ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES.
FORMULARIO CURSO 2011/2012

Este formulario, sin anotaciones de ningún tipo, es el único que podría ser usado durante la realización de los exámenes de la asignatura si el profesorado lo considera pertinente.

ELASTICIDAD EN COORDENADAS CARTESIANAS

● EQUILIBRIO INTERNO:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}+\mathrm{X}=0;\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+\mathrm{Y}=0;\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z}+\mathrm{Z}=0$$

● EQUILIBRIO EN EL CONTORNO: $\vec{\sigma}=\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}$

● RELACIONES CINEMÁTICAS (TENSOR DE DEFORMACIÓNES):

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);\ \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right);\ \varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\gamma_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

● COMPATIBILIDAD EN DEFORMACIONES:

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2};$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right];\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\gamma_{yx}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right];\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right]$$

● COMPORTAMIENTO (HOOKE)

$$\varepsilon_x=\frac{1}{\mathrm{E}}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right];\ \varepsilon_y=\frac{1}{\mathrm{E}}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right];\ \varepsilon_z=\frac{1}{\mathrm{E}}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{\mathrm{G}};\ \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{\mathrm{G}};\ \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{\mathrm{G}}$$

● COMPORTAMIENTO (LAMÉ)

$$\sigma_x=2\mathrm{G}\varepsilon_x+\lambda e;\ \sigma_y=2\mathrm{G}\varepsilon_y+\lambda e;\ \sigma_z=2\mathrm{G}\varepsilon_z+\lambda e;\ \ \tau_{xy}=\mathrm{G}\gamma_{xy};\ \tau_{yz}=\mathrm{G}\gamma_{yz};\ \tau_{zx}=\mathrm{G}\,\gamma_{zx}\ \ e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

● RELACIÓN ENTRE CONSTANTES: $\mathrm{G}=\dfrac{\mathrm{E}}{2\left(1+\nu\right)};\ \lambda=\dfrac{\mathrm{E}\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}$

● INVARIANTES (TENSIONES)

$$\mathrm{I}_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}};\ \mathrm{I}_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2=\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}}+\sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{I}_3=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix}=\sigma_{\mathrm{I}}\ \sigma_{\mathrm{II}}\ \sigma_{\mathrm{III}}$$

● INVARIANTES (DEFORMACIONES)

$$\mathrm{J}_1=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_{\mathrm{I}}+\varepsilon_{\mathrm{II}}+\varepsilon_{\mathrm{III}};\ \mathrm{J}_2=\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x-\frac{1}{4}\gamma_{xy}^2-\frac{1}{4}\gamma_{yz}^2-\frac{1}{4}\gamma_{zx}^2=\varepsilon_{\mathrm{I}}\varepsilon_{\mathrm{II}}+\varepsilon_{\mathrm{II}}\varepsilon_{\mathrm{III}}+\varepsilon_{\mathrm{III}}\varepsilon_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{J}_3=\begin{vmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z\end{vmatrix}=\varepsilon_{\mathrm{I}}\ \varepsilon_{\mathrm{II}}\ \varepsilon_{\mathrm{III}}$$

● TENSIONES OCTAÉDRICAS: $\sigma_{oct}=\dfrac{\mathrm{I}_1}{3};\ \tau_{oct}=\sqrt{\dfrac{2}{9}\mathrm{I}_1^2-\dfrac{2}{3}\mathrm{I}_2}$

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES. FORMULARIO CURSO 2011/2012

Este formulario, sin anotaciones de ningún tipo, es el único que podría ser usado durante la realización de los exámenes de la asignatura si el profesorado lo considera pertinente.

- ENERGÍA DE DEFORMACIÓN (POR UNIDAD DE VOLUMEN):

$$U=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}\right)$$

- CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN:

RANKINE: $\sigma_{eq}=\operatorname{Max}\left\{|\sigma_I|,|\sigma_{II}|,|\sigma_{III}|\right\}$

SAINT-VENANT: $\sigma_{eq}=\operatorname{Max}\begin{cases}\left|\sigma_I-\nu\left(\sigma_{II}+\sigma_{III}\right)\right|\\ \left|\sigma_{II}-\nu\left(\sigma_I+\sigma_{III}\right)\right|\\ \left|\sigma_{III}-\nu\left(\sigma_{II}+\sigma_I\right)\right|\end{cases}$

TRESCKA: $\sigma_{eq}=\sigma_I-\sigma_{III}$

BELTRAMI: $\sigma_{eq}=\sqrt{\sigma_I^2+\sigma_{II}^2+\sigma_{III}^2-2\nu\left(\sigma_I\sigma_{II}+\sigma_I\sigma_{III}+\sigma_{II}\sigma_{III}\right)}$

VON-MISES:

$$\sigma_{eq}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_I-\sigma_{II}\right)^2+\left(\sigma_I-\sigma_{III}\right)^2+\left(\sigma_{II}-\sigma_{III}\right)^2\right]}=$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_x-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)\right]}$$

MOHR: $\sigma_{eq}=\sigma_I-k\sigma_{III}\,;\;k=\left|\frac{\sigma_{RT}}{\sigma_{RC}}\right|$

ELASTICIDAD PLANA

$$\sigma_I=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\;;\;\sigma_{II}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_n=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right)\cdot\cos 2\theta\;;\;\tau=\left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right)\cdot\operatorname{sen}2\theta$$

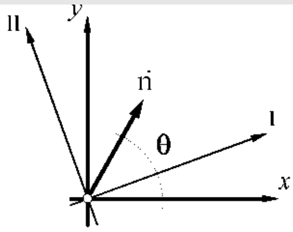

Fig 1: Direcciones x, y, principales y normal genérica

RESISTENCIA DE MATERIALES

TENSIONES NORMALES EN LA SECCIÓN (EN VALOR ABSOLUTO)

$$\sigma_x=\frac{M_Z\,.y}{I_z}$$

TEOREMA DE COLIGNON-JOURAVSKI (TENSIÓN EN VALOR ABSOLUTO)

$$\tau_{xy}=\frac{S_z(y)}{I_z\,b(y)}V_y$$

- ECUACION DIFERENCIAL DE LA ELÁSTICA: $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}=\dfrac{M_z(x)}{EI_z}$

- FLUJO DE CORTANTE EN LA SECCIÓN (ABIERTA): $q_{sx}(s)=\tau_{sx}(s)e(s)=\dfrac{V_yS_z(s)}{I_z}$

- TENSIONES TANGENCIALES PARA TORSIÓN CIRCULAR: $\tau_{xr}(x,r)=\dfrac{M_x(x)}{I_p}r$

- TORSIÓN EN PERFILES ABIERTOS DE PARED DELGADA:

TENSIONES TANGENCIALES EN LA SECCIÓN:

$$\tau_{xs}^i=\frac{3e_i}{\sum_{i=1}^{i=n}S_i\,e_i^3}M_t$$

n ES EL NÚMERO DE RAMIFICACIONES

ÁNGULO UNITARIO DE TORSIÓN:

$$\theta_x=\frac{3}{G\sum_{i=1}^{i=n}S_i\,e_i^3}M_t$$

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES.
FORMULARIO CURSO 2011/2012

Este formulario, sin anotaciones de ningún tipo, es el único que podría ser usado durante la realización de los exámenes de la asignatura si el profesorado lo considera pertinente.

● TORSIÓN EN PERFILES CERRADOS DE PARED DELGADA:

FLUJO DE TENSIONES EN LA SECCIÓN:

$$q_s = \frac{M_t}{2A^*}$$

ÁNGULO UNITARIO DE TORSIÓN:

$$\theta_x = \frac{M_t}{G\,I_t} \quad \text{CON} \quad I_t = \frac{4A^{*2}}{\oint \frac{1}{e(s)} ds}$$

● TENSIÓN EQUIVALENTE DE VON MISES: $\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

● TEOREMA DE TRABAJOS VIRTUALES: $\sum(F.\delta + M.\theta) = \int_0^L \frac{N^r N^v}{EA} dx + \int_0^L \frac{M^r M^v}{EI} dx + \int_0^L \frac{M_t^r M_t^v}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{V^r V^v}{GI} \chi dx$

DONDE r ES EL ESTADO REAL Y v ES EL ESTADO VIRTUAL

● TENSIÓN CRÍTICA DE EULER:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \left(\frac{\pi}{\beta L}\right)^2 \frac{EI}{A} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E$$

β =0.5 E-E; β =0.7 E-A; β =1 A-A; BIARTICULADA; β =2 E-L;

● RAÍCES DEL POLINOMIO DE TERCER GRADO: $\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda^1 - I_3 = 0$

$$p = I_2 - \frac{1}{3} I_1^2 \qquad q = \frac{1}{3} I_1 I_2 - \frac{2}{27} I_1^3 - I_3 \qquad \theta = \arccos\left(-\frac{q}{2\sqrt{-p^3/27}}\right)$$

SI $P=0$:

$$\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III} = (I_3)^{1/3}$$

SI $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0$

$$\lambda_I = \frac{I_1}{3} + 2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\sqrt{-p/3}$$

$$\lambda_{II} = \frac{I_1}{3} + 2\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right)\sqrt{-p/3}$$

$$\lambda_{III} = \frac{I_1}{3} + 2\cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right)\sqrt{-p/3}$$