Variables aleatorias
y
procesos estocásticos

Lorenzo J. Tardón
Departamento: Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Málaga. Andalucia Tech
Área de conocimiento: Teoría de la Señal y Comunicaciones
Nivel: Segundo curso de Grado en
Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación

Capítulo 3

Procesos estocásticos

Un proceso estocástico $X(t, \xi)$ es una función que asocia una señal (o secuencia) a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

- Considerando una observación (ξ fijo), observaremos una *función muestra* (determinista) del proceso estocástico.
- Considerando un instante concreto (t fijo), observaremos una variable aleatoria.

- Considerando una observación (ξ fijo), y un instante concreto (t fijo), observaremos una realización de una variable aleatoria (número).

Por simplicidad en la notación, se suele omitir el símbolo ξ, representándose habitualmente el proceso estocástico como $X(t)$.

3.1. Funciones de densidad y distribución de procesos estocásticos

Puesto que un proceso estocástico se puede ver como una colección de variables aleatorias indexadas por t, podemos hablar también de funciones de densidad y distribución.

- Se define la función de distribución de probabilidad de primer orden del proceso $X(t)$ como:

$$F_X(x;t) = P(X(t) \leq x) \tag{3.1}$$

  Esta función se denomina de primer orden porque involucra únicamente la observación del proceso en un instante t.

- Se define la función de densidad de probabilidad de primer orden del proceso $X(t)$ como:

$$f_X(x;t) = \frac{d\,F_X(x;t)}{d\,x} \tag{3.2}$$

Observando el proceso en dos o más instantes, podemos definir funciones de densidad y distribución de órdenes superiores, de forma similar a como se definen las funciones de densidad y distribución de variables aleatorias multidimensionales:

- Función de distribución de segundo orden:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x1, X(t_2) \leq x_2) \tag{3.3}$$

- Función de densidad de segundo orden:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{3.4}$$

- Funciones marginales:

$$F_X(x_1; t_1) = F_X(x_1, \infty; t_1, t_2) \tag{3.5}$$

$$f_X(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) d\, x_2 \tag{3.6}$$

Y observando dos o más procesos, podemos definir funciones conjuntas. Por ejemplo:

$$f_{XY}(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M; t_1, \ldots, t_N, t'_1, \ldots, t'_M) \tag{3.7}$$

3.2. Caracterización parcial de procesos estocásticos

- Media:
$$\eta_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t) d\,x \tag{3.8}$$

- Valor cuadrático medio:
$$VCM_X(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x;t) d\,x \tag{3.9}$$

- Varianza:
$$\sigma_X^2(t) = E[(X(t) - \eta_X(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta_X(t))^2 f_X(x;t) d\,x \tag{3.10}$$

- Autocorrelación:
$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) d\,x_1\, d\,x_2 \tag{3.11}$$

Hay que observar que $R_X(t,t) = E[X^2(t)] = VCM_X(t)$.

- Autocovarianza:

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1,t_2) &= E[(X(t_1)-\eta_X(t_1))(X(t_2)-\eta_X(t_2))] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\eta_X(t_1))(x_2-\eta_X(t_2))f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)d\,x_1\,d\,x_2 \\
&= R_X(t_1,t_2)-\eta_X(t_1)\eta_X(t_2) \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

  Obsérvese que $C_X(t,t)=\sigma_X^2(t)$.

- Coeficiente de correlación entre $X(t_1)$ y $X(t_2)$:

$$r_X(t_1,t_2)=\frac{C_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \qquad (3.13)$$

En el caso de procesos complejos debemos hacer uso del conjugado:

- Varianza:

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2(t) &= E[(X(t)-\eta_X(t))(X(t)-\eta_X(t))^*] = E[|X(t)-\eta_X(t)|^2] \\
&= E[|X(t)|^2-|\eta_X(t)|^2] \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

- Autocorrelación:

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X^*(t_2)] \qquad (3.15)$$

En caso de que el índice t sea discreto ($t = n, n \in Z$), diremos que tratamos con una secuencia aleatoria. Las definiciones se mantiene totalmente análogas a las anteriores, salvo por la utilización de un índice discreto:

- Media:

$$\eta_X(n) = E[X(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;n) d\, x \tag{3.16}$$

- Valor cuadrático medio:

$$VCM_X(n) = E[X^2(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x;n) d\, x \tag{3.17}$$

- Varianza:

$$\sigma_X^2(n) = E[(X(n) - \eta_X(n))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta_X(n))^2 f_X(x;n) d\, x \tag{3.18}$$

- Autocorrelación:

$$R_X(n_1, n_2) = E[X(n_1)X(n_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; n_1, n_2) d\, x_1\, d\, x_2 \tag{3.19}$$

Hay que observar que $R_X(n,n) = E[X^2(n)] = VCM_X(n)$.

- Autocovarianza:

$$\begin{aligned} C_X(n_1, n_2) &= E[(X(n_1) - \eta_X(n_1))(X(n_2) - \eta_X(n_2))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - \eta_X(n_1))(x_2 - \eta_X(n_2))f_X(x_1, x_2; n_1, n_2)d\,x_1\,d\,x_2 \\ &= R_X(n_1, n_2) - \eta_X(n_1)\eta_X(n_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

  Obsérvese que $C_X(n, n) = \sigma_X^2(n)$.

- Coeficiente de correlación entre $X(n_1)$ y $X(n_2)$:

$$r_X(n_1, n_2) = \frac{C_X(n_1, n_2)}{\sigma_X(n_1)\sigma_X(n_2)} \quad (3.21)$$

3.3. Estacionariedad y ergodicidad

Con frecuencia, ciertas propiedades de la naturaleza aleatoria de los procesos estocásticos no varía con el tiempo. Hablamos entonces de estacionariedad, pero debemos definir este concepto con precisión:

- Estacionariedad en sentido estricto. Un proceso estocástico $X(t)$ es estacionario en sentido estricto si su función de densidad de probabilidad de orden N ($\forall\, N$) es invariante ante desplazamientos del origen de tiempos:

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) \\ = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta, \ldots, t_N + \Delta), \ \forall \Delta \quad (3.22)$$

Como casos de especial interés se consideran lo de estacionariedad en sentido estricto de orden 1:

$$f_X(x; t) = F_X(x) \quad (3.23)$$

y orden 2:

$$f_X(x; t) = F_X(x) \quad (3.24)$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 - t_2) = \quad (3.25)$$

Las definiciones anteriores se pueden extender al caso de dos procesos. En ese caso se puede hablar de estacionariedad conjunta si los procesos son estacionarios separadamente y las funciones conjuntas cumplen, también, las condiciones de estacionariedad (de orden 2, al menos).

- Estacionariedad en sentido amplio (**WSS**). Se dice que un proceso estocástico $X(t)$ es estacionario en sentido amplio si:

$$E[X(t)] = \eta_X(t) = \eta_X \tag{3.26}$$
$$R_X(t_1, t_2) R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) \tag{3.27}$$

  Para el caso de dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$, se dice que son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si solo son marginalmente y además:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2) = R_{XY}(\tau) \tag{3.28}$$

  En general, para procesos WSS se considerarán las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X^*(t)] \\
C_X(\tau) &= E[(X(t+\tau) - \eta_X)(X(t) - \eta_X)^*] = R_X(\tau) - |\eta_X|^2 \\
R_{XY}(\tau) &= E[X(t+\tau)Y^*(t)] \\
C_{XY}(\tau) &= E[(X(t+\tau) - \eta_X)(Y(t) - \eta_Y)^*] = R_{XY}(\tau) - \eta_X \eta_Y^*
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Se dice que un proceso (estacionario) es ergódico cuando podemos las esperanzas matemáticas mediante el cálculo de promedios temporales en las funciones muestra.

Sea una función $g(x)$, podemos definir el promedio temporal para la función $g(x)$ sobre la función muestra $\xi = \omega_i$ de la siguiente forma:

$$\langle g(x)\rangle_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x(t,\omega_i))d\,t \tag{3.30}$$

Si $\langle g(x)\rangle_i = E[g(X(t))]$, entonces decimos que el proceso estacionario es ergódico. Entonces podemos calcular (o estimar) los momentos del proceso realizando promedios temporales a partir de una realización (función muestra) del proceso estocástico:

- Media.

$$M_T = M_T[X] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)d\,t \to \eta_X \tag{3.31}$$

  Obsérvese que M_T resulta de realizar un operación sobre variables aleatorias y por tanto M_T tiene un comportamiento aleatorio, dicho comportamiento es tal que $E[M_T] = \eta_X$ y si varianza disminuye a medida que aumenta T.

- Autocorrelación.

$$A_T(\tau) = M_T[X(t+\tau)X^*(y)] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)X^*(t)d\,t \tag{3.32}$$

  Se verifica que $\lim_{T\to\infty} A_T(\tau) = R_X(\tau),\ \forall\tau$.

3.4. Densidad espectral de potencia

La densidad espectral de potencia nos da una caracterización en frecuencia de los procesos estocásticos estacionarios. Ésta viene dada por:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\,\tau \tag{3.33}$$

y por tanto:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\,\omega \tag{3.34}$$

O también:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\,\tau \tag{3.35}$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)e^{j2\pi f\tau}d\,f \tag{3.36}$$

Propiedades:

- $S_X(\omega)$ es real.
- $S_X(\omega) \geq 0$, $\forall\omega$.

- Si $X(t)$ es real: $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$.
- $P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\,\omega = R_X(0) = E[X^2(t)]$.

Se define la densidad espectral de potencia cruzada de los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ haciendo uso de la función de correlación cruzada:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y^*(t)] \tag{3.37}$$

Entonces:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\,\tau \tag{3.38}$$

y

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau}d\,\omega \tag{3.39}$$

Ahora, considere un intervalo de observación $(0,T)$ de una función muestra del proceso estocástico $X(t)$ y obtengamos la transformada de Fourier de dicho intervalo:

$$\tilde{x}(f) = \int_0^T x(t)e^{-j2\pi ft}d\,t \tag{3.40}$$

entonces:

$$\tilde{p}_T(f) = \frac{1}{T}|\tilde{x}(f)|^2 \tag{3.41}$$

se denomina *periodograma* y es una estimación de la densidad espectral de potencia del proceso.

3.5. Sistemas lineales y procesos estocásticos

Consideramos ahora un proceso estocástico $X(t)$ que atraviesa un sistema lineal e invariane con el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$. A la salida del sistema obtendremos otro proceso estocástico $Y(t)$ obtenido a través de la operación de convolución:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{3.42}$$

3.5.1. Caracterización parcial

Podemos obtener una caracterización parcial, suficiente en muchos casos, del proceso estocástico $Y(t)$, haciendo uso del operador esperanza matemática y de la densidad espectral de potencia.

- Media.

$$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)h(\tau)d\tau\right] \quad (3.43)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau \quad (3.44)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\eta_X(t-\tau)d\tau \quad (3.45)$$

Y si el proceso $X(t)$ es estacionario en sentido amplio (WSS):

$$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = \eta_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = \eta_X H(\omega = 0) \quad (3.46)$$

donde $H(\omega = 0)$ es la respuesta en frecuencia del sistema lineal en el origen de frecuencias $\omega = 0$.

- Valor cuadrático medio:

$$E[|Y(t)|^2] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau_2)X^*(t-\tau_2)d\tau_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-\tau_1)X^*(t-\tau_2)]h(\tau_1)h^*(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.47)$$

y si $X(t)$ es WSS:

$$E[|Y(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau_2 - \tau_1)h(\tau_1)h^*(\tau_2)d\,\tau_1 d\,\tau_2 \tag{3.48}$$

- Correlación cruzada (procesos WSS):

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)] = E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} X^*(t_2-\alpha)h^*(\alpha)d\,\alpha\right] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)E[X(t_1)X^*(t_2-\alpha)]d\,\alpha \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)R_X(t_1-t_2+\alpha) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)R_X(\tau+\alpha) \\ = R_{Xy}(\tau) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Donde ha aparecido el operador convolución:

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau) \tag{3.50}$$

- Autocorrelación del proceso de salida (WSS):

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= h(\tau) * R_{XY}(\tau) && (3.51) \\ &= h(\tau) * h^*(-\tau) * R_X(\tau) && (3.52) \end{aligned}$$

3.5.2. Densidad espectral de potencia

A partir de los resultados anteriores, podemos determinar fácilmente la densiad espectral de potencia:

- $S_{XY}(\omega) = S_X(\omega)H^*(\omega)$.
- $S_Y(\omega) = S_X(\omega)H^*(\omega)H(\omega) = S_X(\omega)|H(\omega)|^2$.

3.6. Ruido blanco

Un proceso se denomina de ruido blanco si cumple unas determinadas condiciones.

- Ruido blanco en sentido amplio.

$$C_X(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_1 - t_2) \tag{3.53}$$

- Ruido blanco en sentido estricto.

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N) = \prod_{i=1}^{N} f_X(x_i; t_i) \tag{3.54}$$

En la práctica se utiliza habitualmente la definición de ruido blanco en sentido amplio.

Considerando un proceso estocástico estacionario de ruido blanco de media nula $W(t)$, entonces, se suele escribir:

$$R_W(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \tag{3.55}$$

y su densidad espectral de potencia será:

$$S_W(f) = \frac{N_0}{2} \tag{3.56}$$

Si filtramos dicho proceso a través de un sistema lineal e invariante que implementa un filtro paso bajo ideal de amplitud 1 y ancho de banda B, podemos obtener la potencia media de ruido a la salida del fitro:

$$E[Y^2(t)] = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} d\,f = N_0 B \tag{3.57}$$

La autocorrelación del proceso de salida será:

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} N_0 \int_{-B}^{B} e^{j2\pi f\tau} d\,f = \frac{N_0 \sin(2\pi B\tau)}{2\pi\tau} \tag{3.58}$$

Y la densidad espectral de potencia a la salida:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 \frac{N_0}{2} \tag{3.59}$$

Variables aleatorias
y
procesos estocásticos

Lorenzo J. Tardón
Departamento: Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Málaga. Andalucia Tech
Área de conocimiento: Teoría de la Señal y Comunicaciones
Nivel: Segundo curso de Grado en
Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación