Variables aleatorias y procesos estocásticos

Lorenzo J. Tardón
Departamento: Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Málaga. Andalucia Tech
Área de conocimiento: Teoría de la Señal y Comunicaciones
Nivel: Segundo curso de Grado en
Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

Capítulo 2

Funciones de variables aleatorias

En este capítulo se presentará un conjunto de funciones de densidad y de distribución de uso común y se introdudirá el método de análisis de las transformaciones que sufren las variables aleatorias que atraviesan un determinado sistema que realiza operaciones sobre las variables aleatorias.

2.1. Distribuciones frecuentes discretas

2.1.1. Uniforme

X es una variable aleatoria discreta uniforme definida en el conjunto de enteros $\{1, 2, \ldots N\}$, si:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{N}, \text{ con } x_i \in \{1, 2, \ldots N\} \tag{2.1}$$

$S_X = 1, 2, \ldots, N$.

$E[X] = \frac{N+1}{2}$, $\sigma_X^2 = \frac{L^2-1}{12}$.

2.1.2. Bernoulli

$S_X = \{0, 1\}$, con $P(X = 1) = p$ y $P(X = 0) = 1 - p = q$.

$E[X] = p$, $\sigma_X^2 = p(1 - p)$.

2.1.3. Binomial

Esta distribución puede verse como el resultado de la observación de múltiples (N) observaciones de experimentos tipo Bernoulli. Así, sea X la variable aleatoria que representa la observación de k *unos*, donde cada 1 se observa con probabilidad p:

$$P(X = k) = \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) p^k q^{N-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{2.2}$$

con $q = 1 - p$.

$S_X = 0, 1, 2, \ldots, N$.

$E[X] = Np$, $\sigma_X^2 = Np(1-p)$.

2.1.4. Geométrica

Corresponde a la observación del número de repeticiones independientes de un experimento de tipo Bernoulli, hasta que se obtiene el resultado esperado, que se da, en cada experimento Bernoulli, con probabilidad p:

$$P(X = k) = q^k p \tag{2.3}$$

con $q = 1 - p$.

$S_X = 0, 1, 2, \ldots, N$.

$E[X] = \frac{1-p}{p}$, $\sigma_X^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$.

2.1.5. Poisson

Una variable aleatoria discreta X es de tipo Poisson de parámetro a, con $a > 0$, si toma valores enteros positivos $k \geq 0$ con probabilidad:

$$P(X = k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!} \tag{2.4}$$

$S_X = 0, 1, 2, \ldots$.

$E[X] = a$, $\sigma_X^2 = a$.

2.2. Distribuciones frecuentes continuas

2.2.1. Uniforme

Una variable aleatoria continua X es uniforme en el intervalo $[a, b]$ si:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad resto \end{cases} \tag{2.5}$$

y

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 1 & , \quad x > b \end{cases} \tag{2.6}$$

$S_X = [a, b]$.

$E[X] = \frac{a+b}{2}$, $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

2.2.2. Exponencial

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

$S_X = [a, \infty)$.

$E[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

2.2.3. Gaussiana

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \quad -\infty < x < \infty \tag{2.9}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx = P_G\left(\frac{x-\eta_X}{\sigma_X}\right) \tag{2.10}$$

con $P_G(\cdot)$ la función de distribución de la Gaussiana estándar (es decir, con $\eta = 0$ y $\sigma = 1$).

$S_X = (-\infty, \infty)$.

$E[X] = \eta_X$, $\sigma_X^2 = \sigma_X^2$.

2.2.4. Laplaciana

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < \infty \text{ con } \lambda > 0 \tag{2.11}$$

$S_X = (-\infty, \infty)$.

$E[X] = 0$, $\sigma_X^2 = \frac{2}{\lambda^2}$.

2.2.5. Rayleigh

$$f_X(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \ 0 \leq x < \infty \text{ con } a > 0 \tag{2.12}$$

$S_X = [0, \infty)$.

$E[X] = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\sigma_X^2 = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$.

2.3. Transformaciones de variables aleatorias $Y = g(X)$

Sea $Y = g(X)$, con X una variable aleatoria y $g(\cdot)$ una función arbitraria.

2.3.1. Caso discreto

Sea X una variable aleatoria discreta.

- Si $g(x)$ es inyectiva, entonces $y_i = g(x_i)$ y por tanto $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$.
- Si $g(x)$ no es inyectiva, existirán casos en los que diferentes valores de X, digamos x_1, x_2, se mapeen en un determinado valor de Y:$y_j = g(x_i)$, con $i = \{1, 2\}$, en este ejemplo, entonces:

$$P(Y = y_j) = P((X = x_1) \cup (X = x_2)) = \tag{2.13}$$
$$P(X = x_1) + P(X = x_2) \tag{2.14}$$

2.3.2. Caso contínuo. Obtención de la función de distribución

Podemos obtener la función de distribución de la variable transformada haciendo uso de la idea expuesta anteriormente para el caso de transformaciones de variables discretas teniendo en cuenta que $F_Y(y) = P(Y \leq y)$.

Específicamente

- Si la transformación es tal que $y \geq y_{min}$, entonces $F_Y(y < y_{min}) = 0$.
- Si la transformación es tal que $y \leq y_{max}$, entonces $F_Y(y \leq y_{max}) = 1$.
- En el resto de los caso,s se trata de definir las regiones de la variable origen x tales que $Y \leq y$. Esto implica analizar cada transformación concreta.

  Para ilustrar el procedimiento, considere la transformación ilustrada en la figura 2.1.

  - Consideremos, por ejemplo el caso $Y = y_2 \in (y_{min}, y_{max})$. Entonces podemos poner:

$$F_Y(y_2) = P(Y \leq y_2) = P(X > x_2) = 1 - P(X \leq x_2) = 1 - F_X(x_2) \tag{2.15}$$

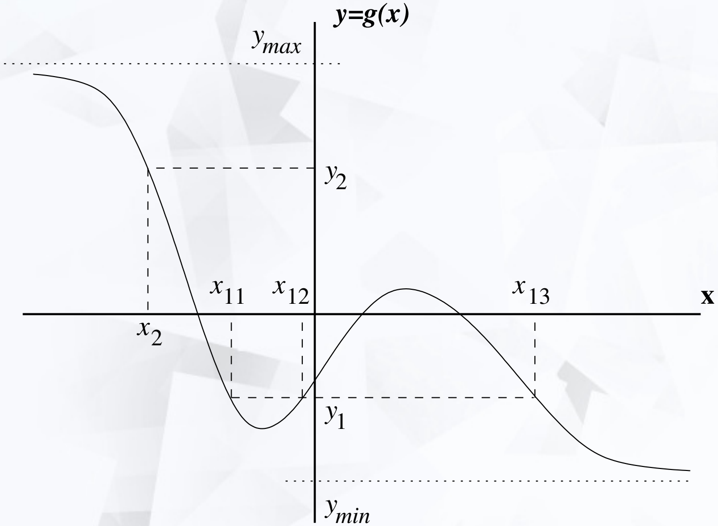

Figura 2.1: Función de transformación de una variable aleatoria X en Y: $y = g(x)$.

- Observemos también el caso $Y = y_1$. Observando la figura 2.1, podemos escribir:

$$F_Y(y_1) = P(Y \leq y_1) = P((x_{11} \leq X \leq x_{12}) \cup (X \geq x_{13}))$$
$$= P(x_{11} \leq X \leq x_{12}) + P(X \geq x_{13})$$
$$= F_X(x_{12} - F_X(x_{11}^-)) + (1 - F_X(x_{13}^-)) \quad (2.16)$$

Y si X es una variable aleatoria continua:

$$F_Y(y_1) = F_X(x_{12}) - F_X(x_{11}) + (1 - F_X(x_{13})) \tag{2.17}$$

Ejemplo: Sea X una va continua con función de distribución $F_X(x)$ y sea la transformación $Y = X^2$. Entonces

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ = P((-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) \cup (X = -\sqrt{y})) \\ = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) + P(X = -\sqrt{y}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Y la función de densidad de probabilidad quedará:

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{d\,y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) \tag{2.19}$$

Aplicación.
Generación de variables aleatorias.

Sea X una va continua con función de distribución $F_X(x)$ y sea la transformación

$$Y = F_X(X) \tag{2.20}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(x) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) \\ = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(y)} f_X(x) d\,x = F_X(F_X^{-1}(y)) = y & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & , \quad y > 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Es decir, la variable aleatoria $Y = F_X(x)$ es una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$.
Así, dada una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$, la transformación

$$X = F_X^{-1}(Y) \tag{2.22}$$

genera una variable aleatoria X con función de distribución $F_X(x)$.

2.3.3. Caso general. Teorema fundamental para la obtención de la función de densidad de probabilidad

Sea X una va con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y sea $y = g(x)$, con $g(x)$ una función derivable con n raices reales: $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Entonces,

$$P(y < Y \leq y + d\,y) = f_Y(y)|d\,y| = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i)|d\,x_i| \tag{2.23}$$

Y dividiendo por $d\,y$:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) \left|\frac{d\,x}{d\,y}\right|_{x=x_i} = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) \left|\frac{d\,y}{d\,x}\right|_{x=x_i}^{-1} =$$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x)_{x=x_i}|} \tag{2.24}$$

Ejemplo: Sea X una va continua con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y sea la transformación $Y = X^2$.
Si $y > 0$, la transformación tiene dos raíces reales:

$$x_1 = \sqrt{y}, \;\; x_2 = -\sqrt{y} \tag{2.25}$$

Y la aplicación del teorema fundamental no lleva a:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \;\; y \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) & , \;\; y > 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

2.4. Suma de dos variables aleatorias independientes

Sean X y Y dos variables aleatorias y sea $Z = X + Y$. Se puede demostrar que entonces:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y,y)d\,y \tag{2.27}$$

Si, además, X e Y son *independientes*, entonces se puede poner:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)d\,y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)d\,x \tag{2.28}$$

Expresiones que se corresponden con la convolución de las funciones de densidad de X e Y:

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y) \tag{2.29}$$

2.5. Transformaciones de dos variables aleatorias $Z = g(X,Y)$, $W = h(X,Y)$

Sean X e Y dos variables aleatorias, con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$, que se transforman en otras dos Z y W de acuerdo con:

$$Z = g(X,Y) \tag{2.30}$$
$$W = h(X,Y) \tag{2.31}$$

Entonces, de forma similar al caso unidimensional, podemos poner:

$$F_{ZW}(z,w) = P(Z \leq z, W \leq w) \iint_{D_{zw}} f_{XY}(x,y)d\,x\,d\,y \tag{2.32}$$

Donde D_{zw} es el lugar geométrico de los puntos del plano (X,Y) que se transforman en los puntos del plano (Z,W) correspondientes al suceso (z,w), cuya probabilidad queremos calcular:

$$D_{zw} = \{(x,y)\,/\,(g(x,y) \leq z,\ h(x,y) \leq w)\} \tag{2.33}$$

2.5.1. Teorema fundamental

Sean (x_i, y_i), con $i = \{1, \ldots, n\}$ las raíces de la transformación mostrada en la ecuación (2.31), entonces, se puede demostrar que:

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{f_{XY}(x,y)}{|J|} \right|_{(x_i,y_i)} \tag{2.34}$$

Con J el Jacobiano de la transformación:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{2.35}$$

Variables aleatorias
y
procesos estocásticos

Lorenzo J. Tardón
Departamento: Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Málaga. Andalucia Tech
Área de conocimiento: Teoría de la Señal y Comunicaciones
Nivel: Segundo curso de Grado en
Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación