - U(0,0) = e + 1$.

Solución (Ejercicio 4) — Usaremos el teorema de Gauss,

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dxdydz.$$

En primer lugar, la divergencia del campo F es

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial\,(3z+2x)}{\partial x} + \frac{\partial\,(-xz-y)}{\partial y} + \frac{\partial\left(2z+y^2\right)}{\partial z} = 3$$

Por tanto

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dxdydz = 3 \iiint_V dxdydz = 3\operatorname{Vol}(\mathbb{S}(7)) = 3\,\frac{4\pi 7^3}{3} = \boxed{1372\pi}$$

Solución (Ejercicio 5) —

1. Aplicamos el método de las características a la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{x^2+y^2} = dt$$

que nos como soluciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -1 \\ \dfrac{dz}{dt} = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + C_1 \\ y = C_2 - t \\ z = \dfrac{2t^3}{3} + ({C_1}^2 + {C_2}^2)t + (C_1 - C_2)t^2 + C_3 \end{cases}$$

Plantando una solución particular arbitraria como la curva $(0, s, h(s))$ para $t = 0$ tenemos $C_1 = 0$, $C_2 = s$ y $C_3 = h(s)$, es decir

$$\begin{cases} x = t \\ y = s - t \\ z = \dfrac{2t^3}{3} + s^2 t - st^2 + h(s) \end{cases}$$

y, eliminando s y t obtenemos la solución de forma explícita

$$\boxed{z\,(x,y) = \frac{2\,x^3}{3} + x\,(x+y)^2 - x^2\,(x+y) + h\,(x+y)}$$

2. Calculamos a_0 y a_n para este caso en particular:

$$a_0 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi 3\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi\operatorname{senh}(n\pi)}\int_0^\pi 3\cos(nx)\,dx.$$

El primer coeficiente vale $\dfrac{3}{\pi}$, mientras que el segundo, como $\dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ es una primitiva de $\cos(nx)$, y se anula en $n\pi$ y en 0, vale 0. Por tanto, la solución es $u(x,y) = \dfrac{3}{\pi}y$.