I.2
ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Índice del capítulo.

A. Castellón

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

En este capítulo se resumirán los rudimentos de álgebra lineal necesarios para el desarrollo del curso. Apenas si se incluirán demostraciones pues la exposición se enfocará a modo de recordatorio y con el fin de respetar el carácter autocontenido del texto. Eso sí, como punto de partida se supondrá al lector familiarizado con conceptos básicos tales como espacio vectorial, dependencia e independencia lineal, subespacios, bases y coordenadas, así como todo lo relacionado con la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales: teorema de Rouché-Fröbenius, sistemas homogéneos, métodos de Gauss y de Cramer, cálculo matricial y teoría de determinantes.

§1 Espacios vectoriales

En general, los cuerpos serán conmutativos y los espacios vectoriales sobre ellos, de dimensión finita. A los escalares se les denotará por letras griegas y a los vectores por latinas minúsculas. Por $< u_1, u_2, \dots, u_k >$ se entenderá el *subespacio engendrado por los vectores* $u_1, u_2, \dots, u_k$, esto es, el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores u_1, $u_2, \dots, u_k$.

§1 Ecuaciones de un subespacio

A continuación se recordarán los distintos modos de determinar un subespacio. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo K y supongamos que S es el subespacio $< u_1, u_2, \dots, u_k >$ con $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores. Entonces cada vector v de S se expresa como

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k,$$

para ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. A la expresión anterior se le denomina *ecuación vectorial* de S. Su interpretación se basa en que variando los escalares por el cuerpo de todas las formas posibles se obtiene la totalidad de los vectores del subespacio. Fíjese ahora una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ en V. Cada u_i ($i \in \{1, \ldots, k\}$) poseerá unas coordenadas $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ respecto de dicha base. Esto no significa otra cosa que

$$u_i = \alpha_{i1}e_1 + \alpha_{i2}e_2 + \ldots + \alpha_{in}e_n.$$

Si v es un vector del subespacio S de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sustituyendo en la ecuación vectorial y aplicando el principio de unicidad de la expresión de un vector en una base, se deducen las siguientes n igualdades

$$\begin{cases} x_1 = & \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \ldots + \lambda_k\alpha_{k1}, \\ x_2 = & \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_k\alpha_{k2}, \\ \vdots & \\ x_n = & \lambda_1\alpha_{1n} + \lambda_2\alpha_{2n} + \ldots + \lambda_k\alpha_{kn}, \end{cases}$$

conocidas como *ecuaciones paramétricas* de S. También se interpretan de forma similar a la ecuación vectorial: haciendo tomar a los parámetros λ_i ($i \in \{1, \ldots, k\}$) todos los valores del cuerpo, se generan las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de cada uno de los vectores de S.

Por último, la matriz rectangular de orden $(k+1) \times n$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

tiene rango k si y solamente si la primera fila es combinación lineal de las demás. Dicho de otra forma, el vector v de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece a S si y solo si $\text{rango}(A) = k$. Obsérvese que las últimas k filas son independientes pues eso mismo se supuso de los vectores $u_1, \ldots, u_k$. Elíjase pues un menor no nulo de orden k compuesto por elementos de las últimas k filas y órlese de todas las formas posibles para completar $n-k$ menores de orden $k+1$. Ahora v pertenece a S si y solo si cada uno de esos $n-k$ menores es nulo. En definitiva, los vectores de S quedan caracterizados porque sus coordenadas satisfacen un sistema lineal homogéneo del tipo

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \beta_{11}x_1 & + & \dots & + & \beta_{1n}x_n & = & 0, \\ \vdots & & & & & & \\ \beta_{(n-k),1}x_1 & + & \dots & + & \beta_{(n-k),n}x_n & = & 0, \end{array}\right\}$$

compuesto por $n-k$ ecuaciones independientes en n incógnitas. A la expresiones anteriores se les denomina *ecuaciones cartesianas* de S.

Concluyendo, un subespacio S se determina bien por medio de su ecuación vectorial, bien por sus ecuaciones paramétricas, bien por sus ecuaciones cartesianas. La dimensión del subespacio S viene dada en el primer caso por el número de vectores independientes que generan a S, en el segundo, por el número de parámetros y, en el tercero, por la diferencia entre el número de incógnitas y el de ecuaciones.

Se ilustrará lo anterior con un ejemplo. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ provisto de la base canónica, sea $S =< u_1, u_2, u_3 >$ con $u_1 = (-1, 3, 0)$, $u_2 = (0, 2, -1)$ y $u_3 = (-2, 4, 1)$. Como se anula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

compuesta por sus coordenadas, los vectores que engendran al subespacio son dependientes. Sin embargo, el menor $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, lo que permite expresar $S =< u_1, u_2 >$ y $\dim(S) = 2$. De ahí la ecuación vectorial

$$S \equiv v = \lambda_1(-1, 3, 0) + \lambda_2(0, 2, -1),$$

y las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & = & -\lambda_1 & & \\ x_2 & = & 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 \\ x_3 & = & & & -\lambda_2 \end{array}\right\}.$$

Además, de imponer que la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2, se orla el menor no nulo $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ de la única forma posible (en este caso $n-k=3-2=1$) para obtener el sistema de una sola ecuación lineal

$$-3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0.$$

El camino inverso, el de hallar las ecuaciones paramétricas y vectorial de S conociendo las ecuaciones cartesianas, se reduce a la resolución de un sistema lineal homogéneo, el cual, recuérdese, siempre es compatible y la discusión del mismo se reduce a saber si tiene más soluciones aparte de la trivial. Sea S, por ejemplo, el subespacio de $\mathbb{Q}^5$ determinado por las ecuaciones cartesianas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 0. \end{array}\right\}$$

Puesto que se trata de 2 ecuaciones independientes en 5 incógnitas, el subespacio tiene dimensión 3. Utilizando el método de Gauss se llega a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 0. \end{array}\right\}$$

O, escrito de otra forma,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & -x_4 + x_5 \\ & & x_2 & = & x_3 + x_5. \end{array}\right\}$$

Y dando a x_3, x_4 y x_5 los valores respectivos λ, μ y ν obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & = & -2\lambda & - & \mu & - & \nu \\ x_2 & = & \lambda & & & + & \mu \\ x_3 & = & \lambda & & & & \\ x_4 & = & & & \mu & & \\ x_5 & = & & & & & \nu \end{array}\right\}.$$

Así, el subespacio S puede describirse como

$$S = \{(-2\lambda - \mu - \nu, \lambda + \mu, \lambda, \mu, \nu) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Q}\}.$$

Y dando a los parámetros valores cualesquiera que produzcan vectores independientes se construirá una base de S. Por poner algunos sencillos, hágase

$\lambda = 1$, $\mu = 0$ y $\nu = 0$, que proporciona el vector $u_1 = (-2, 1, 1, 0, 0)$. Para $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 0$, se tiene $u_2 = (-1, 0, 0, 1, 0)$, y con $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 1$, elegimos al vector $u_3 = (-1, 1, 0, 0, 1)$. Una base de S es, por consiguiente, la integrada por u_1, u_2 y u_3, de donde se llega a la ecuación vectorial

$$S \equiv v = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3.$$

Se termina este apartado introduciendo los términos *recta vectorial* y *plano vectorial* para referirse a los (sub)espacios de dimensiones 1 y 2 respectivamente, y el adjetivo *hiperplano* para denominar a un subespacio de dimensión $n - 1$ de un espacio vectorial de dimensión n .

§3 Retículo de subespacios de un espacio vectorial

Recuérdese que un retículo no es más que un conjunto X provisto de un orden $\leq$ tal que para cada $a, b \in X$ existe el supremo c y el ínfimo d del conjunto $\{a, b\}$. En definitiva, c es el menor de todos los elementos que superan a a y a b, mientras que d es mayor o igual que cualquier elemento de X que sea menor o igual que a y b a la vez.

En la familia $\mathcal{S}(V)$ de subespacios de un espacio vectorial V, la inclusión representa una relación de orden. Pues bien, no es difícil ver que este orden dota a $\mathcal{S}(V)$ de estructura de retículo. En efecto, dados los subespacios S y T de V, su intersección $S \cap T$ constituye el mayor de entre los subespacios de V que están contenidos en S y T, y es por tanto el ínfimo. Por otro lado, cualquier subespacio que contenga a S y a T a la vez, ha de alojar a todos los vectores de la forma $u + v$ con $u \in S$ y $v \in T$. Una comprobación directa lleva a que

$$S + T = \{u + v : u \in S, v \in T\}$$

es ya un subespacio. De ahí que $S + T$ sea el supremo. Para determinar la suma de dos subespacios conviene conocer sendas bases o, de modo equivalente, sus ecuaciones vectoriales. Por el contrario, el cálculo de la intersección se facilita bastante a partir de sus ecuaciones cartesianas. Por ejemplo, en $V = \mathbb{R}^4$, sean S y T los planos vectoriales dados por

$$T \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = 0 \\ & & & & -x_3 & + & x_4 & = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad S =< u_1, u_2 >,$$

con $u_1 = (1, 0, -1, 0)$ y $u_2 = (2, 0, 0, -1)$. Obtengamos una base de T resolviendo el sistema. Como en este caso la matriz de tal sistema ya está en forma escalonada, basta hacer $x_2 = \lambda$ y $x_4 = \mu$, para escribir

$$T = \{(-\lambda - 3\mu, \lambda, \mu, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}.\}$$

De ahí que $v_1 = (-1, 1, 0, 0)$ y $v_2 = (-3, 0, 1, 1)$ constituyan una base de T. Así pues, $S + T$ está engendrado por los vectores u_1, u_2, v_1 y v_2. Pero el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

formado por las coordenadas de los cuatro vectores, se anula, lo cual indica que no son independientes. Eliminando un vector que sea combinación lineal de los otros, por ejemplo, $v_2 = -u_1 - u_2$, escribimos

$$S + T =< u_1, u_2, v_1 > .$$

Y ahora sí que se ha llegado a una base de $S + T$ pues puede comprobarse su independencia lineal. Así, $\dim(S + T) = 3$, y se trata de un hiperplano. Para el cálculo de la intersección, procédase a escribir las ecuaciones cartesianas de S. Por un lado, ha de ser

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Órlese el menor no nulo $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ de las dos formas posibles para obtener

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & & & & = & 0. \end{array} \right\}$$

Puesto que las coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) de cualquier vector de $S \cap T$ han de satisfacer tanto las ecuaciones de S como las de T, aquellas deben verificar las cuatro relaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & & & & & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = 0, & \\ & & & & -x_3 & + & x_4 & = 0, & \end{array}\right\}$$

conjunto de igualdades que aún no constituyen las ecuaciones cartesianas de la intersección, ya que la cuarta ecuación es la suma de las dos primeras menos la tercera. Tachando esta, por ser combinación lineal de las anteriores, se llega a que

$$S \cap T \equiv \left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & & & & & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = 0, & \end{array}\right\}$$

y estas tres ecuaciones sí son independientes. Luego $\dim(S \cap T) = 1$ y $S \cap T$ es una recta vectorial.

Nótese que un hiperplano de un espacio vectorial de dimensión n vendría determinado por una única ecuación cartesiana $(n - (n - 1) = 1)$, lo que permite afirmar que cada subespacio k -dimensional S de V puede verse como la intersección de $n - k$ hiperplanos. Cada uno de estos $n - k$ hiperplanos son los descritos por las correspondientes ecuaciones cartesianas de S. Así, en dimensión 3, una recta no es sino la intersección de dos planos, o, en dimensión 5, un plano vendría determinado como la intersección de 3 hiperplanos.

La relación entre las dimensiones de la suma y la intersección viene dada por el

Teorema I.2.1 (Fórmula de Grassman) *Si S y T son subespacios de un espacio vectorial V, entonces*

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

Definición I.2.1 Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V. Diremos que V es la *suma directa* de S y T y se escribirá $V = S \oplus T$, si $S \cap T = 0$ y $S + T = V$. A T se le llamará un *suplemento* de S.

Es obvio que todo subespacio S de un espacio vectorial T posee al menos un suplemento. Para ello, basta tomar una base de S y completarla a una base del total. El subespacio engendrado por los vectores que se han añadido constituye un suplemento. Nótese que el suplemento T no tiene por qué ser único puesto que una base de S puede extenderse de varias formas diferentes.

§4 Aplicaciones lineales. Dualidad

Recordemos que una *aplicación lineal* no es más que una aplicación

$$f : V \to V'$$

entre dos espacios vectoriales V y V' sobre el mismo cuerpo K que conserva las combinaciones lineales, esto es, $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$, cualesquiera que sean los vectores a y b de V y los escalares λ y μ de K. Los conceptos de *isomorfismo*, *monomorfismo*, *epimorfismo*, *endomorfismo* o *automorfismo* lineales se introducen de forma obvia.

Basta saber cuáles son las imágenes de una base por la aplicación lineal f para que esta quede completamente determinada. En efecto, fijemos la base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de V y la base $B' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de V'. Supóngase conocida la expresión de la imagen por f de cada u_i como combinación lineal de los v_j, por ejemplo

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_j, \quad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Entonces, para cada $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ se tiene

$$f(v) = \sum_i \lambda_i f(u_i) = \sum_i \lambda_i \sum_j \alpha_{ij} v_j = \sum_j (\sum_i \lambda_i \alpha_{ij}) v_j.$$

Esto es, dadas las coordenadas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de v en la base B, las coordenadas $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ de $f(v)$ en la base B' son

$$(\mu_1, \ldots, \mu_m) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix},$$

expresión denominada *ecuación de* f. Además, es también sabido que si se fijan bases en los espacios vectoriales V, V' y V'' sobre K, y A y B son las matrices respectivas referidas a esas bases de las aplicaciones $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$, entonces el producto matricial AB es la matriz de la aplicación lineal $g \circ f : V \to V''$.

Otros resultados que no se demostrarán aquí se enuncian en el siguiente

Teorema I.2.2 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces se satisface:*

i) El núcleo $\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ es un subespacio de V y la imagen $f(V)$, un subespacio de V'.

ii) f es un monomorfismo si y solo si $\ker(f) = 0$.

iii) f es un monomorfismo si y solo si conserva la independencia lineal, esto es, si cada vez que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son vectores linealmente independientes de V , entonces $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ son vectores linealmente independientes de V'.

iv) Si $\dim V = \dim V'$, entonces f es un monomorfismo si y solo si es un epimorfismo[1].

v) Si A es la matriz de f fijadas ciertas bases, entonces $\operatorname{rang}(A) = \dim f(V)$.

vi) Si $\dim V = \dim V'$, entonces f es un isomorfismo si y solo si A es una matriz inversible.

Y se finalizará esta sección repasando el concepto de espacio vectorial dual.

[1] *Esto no se satisface, en general, en dimensión infinita.*

Un cuerpo K puede considerarse como espacio vectorial sobre sí mismo de dimensión 1 sin más que interpretar el producto por escalares como el propio producto del cuerpo. De esa forma, también se permite concebir aplicaciones lineales entre un espacio vectorial V sobre K y el mismo K. En tal caso, a dichas aplicaciones lineales se les denomina *formas lineales*. Pues bien, por *espacio dual* V^* de V se entiende al espacio vectorial sobre K constituido por todas las formas lineales ϕ de V a K y provisto de las operaciones definidas por $\phi + \psi : v \mapsto \phi(v) + \psi(v)$ y $\lambda\phi : v \mapsto \phi(v)\lambda$ [2].

Cada base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V produce una base dual

$$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$$

de V^* cuyos elementos ϕ_i vienen dados por

$$\phi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Sea ahora S un subespacio de V. Se representará por S^* al conjunto de las aplicaciones lineales ϕ de V^* tales que $\phi(v) = 0$ para cada $v \in S$. En otros términos: $S^* = \{\phi \in V^* : \phi(S) = 0\}$. Se comprueba que S^* es un subespacio de V^* y que $S \mapsto S^*$ determina una inyección entre el retículo de subespacios de V y el de V^* la cual satisface $S \subset T$ implica $T^* \subset S^*$. A S^* se le denominará el *subespacio ortogonal a* S.

Supóngase que S está generado por los k vectores independientes

$$\{u_1, \ldots, u_k\}$$

de V y exprésense tales vectores en la base $\{v_i\}$ mediante $u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$. Sea $\phi = \sum_{l=1}^{n} x_l \phi_l$ un elemento de V^*. Para que ϕ pertenezca al ortogonal S^* de S, es suficiente (y necesario) con que anule a cada u_i, es decir,

$$0 = \phi(u_i) = \phi(\sum_j \alpha_{ij} v_j) = \sum_j \alpha_{ij} \phi(v_j) = \sum_j \alpha_{ij} (\sum_l x_l \phi_l)(v_j) =$$

[2] *El haber escrito en la última expresión el escalar λ a la derecha no tiene ninguna relevancia cuando, como en este caso, se estudian espacios vectoriales sobre cuerpos conmutativos. Sin embargo, es interesante advertir semejante sutileza pues cobra su particular importancia al trabajar con espacios vectoriales sobre anillos de división no necesariamente conmutativos..*

$$\sum_j \alpha_{ij}(\sum_l \phi_l(v_j)x_l) = \sum_j \alpha_{ij}x_j,$$

ya que el único sumando $\phi_l(v_j)$ no nulo es $\phi_j(v_j) = 1$. Así, el subespacio S^* de V^* queda caracterizado como el conjunto de aplicaciones lineales cuyas coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en la base dual satisfacen las relaciones

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \alpha_{k1}x_1 & + & \ldots & + & \alpha_{kn}x_n & = & 0 \end{array}\right\},$$

y, al ser k el rango de la matriz $A = (\alpha_{ij})$, las anteriores no son sino las ecuaciones cartesianas del subespacio S^*. Ha resultado fácil describir al ortogonal S^* de un subespacio S del que se conocen las coordenadas $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ de los vectores de una base $\{u_1, \ldots, u_k\}$: el subespacio S^* se nutre de las aplicaciones lineales $\phi \in V^*$ cuyas coordenadas en la base dual integran vectores fila $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que verifican la ecuación

$$Ax^t = 0,$$

con A la matriz cuyas filas las componen las coordenadas de los u_i y x^t el vector columna traspuesto de x.

En particular, se ha demostrado que S^* posee dimensión $n-k$ si $\dim S = k$.

De modo inverso, para cada subespacio W de V^* , se introduce el *ortogonal W^* de W* como el subespacio de V dado por

$$W^* = \bigcap\{\ker\phi : \phi \in W\}.$$

Hay entonces otra aplicación $W \mapsto W^*$ entre el retículo de los subespacios de V^* y el de V que se denotará de la misma forma que la anterior puesto que no hay lugar a confusión. Además, $S^{**} = S$ y $W^{**} = W$ para cualesquiera subespacios S de V y W de V^*. Ambas aplicaciones, al invertir las inclusiones de sentido, se convierten en antiisomorfismos de retículos, esto es, transforman sumas en intersecciones e intersecciones en sumas.

Al igual que en el caso anterior, también se comprueba que si se toma un subespacio W de V^* engendrado por k vectores independientes de coordenadas $(\alpha_{ij})_j$ en la base dual, entonces el subespacio W^* queda determinado por el conjunto de los vectores de V cuyos vectores fila x de coordenadas satisfacen $xA = 0$, con A la matriz rectangular de orden $k \times n$ dada por $A = (\alpha_{ij})$. Luego $\dim W^* = \dim V - \dim W$ y $\dim S^* = \dim V - \dim S$ para subespacios S de V y W de V^*.

§4 Ejercicios de repaso

1) En el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^5$, se consideran los subespacios

$$S =< (1,0,0,0,1), (-2,0,1,1,0) \quad \text{y}$$

$$T \equiv \left\{ \begin{array}{lllllllll} x_1 & & & & & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Hállense las ecuaciones vectoriales y cartesianas de $S \cap T$ y de $S + T$.

2) Sean S, T y U tres subespacios de un espacio vectorial V. Pruébese la veracidad de las inclusiones

$$S + (T \cap U) \subset (S + T) \cap (S + U) \quad \text{y}$$

$$(S \cap T) + (S \cap U) \subset S \cap (T + U),$$

y dense ejemplos en los que tales inclusiones sean estrictas.

3) Demuéstrese que si S es un subespacio de T, entonces $S = T$ si y solo si $\dim S = \dim T$ [3].

4) En el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$, hállese algún suplemento del plano r de ecuación $(1 - i)x + 2y + (-2 - 3i)z = 0$.

5) Respecto a las bases canónicas del dominio y la imagen, dese la matriz de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x, y, z) = (2x - y, 0, x + 2y - z, y + 2z).$$

[3] *De nuevo este resultado no es enunciable en dimensión infinita*

6) Resuélvase el mismo problema anterior, pero considerando la base

$$\{(1,0,1),(-1,0,1),(0,1,1)\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3$$

y la base

$$\{(0,0,1,0),(-1,-1,1,1),(1,0,0,1),(0,0,0,1)\} \quad \text{de } \mathbb{R}^4.$$

7) Sea V el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$.

i) Calcúlese en V^* la base dual de la base de V

$$\{(0,0,1,0),(-1,-1,1,1),(1,2,0,1),(0,0,0,1)\}.$$

ii) Hállese el subespacio ortogonal r^* de la recta r engendrada por el vector $u = (1,2,3)$.

iii) Obténgase el subespacio de V ortogonal al subespacio de V^* engendrado por las formas lineales

$$\phi : (x_1,x_2,x_3) \mapsto 2x_1 - x_2 \quad \text{y} \quad \psi : (x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1 + x_2 - x_3.$$