Matemáticas III
Tema 7
Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

Introducción

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo. Se llama **ecuación en derivadas parciales (EDP)** a aquella ecuación en la que la incógnita es un campo escalar definido en U y en la que aparecen sus derivadas parciales de cualquier orden.

En este curso estudiaremos el caso para dos variables independientes.

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0 \text{ con } (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

o, escribiendo las parciales de forma simplificada:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0 \text{ con } (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

donde F es la función que "liga" todas las funciones entre sí.

Se llama *orden de una EDP* al mayor índice de derivación parcial que aparece en la ecuación.

Nota

A veces, en las aplicaciones físicas, la variable independiente y se identifica con el tiempo y se suele representar por t.
Por ejemplo,

$$u_t = a^2\, u_{xx}$$

es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden conocida como *ecuación del calor*.

Ejemplo

Una sencilla EDP de primer orden es la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Andalucía Tech

Soluciones

Una solución de una EDP de orden k es un campo escalar $u = f(x, y)$ de clase C^k que satisface la ecuación al sustituir en ella la u y sus derivadas parciales. Encontrar las soluciones se suele llamar *integrar la ecuación*.

Observamos así que, de la misma forma que en la solución general de una EDO aparacecían constantes arbitrarias, en la solución de una EDP aparacen funciones arbitrarias. Las soluciones de una EDP se restringen con las llamadas *condiciones de contorno o de frontera o las condiciones iniciales*.

Ejemplo

Para la ecuación $u_x = 0$, la restricción $u(x, x) = x$ estable una condición de frontera sobre la bisectriz del primer y tercer cuadrante. En este caso, tenemos que la única solución de la EDP es

$$u(x, y) = y$$

Condiciones de Cauchy: que se dan generalmente en ecuaciones en derivadas parciales en las que intervienen el tiempo. Así si u y u_t son dadas para $t = 0$ se les llaman condiciones iniciales.

Condiciones de Dirichlet: en las que se buscan soluciones u en una determinada región $U \subseteq \mathbb{R}$ que verifican ciertos valores en cada punto de la frontera ∂U de la región.

Definición

Diremos que la ecuación $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0$ es **lineal** si la función F es lineal respecto de u y de todas las derivadas parciales de u que aparecen en ella.

- EDP **lineal de primer orden**:

$$A_1(x, y)u + A_2(x, y)u_x + A_3(x, y)u_y = f(x, y)$$

- EDP **lineal de segundo orden**:

$$A_1(x, y)u + A_2(x, y)u_x + A_3(x, y)u_y + A_4(x, y)u_{xx} + A_5(x, y)u_{xy} + A_6(x, y)u_{yy} = f(x, y)$$

Decimos una una EDP lineal es de *coeficientes constantes* si todos las funciones $A_i(x, y) = C_i$ son funciones constantes.

Una EDP lineal es *homogénea* si $f(x, y) = 0$.

EDPs cuasilineales

Definición

Diremos que una EDP es **cuasilineal** de primer orden si se expresa de la forma

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$$

donde los P, Q, R son campos escalares definidos en una región de $\mathbb{R}^3$.

Las *ecuaciones cuasilineales* de segundo orden son la forma:

$$P_1(x,y,u)u_x + P_2(x,y,u)u_y + P_3(x,y,u)u_{xx} + P_4(x,y,u)u_{xy} + P_5(x,y,u)u_{yy} = R(x,y,u)$$

donde los P_i son campos escalares definidos en $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Obsérvese que las EDPs lineales son un caso particular de las cuasilineales.

Algunos ejemplos clásicos de EDPs

Ecuación del transporte.

La ecuación de transporte en una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

donde u es función del tiempo t y de la posición x. Es lineal, de primer orden y homogénea.

Ecuación de propagación de la luz.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x,y,z)$$

describe la propagación de los rayos luminosos en un medio no homogéneo con índice de refracción $n(x,y,z)$. Es una ecuación de primer orden, no lineal y no homogénea con tres variables independientes.

Algunos ejemplos clásicos de EDPs

Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Es un sistema con dos ecuaciones lineales de primer orden homogéneas:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

que representan las funciones complejas $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ que son derivables en el campo complejo.

Ecuación de ondas.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

es la que satisface una función $u(x, t)$ que representa las oscilaciones de una cuerda. Es una ecuación lineal de segundo orden y homogénea.

Algunos ejemplos clásicos de EDPs

Ecuación de disipación del calor.

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

describe la evolución de la temperatura de una barra homogénea de sección constante. También es una ecuación lineal homogénea de segundo orden.

Ecuación de Laplace.

La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

satisface el potencial u del campo eléctrico en las regiones que no contienen cargas. Es otro ejemplo de ecuación lineal de segundo orden y homogénea.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2 - 1$. Una simple integración conduce a

$$u(x, y) = x^3 + 2xy^2 - x + f(y)$$

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $\frac{\partial u}{\partial y} + u = e^{xy}$.

$$u(x, y) = \frac{e^{x\,y}}{x+1} + c(x)e^{-y}.$$

Observa que la constante que aparece al resolver la EDO es una función que depende de x cuando resolvemos la EDP.

Método de separación de variables

La idea es suponer que la solución $u(x, y)$ es de la forma

$$u(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

A veces una simple sustitución conduce a dos ecuaciones diferenciales en $\phi(x)$ y en $\psi(y)$, respectivamente, que se resuelven y permiten reconstruir la solución buscada.

Ejemplo

Resolvamos la siguiente EDP con condición de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(0, y) = e^{-y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = k \Rightarrow \phi(x) = C_1 e^{kx} \\ \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = \frac{k}{2} \Rightarrow \psi(y) = C_2 e^{\frac{ky}{2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x, y) = \phi(x)\psi(y) = Ce^{k\left(x+\frac{y}{2}\right)}$$

y de la condición de Cauchy $u(x, y) = e^{-2x-y}$.

Método de las características

Para resolver una EDP cuasilineal con una EDP en dos variables

$$P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u)$$

consideremos las superficies de nivel en el espacio $z = u(x,y)$,la ecuación se puede interpretar como que el vector

$$(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \perp (u_x, u_y, -1)$$

que es el gradiente del campo $f(x,y,z) = u(x,y) - z$. Esto nos lleva a que dicho vector $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ es proporcional a los vectores tangentes a las curvas contenidas en la superficie de nivel $z = u(x,y)$, dicho de otro modo

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

El método consiste, por tanto, en determinar las curvas tangentes al campo vectorial $F = (P, Q, R)$ llamadas curvas características y encontrar el campo $u(x, y)$ que definen estas curvas.

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} = dt$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= R(x,y,z) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x(c_1, c_2, c_3, t) \\ y &= y(c_1, c_2, c_3, t) \\ z &= z(c_1, c_2, c_3, t) \end{aligned}$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes de integración.

A partir de las condiciones iniciales se puede describir una curva directriz $(f(s), g(s), h(s))$, imponiendo las condiciones iniciales $(t = 0)$

$$x(c_1, c_2, c_3, 0) = f(s)$$
$$y(c_1, c_2, c_3, 0) = g(s)$$
$$z(c_1, c_2, c_3, 0) = h(s)$$

y por eliminación de las constantes nos queda una expresión

$$x(s, t) = x$$
$$y(s, t) = y$$
$$z(s, t) = z$$

que representa la solución en forma paramétrica. Eliminando t de las dos primeras ecuaciones de x e y se obtiene $\varphi(x, y, s) = 0$, espresión de la proyección de las curvas características, y, por último, se elimina el parámetro s para obtener $z = u(x, y)$ que nos determina una forma explícita de la solución de la EDP que planteábamos.

Nota

En ocasiones a partir de la primera ecuación

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)}$$

se pueden obtener las proyecciones de las características sobre XY de la forma

$$g(x,y) = s$$

y, con la otra ecuación encontrar una expresión de $u(x,y,h(s)) = z$ que depende de x, de y y de una cierta función de s, $f(s)$, que, como hemos dicho, también dependiente de x, y.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u$ por este método.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z} = dt$$

Resolviendo obtenemos las curvas características

$$\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow x = c_1\, e^t$$
$$\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow y = c_2\, e^t$$
$$\frac{dz}{dt} = 3z \Rightarrow z = c_3\, e^{3t}$$

Planteamos la curva directriz $x = 1$, $y = s$, $z = h(s)$ y para $t = 0$ tenemos $c_1 = 1$, $c_2 = s$ y $c_3 = h(s)$. De aquí

Luego

$$\left.\begin{array}{l} x = e^t \\ y = s\, e^t \\ z = h(s)\, e^{3t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = s\, x \\ z = h(s)\, x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow z = h\left(\frac{y}{x}\right) x^3$$

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $u_x - u_y = 1$ con la condición de Cauchy $u(x,0) = \operatorname{sen} x$.

En este caso,

$$dx = -dy = dz$$

Luego las curvas características son

$$x = c_1 + t$$
$$y = c_2 - t$$
$$z = c_3 + t$$

por la condiciones iniciales planteamos la curva directriz $x = s$, $y = 0$, $z = u(x,0) = \operatorname{sen} s$, para $t = 0$, tenemos $c_1 = s$, $c_2 = 0$, $c_3 = \operatorname{sen} s$.

Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} x &= s + t \\ y &= -t \\ z &= \operatorname{sen} s + t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x + y &= s \\ z &= \operatorname{sen} s - y \end{aligned} \Rightarrow z = u(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - y$$

Ejemplo

Resolvamos el siguiente EDP con condición de Dirichlet

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy \\ u(x,y) = 0 \text{ en la circunferencia de radio 1.} \end{cases}$$

Tenemos, entonces

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy}$$

De la primera ecuación tenemos $x^2 = y^2 + s$. De la última tenemos $dz = y\,dy$, luego $z = \frac{y^2}{2} + h(s)$. Por tanto, la solución general es

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2} + h(x^2 - y^2)$$

La condición de Dirichlet: $h(1-2y^2) = -\frac{y^2}{2}$ cambiando la variable $x = 1 - 2y^2$, tenemos $h(x) = \dfrac{x-1}{4}$ y sustituyendo obtenemos la solución buscada $u(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{4}$

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Nos centraremos en las ecuaciones en derivadas parciales (lineales) de orden dos. Más concretamente, estudiaremos **la ecuación de ondas**, y **la ecuación de difusión del calor**, ecuaciones de gran importancia para la física.

El método que usaremos es el método de separación de variables. La idea de este método, como ya hemos visto anteriormente, es buscar una solución de la forma $u(x, y) = f(x)g(y)$. Distinguiremos los siguientes pasos:

PASO 1. Obtención de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

PASO 2. Hallar las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas en el PASO 1, que cumplan las condiciones de frontera.

PASO 3. Formar una apropiada combinación lineal de las soluciones halladas en el PASO 2 para que se satisfagan las condiciones iniciales del problema.

Definición

La siguiente ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0,$$

modela las vibraciones de una cuerda entre dos puntos $x = 0$ y $x = \ell$.

El movimiento se produce en el plano xy de manera que cada punto de la cuerda se mueve perpendic ularmente al eje x.

Condiciones de contorno

Condiciones de frontera $u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0$ para todo t,

Condiciones iniciales (en $t = 0$)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \text{(forma inicial de la cuerda)},$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad \text{(velocidad inicial de la cuerda)}$$

PASO 1.

Buscamos una solución de la forma $u(x,t) = f(x)g(t)$, distinta de la trivial. Al sustituir $u_{xx}(x,t) = f''(x)g(t)$, $u_{tt}(x,t) = f(x)g''(t)$ en la ecuación de ondas obtenemos

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2}g''(t)f(x),$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = -\lambda$$

siendo λ constante (con el signo menos por conveniencia).
Esta expresión se transforma en las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0,$$
$$g''(t) + c^2\lambda g(t) = 0,$$

PASO 1.

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0,$$
$$g''(t) + c^2 \lambda g(t) = 0,$$

que, imponiendo las condiciones de frontera

$$u(0, t) = f(0)g(t) = 0, \ \forall t \ \Rightarrow \ f(0) = 0,$$
$$u(\ell, t) = f(\ell)g(t) = 0, \ \forall t \ \Rightarrow \ f(\ell) = 0.$$

se transforman en

$$\begin{aligned} f''(x) + \lambda f(x) &= 0, \quad f(0) = f(\ell) = 0 \text{ y } f \neq 0 \\ g''(t) + c^2 \lambda g(t) &= 0, \quad g \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

PASO 2.

Determinemos las soluciones que satisfagan las condiciones frontera. Comenzamos por encontrar los valores del parámetro λ de forma que la ecuación

$$f'' + \lambda f = 0, \quad f(0) = f(\ell) = 0, \tag{2}$$

tenga soluciones no triviales. Por analogía con lo estudiado en el álgebra lineal, a λ lo llamaremos **autovalor**, y a las soluciones no triviales **autofunciones**. Este problema se conoce con el nombre de **problema de Sturm-Liouville.**

A continuación estudiaremos las soluciones de la anterior ecuación, según los autovalores λ:

PASO 2.

- Para $\lambda < 0$, la solución general, es de la forma

$$f(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Imponiendo las condiciones de frontera obtenemos que

$$f(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad f(\ell) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0,$$

de donde $C_1 = C_2 = 0$, y la única solución es la trivial.

- Para $\lambda = 0$, la solución general es $f(x) = C_1 x + C_2$. De nuevo, al imponer las condiciones de frontera resulta $C_1 = C_2 = 0$, que nos da como resultado la solución trivial.

PASO 2.

- Para $\lambda > 0$, la solución general es

$$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, x).$$

Imponemos las condiciones de frontera

$$f(0) = C_1 = 0, \quad f(\ell) = C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, \ell) = 0.$$

Tendremos una soluciones distintas de la trivial cuando

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, \ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, \ell = n\pi \Rightarrow \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

Por tanto, las soluciones no triviales vienen dadas por las autofunciones $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right)$, de los autovalores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$.
Haciendo $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, obtenemos las soluciones de la segunda ecuación (**??**)

$$g_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right).$$

PASO 2.

Multiplicando ambas, obtenemos soluciones de la ecuación de ondas que buscamos

$$u_n(x,\ t) = f_n(x)g_n(t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right).$$

Como la ecuación de ondas es una ecuación lineal homogénea, la siguiente combinación lineal

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\, x\right),$$

también será una solución de la ecuación de ondas que satisface las condiciones de frontera.

PASO 3.

Imponemos que la ecuación anterior cumpla las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \tag{3}$$

$$u_t(x,\, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{4}$$

Observemos que en (**??**) y (**??**) aparecen desarrollos de Fourier en senos. Por tanto, si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ admitan desarrollos de Fourier en senos, las condiciones iniciales se cumplirán si

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \Rightarrow A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\, dx,$$

y

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\ell} c B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\, dx.$$

Entre otras aplicaciones, la ecuación de ondas rige la propagación de ondas de presión (sonido) y las electromagnéticas, por lo que aparecen frecuentemente en el ámbito de las Ciencias y la Ingeniería.

Ejemplo

Vamos a resolver la siguiente ecuación de ondas.

$$
\begin{array}{lll}
u_{xx} - \dfrac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & 0 < x < \pi, & t \geq 0 \\
\text{C.f. } u(0,\, t) = 0, & u(\pi,\, t) = 0, & t \geq 0 \\
\text{C.i. } u(x,\, 0) = 0, & u_t(x,\, 0) = 2, & 0 < x < \pi
\end{array}
$$

Ejemplo

Sustituyendo $\ell = \pi$ en las expresiones obtenidas anteriormente tendremos:

$$u_n(x,\ t) = (A_n \cos(nct) + B_n \operatorname{sen}(nct)) \operatorname{sen}(nx),$$

con

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx, \text{ y } B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\pi} \psi(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

Además, como $u(x,\,0) = 0 = \varphi(x)$ y $u_t(x,\,0) = 2 = \psi(x)$ tenemos que

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = 0$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\pi} \psi(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{4}{n\pi c}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2\pi c}(-\cos(n\pi) + 1$$

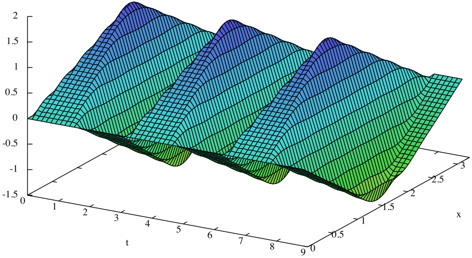
$$= \frac{4}{n^2\pi c}(-(-1)^n + 1)$$

Ejemplo

Por tanto, la solución pedida es

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nct) + B_n \operatorname{sen}(nct)) \operatorname{sen}(nx) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi c} (1 - (-1)^n) \operatorname{sen}(cnt) \operatorname{sen}(nx)$$



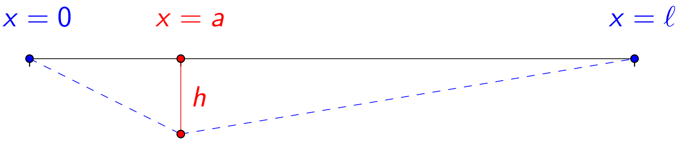
Ejemplo

Una cuerda de guitarra, de longitud ℓ, está sujeta por sus extremos. Se tañe la cuerda en $x = a$, desplazándola una distancia h. Hállese la forma de la cuerda en cualquier instante posterior al tañido.

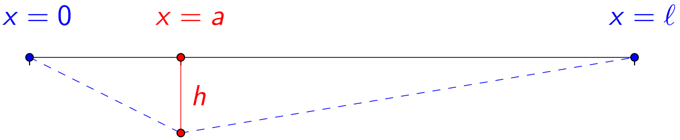
Hemos de resolver la Ecuación de ondas

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0,$$

con *velocidad inicial* $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$, y con *forma inicial de la cuerda*.



Ejemplo



Esta situación se expresa matemáticamente, diciendo que en el instante $t = 0$, la forma de la cuerda viene dada por la siguiente función

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\[2ex] \dfrac{h(\ell - x)}{\ell - a} & \text{si } a \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Ejemplo

Según lo visto antes, la solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

con

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

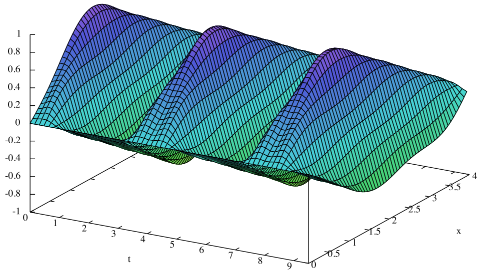
Ahora como en el caso que nos ocupa $\psi(x) = 0$, tenemos que los coeficientes B_n son todos nulos. Para los A_n tenemos

$$A_n = \frac{2h\ell^2}{a(\ell - a)\pi^2 n^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)$$

Ejemplo

Por tanto, la forma de la cuerda en el instante t viene dada por

$$u(x,\, t) = \frac{2h\ell^2}{a(\ell - a)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$



OCW UMA

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

2014.