# I.3
# ELEMENTOS DE GEOMETRÍA AFÍN Y PROYECTIVA

## Índice del capítulo.

A. Castellón

# ELEMENTOS DE GEOMETRÍA AFÍN Y PROYECTIVA

Como notación general, a los puntos se les representará por latinas mayúsculas, a las rectas, por latinas minúsculas, y a los planos, por griegas minúsculas.

## §1 Espacios afines y proyectivos

Dado un vector $a$ de un espacio vectorial $V$ sobre $K$, a la aplicación $\tau_a : V \to V$ dada por $\tau_a(v) = a + v$ se le denomina *traslación*. Se tienen las siguientes evidencias:

* Las traslaciones son aplicaciones biyectivas.
* $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$.
* La traslación $\tau_a$ transforma el vector $0$ en el vector $a$.
* $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$ y $\tau_0 = 1_V$.
* El conjunto de las traslaciones de $V$ es un grupo isomorfo al grupo aditivo del espacio $V$.
* Una traslación queda determinada por la imagen de un solo vector: si $v$ se transforma en $v'$ por la traslación $\tau_a$, debe ser $a = v' - v$.

Tras este preámbulo, la forma más sencilla de introducir el concepto de espacio afín es como sigue:

**Definición I.3.1** Un *espacio afín* sobre un cuerpo $K$ no es más que un espacio vectorial $V$ sobre $K$ al que a los vectores se les llama *puntos*. Un subconjunto $T$ del espacio afín $V$ se dice que es un *subespacio afín* de $V$, si es el trasladado de algún subespacio vectorial, esto es, si existe algún subespacio vectorial $S$ de $V$ y una traslación $\tau_a$ tal que $T = \tau_a(S)$. Por *dimensión* del subespacio afín $T$ se entenderá la dimensión del subespacio vectorial $S$ del que procede.

Y, en realidad, ya no hay más ciencia en el estudio de los espacios afines puesto que el interés de la geometría afín se centra en las posiciones relativas de los subespacios afines, las cuales quedan por completo resueltas sin más que discutir sistemas lineales de ecuaciones. Recuérdese que el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales puede construirse a partir de una solución particular a la que se le suman todas las soluciones del homogéneo asociado. Como se vio en la sección anterior, las soluciones de un sistema homogéneo constituyen un subespacio vectorial. Así, los subespacios afines no son sino los conjuntos de soluciones de los sistemas lineales generales.

Por ejemplo, en el espacio afín $\mathbb{R}^3$, la recta afín

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array} \right\},$$

dada como intersección de dos planos afines, es la trasladada de la recta vectorial $S =< (0,1,1) >$ por la traslación $\tau_{(2,1,0)}$. En efecto, aplíquese el método de Gauss. Multiplicando la primera ecuación por $-2$ y sumándola a la segunda y haciendo $z = \lambda$, se obtiene

$$r = \{(2,1,0) + (0,\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Por un lado, $S = \{(0,\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, es el conjunto de soluciones del homogéneo asociado (una recta vectorial), y $(2,1,0)$ una solución particular del no homogéneo.

Más adelante se verá a los espacios afines como parte de los espacios proyectivos, lo que resultará de un gran ahorro a la hora de desarrollar la teoría. Por eso, sin más dilación, se pasa a introducir el espacio proyectivo.

**Definición I.3.2** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre $K$, con $n$ un entero mayor o igual que $-1$. Al conjunto $\mathcal{P}(V)$ de los subespacios de $V$ de dimensión $1$ se le denomina *espacio proyectivo* asociado a $V$. Se dirá de $\mathcal{P}(V)$ que *tiene dimensión* $n$. A los elementos de $\mathcal{P}(V)$ se les denominará *puntos*, a los espacios proyectivos de dimensión $1$, *rectas* y a los de dimensión $2$, *planos*. En el caso particular de coincidir $V$ con el $K$-espacio vectorial $K^{n+1}$, se utilizará la expresión $\mathcal{P}_n(K)$ a la hora de aludir al espacio $\mathcal{P}(V)$.

Antes de proseguir, interesa realizar varias observaciones. En primer lugar, nótese que, con los términos establecidos, un espacio proyectivo consiste en el conjunto de sus puntos. Nada más lógico. Qué ridículo si no hubiese sucedido así. Por otro lado un espacio proyectivo de dimensión $-1$ no posee puntos pues su vectorial asociado se reduce al espacio nulo $\{0\}$ que no contiene subespacios unidimensionales. De modo equivalente, $\dim \mathcal{P}(V) = -1$ si y solo si $\mathcal{P}(V) = \emptyset$. Por último, si $S$ es un subespacio vectorial de $V$, entonces el propio $S$ es un espacio vectorial y tiene, por consiguiente un proyectivo asociado $\mathcal{P}(S)$ que está sumergido en $\mathcal{P}(V)$. (Cada subespacio de dimensión $1$ de $\mathcal{P}(S)$ es también un subespacio unidimensional de $\mathcal{P}(V)$.) A tales subconjuntos de $\mathcal{P}(V)$ se les llamará *subespacios proyectivos* de $\mathcal{P}(V)$. Un subespacio $\mathcal{P}(H)$ será un *hiperplano* de $\mathcal{P}(V)$ si $H$ es un hiperplano de $V$.

De lo anterior se deduce que mucho de lo dicho para subespacios vectoriales funciona igual para subespacios proyectivos. En particular, los subespacios de un espacio proyectivo constituyen un retículo en el que $\mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(S \cap T)$ y $\mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(S + T)$. Y también se trasladan las ecuaciones que los caracterizan, aunque, como se verá más abajo, hay que andarse con cuidado con el número de ecuaciones y parámetros. Por ejemplo, un subespacio $k$-dimensional $\mathcal{P}(S)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n$, proviene de un subespacio $(k+1)$-dimensional del espacio vectorial $V$ de dimensión $n+1$. Entonces aparecerán $k+1$ parámetros en las ecuaciones paramétricas. Sin embargo, seguirá descrito por $n - k = (n+1) - (k+1)$ ecuaciones cartesianas independientes.

Por último, para simplificar la notación se denotará de la misma forma a un punto $P =< u >$ que al subespacio proyectivo $0$ -dimensional que solo consta del punto $P$ $(P = \{P\}$ ). Así, será usual escribir $P = r \cap s$ , si $P$ es el punto en el que la recta $r$ corta a la recta $s$ , o $\mathcal{S} = A + B + C$ cuando el subespacio $\mathcal{S}$ sea el más pequeño que contiene a los puntos $A$ , $B$ y $C$ .

La definición de espacio proyectivo parece un tanto antojadiza. ¿Por qué no quedarse con los espacios vectoriales o afines? ¿Y a cuento de qué eso de restarle 1 a la dimensión de un vectorial para indicar la del proyectivo asociado? Todo esto proviene del origen de la geometría proyectiva. El matemático marsellés Desargues quiso dar un fundamento sólido a los desvaríos matemáticos con el que comenzaron a tratar la perspectiva los pintores del Renacimiento. Las visuales que proceden de objetos del mundo real y convergen en el ojo del artista (o del espectador que mira el cuadro final), cortan al lienzo en puntos determinados. Esta proyección (de ahí el nombre de proyectiva), puede deformar la realidad. Por ejemplo, los bordes paralelos de un camino se proyectan según rectas que convergen en un punto de fuga, al igual que los quicios de las puertas o ventanas.

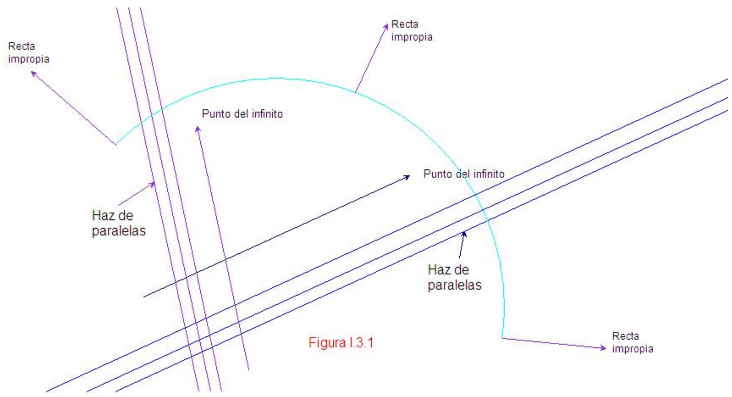

Figura I.3.1

Por eso Desargues pretendió eliminar, desde un punto de vista conceptual, la excepcionalidad de las rectas paralelas de un plano y tratarlas a todas en pie de igualdad. Para un par de rectas paralelas, se inventa un “punto en el infinito” en el cual acaban cortándose. El artificio consistía en “añadir” un punto del infinito por cada haz de rectas paralelas y convenir en que ese punto extra era común a todas las rectas del haz. A continuación, se consideraba a todos los puntos del infinito agregados como los constituyentes de una recta especial denominada asimismo “recta” del infinito. En dimensión 3 se procedía de modo semejante, cada haz de rectas paralelas del espacio determinaba un punto del infinito. Todas las rectas contenidas en un plano tenían su punto del infinito en la recta del infinito que “rodea” a ese plano, mientras que el conjunto de los puntos del infinito se consideran los elementos de un plano adicional, el plano del infinito. En esta ocasión, no existen planos paralelos en el proyectivo pues se cortarían según una recta del infinito común. Todo esto será fundamentado más adelante con más rigor. Por ahora, baste con conocer que la intención de Desarges pasaba porque dos rectas distintas del plano se cortasen en un punto, y dos planos distintos del espacio, en una recta.

Se analizará ahora si este capricho, que cada par de rectas distintas de un plano proyectivo se corten en un punto o, con mayor generalidad, que cada par de hiperplanos de un espacio proyectivo se intersequen según uno de sus hiperplanos, se ha visto cumplido. Para ello, pártase de dos subespacios $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(T)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ finito-dimensional. Se tiene

$$\begin{array}{c} \dim(\mathcal{P}(S)+\mathcal{P}(T)) = \dim\mathcal{P}(S+T) = \\ \dim(S+T)-1 = \dim S + \dim T - \dim(S\cap T) - 1 = \\ (\dim S - 1) + (\dim T - 1) - (\dim(S\cap T) - 1) = \\ \dim\mathcal{P}(S) + \dim\mathcal{P}(T) - \dim(\mathcal{P}(S)\cap\mathcal{P}(T)) \end{array},$$

y se consigue la validez de la fórmula de Grassmann en espacios proyectivos. Una aplicación directa de dicha expresión probará que se han alcanzado los objetivos previstos: cada par de rectas distintas de un plano proyectivo se cortan en un punto y cada pareja de hiperplanos de un espacio proyectivo se intersecan según uno de sus hiperplanos. En efecto. Si $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(T)$ son hiperplanos distintos del espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n$ sobre $K$, hay entonces algún vector $v$ en $S$ que no está en $T$. De aquí que $S+T$ se agrande hasta ocupar todo $V$ sin más que completar $\{v\}$ a una base del total por medio de añadirle una base de $T$. Así, la expresión

$$\dim\mathcal{P}(V) = \dim\mathcal{P}(S+T) = \dim(\mathcal{P}(S)+\mathcal{P}(T)) =$$

$$\dim\mathcal{P}(S) + \dim\mathcal{P}(T) - \dim(\mathcal{P}(S)\cap\mathcal{P}(T)),$$

queda sustituida por

$$n = (n-1) + (n-1) - \dim(\mathcal{P}(S)\cap\mathcal{P}(T)),$$

o, equivalentemente,

$$\dim(\mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T)) = n - 2,$$

y $\mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T)$ es hiperplano tanto de $\mathcal{P}(S)$ como de $\mathcal{P}(T)$.

Antes de proseguir, ha de observarse que, aunque los puntos de un plano proyectivo $\mathcal{P}(V)$ puedan sumarse, no se admite a esta suma como una operación en $\mathcal{P}(V)$. Sean $A =< a >$ y $B =< b >$ dos puntos. Según las definiciones establecidas, $A + B$ coincide con el subespacio $< a, b >$ de $V$ engendrado por $a$ y $b$. Este subespacio sería una recta, que se denotará por $\overline{AB}$, si se diera la independencia lineal de $a$ y $b$, pero, de lo contrario, se reduciría a un punto. Así, la suma de puntos no siempre da como resultado un punto. Donde funciona esta adición como ley de composición interna es en el retículo de subespacios de $\mathcal{P}(V)$ y no en el propio $\mathcal{P}(V)$. Se advierte que en alguna literatura esto produce confusión.

Se acabará la sección dando unos cuantos de ejemplos de espacios proyectivos asociados a espacios vectoriales y algunas interpretaciones gráficas de los mismos.

Los espacios proyectivos de dimensiones muy bajas se describen con enorme facilidad. En dimensión $-1$ no hay más espacio proyectivo que el vacío, el asociado al espacio vectorial nulo. Los de dimensión cero se reducen a puntos. Aunque parezcan una ridiculez de espacios, merece la pena considerarlos como tales por uniformidad en el trato a los subespacios de dimensiones más altas. Los espacios proyectivos comienzan a adquirir entidad a partir de la dimensión $1$, esto es, las rectas proyectivas.

Continuando por la recta proyectiva real $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, se dará de ella un modelo gráfico. Hablando con rigor, la recta proyectiva se compone de rectas vectoriales del plano $\mathbb{R}^2$, o sea, el haz de rectas que atraviesan el origen de coordenadas.

Puesto que resulta un tanto chocante visualizar una recta (proyectiva) como una gavilla de rectas (vectoriales), se ideará un procedimiento para elegir de cada una de las rectas del haz un puntito que sirva de representante y facilite la concepción de una imagen mental. A tal fin, considérese la recta $r$ de ecuación $x = 1$ y escójase de cada recta $s$ del plano vectorial el punto $s \cap r$ (véase la figura I.3.2). A menos que $s$ coincida con la recta $t$ de ecuación $x = 0$, este punto siempre existe y determina a $s$ de forma única. Así, se establece una biyección $\sigma$ entre $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}) - \{t\}$ y $r$. Para acabar este modelo de la recta proyectiva real se adjuntará un punto imaginario $P_\infty$ a $r$ y se completará la biyección por medio de $\sigma(t) = P_\infty$. Es lícito entonces concebir la recta proyectiva real como una recta ordinaria, la que dicta la intuición, y a la que se le añade un punto $P_\infty$. ¿Dónde situaría la inventiva humana dicho punto? No se precisa demasiada fantasía para ubicarlo en el infinito, en uno de los extremos. No, mejor en ambos extremos simultáneamente y forzando a la recta a "doblarse" sobre sí misma.

En efecto. ¿Y si se toma una recta vectorial de $\mathbb{R}^2$ muy "próxima" a $t$, digamos la recta $s$ de ecuación $y = 1.000.000.000.000x$? Tal recta queda identificada por $\sigma$ con el punto de $r$ de ordenada $1.000.000.000.000$. Para rectas $t$ de pendientes aún mayores, se obtienen representantes de ordenada tan grande como se quiera. Así, girando poco a poco $t$ en el sentido contrario a las agujas del reloj, lo cual proporciona intersecciones con $r$ tan "lejanas" como se desee, se alcanzaría la situación vertical de la propia $t$. En este momento se sobrevolaría el punto $P_\infty = \sigma(t)$, el cual se pretende materializar en algún lugar hipotético del mundo de la ilusión. Forzando por fin esta postura límite de una recta vertical, se comienza a manejar rectas vectoriales de pendiente muy pequeña, por poner un caso, algo así como $y = -10^{1.000.000}x$. Estas líneas cortan a $r$ en puntos del tipo $(0, b)$ con $b$ un real negativo tan pequeño como se ambicione.

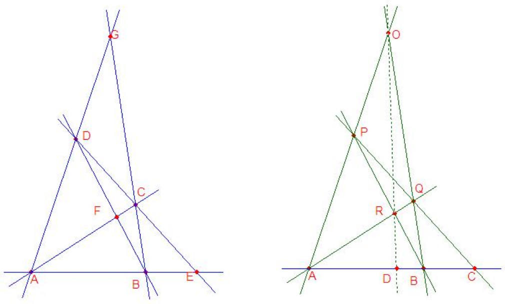


Figura I.3.2

¿Queda ahora claro dónde acomodar, aunque sea en el universo virtual de las ideas, al dichoso punto $P_\infty$? Por supuesto: al final de ambas puntas de la recta $r$ y "cerrándola". Este "cierre" debe entenderse con el siguiente símil cinemático. Sitúese el lector en el lugar $(1, 0)$, y clave en tal emplazamiento una baliza señalizadora. Imagínese ahora que camina en dirección hacia arriba y siguiendo a $r$ como ruta. Un odómetro de infinitos dígitos le mostrará su posición, en realidad, basta con la ordenada. Después de un viaje fatigoso de infinitos kilómetros, una singladura, por otro lado, que la matemática-ficción hace posible, llegará al punto $P_\infty$. En el instante en que lo supere, leerá en el contador el mensaje ??? de error de las pantallitas de cristal líquido de las calculadores cuando se les propone una operación imposible. Justo al adelantar a $P_\infty$, el odómetro exhibe de inmediato una cantidad compuesta por muchísimas cifras, pero negativa. Conforme prosigua el itinerario, este número crecerá hasta $0$, momento en el cual debería reconocer la baliza que dejó al partir. Se ha regresado al inicio de la singladura tras recorrer todo un mundo uni-dimensional.

Este modelo, a pesar de lo intuitivo de su concepción, cuenta con el inconveniente de obliga al geómetra a tragar con un punto que, en apariencia, se sale de lo común: el odómetro se volvió loco al pasar por encima de $P_\infty$. Más adelante se aclarará cómo se subsana el fastidio del punto $P_\infty$ con la introducción de las coordenadas homogéneas. Sin embargo, se está en condiciones de plasmar otra estampa de la recta proyectiva real en la que no existen discriminaciones entre sus puntos. Para ello, considérese la circunferencia unidad $S^1$ del plano real, que no es más que el conjunto de los puntos $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $x^2+y^2 = 1$. Ahora cada recta vectorial del plano $\mathbb{R}^2$ (punto de la recta proyectiva real) interseca a $S^1$ en una pareja de puntos simétricos respecto al centro. Muy bien, piénsese entonces en la recta proyectiva real como una circunferencia en la cual sus puntos consisten en una pareja de puntos antípodas. En concreto, se ha conseguido una biyección entre $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y el conjunto cociente $S^1/\cong$, donde $\cong$ es la relación de equivalencia dada por $(a, b) \cong (a', b')$ si y solo si $a = -a'$ y $b = -b'$.

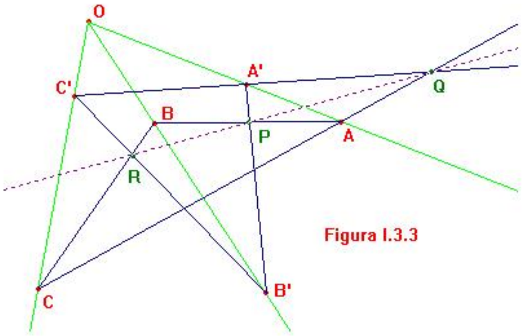

Figura I.3.3

Insistiendo en una simplificación: ¿para qué usar la circunferencia completa y operar con puntos “repetidos” que proliferan por duplicado? Para eso, mejor quedarse con el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$, que representa a la semicircunferencia derecha. En $M$ basta con identificar a $(0, 1)$ con $(0, -1)$, la única pareja de puntos antípodas que ha sobrevivido a la reducción, para obtener un prototipo de la recta proyectiva real. Obsérvese que la aplicación $(x, y) \mapsto (1, \tan(\frac{y}{x}))$, si $x \neq 0$, y lleva la clase de $(0, 1)$ al punto $P_\infty$ transforma este esquema de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ en el anterior. Sólo se ha cambiado el aspecto, pero qué cómodo resulta ahora trasladarse por el arco de circunferencia y, al abordar uno de sus ficticios extremos, aparecer por arte de magia en el otro gracias a haberlos hecho coincidir en una única entidad. El odómetro, en este caso, no cuenta en números reales, sino que sus cifras varían por el conjunto cociente $\mathbb{R}/\cong$, donde $x \cong y$ si y solo si $y - x$ es un múltiplo de $\pi$, la longitud de la semicircunferencia unidad. Y si a alguien le molesta la curvatura de algo que debiera inspirar a la recta proyectiva real, aún resulta lícito "enderezarla" proyectándola ortogonalmente sobre el eje $y$, es decir, identificando cada punto $(x, y)$ con su ordenada $y$. Así, se obtiene un homeomorfismo entre $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y el espacio topológico cociente $[-1, 1]/\cong$, donde $\cong$ es la relación de equivalencia engendrada por $(-1, 1)$ (véase la figura I.3.3). Puesto que este espacio es la imagen por la proyección canónica de un espacio compacto y conexo y las funciones continuas conservan tales propiedades, se concluye con que la recta proyectiva real puede dotarse de una topología natural que la convierte en un espacio topológico compacto y conexo.

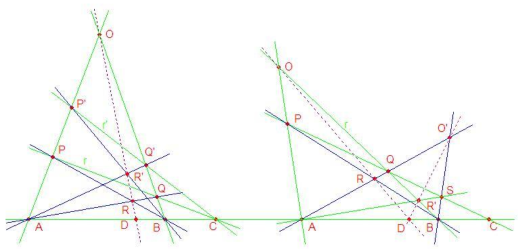

Figura I.3.4

Se pasará a continuación a elaborar modelos visuales del plano proyectivo real. Como antes, los puntos de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ quedan descritos por las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$, mientras que las rectas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ están formadas por los planos vectoriales. Obrando por analogía con la dimensión $1$, escójase un plano afín de $\mathbb{R}^3$ que no pase por el origen. Sea éste el plano $\pi$ de ecuación $x = 1$ (figura I.3.4). Cada recta vectorial de $\mathbb{R}^3$, corta a $\pi$ en exactamente un punto. ¿Todas? ¡No! Un plano poblado por irreductibles rectas se resiste a cortar a $\pi$ y sin necesidad de poción mágica alguna, el plano de ecuación $x = 0$ que se denotará por $\pi_\infty$. Además, cualquier plano vectorial distinto de $\pi_\infty$ tiene una recta afín en común con $\pi$.

Nada más natural que tomar un punto de $\pi$ como representante de cada recta vectorial y añadir a $\pi$ un punto por cada recta contenida en $\pi_\infty$. Estos puntos se agregan a las rectas que resulten del corte con $\pi$ de aquellos planos que contengan a $r$. Dicho en otros términos, si $r \subset \pi_\infty$ y $\pi'$ es un plano vectorial que contiene a $r$, entonces se adiciona a $\pi$ un punto que se denotará, por ejemplo, por $P_r$, y a la recta afín $\pi \cap \pi'$ se le adhiere el punto $P_r$ en un proceso similar al descrito para la construcción de la recta proyectiva real. Estos puntos con los que se va ampliando $\pi$ y sus rectas afines conviene imaginárselos en los extremos de esas rectas y cerrándolas. Por otro lado, si $r_1$ y $r_2$ son rectas afines paralelas contenidas en el plano $\pi$, cada una de ellas resulta de la intersección con $\pi$ de sendos planos vectoriales $\pi_1$ y $\pi_2$. La recta $2 = \pi_1 \cap \pi_2$ está contenida en $\pi_\infty$. Así, al engrosar $r_1$ y $r_2$ con $P_s$, acaban cortándose.

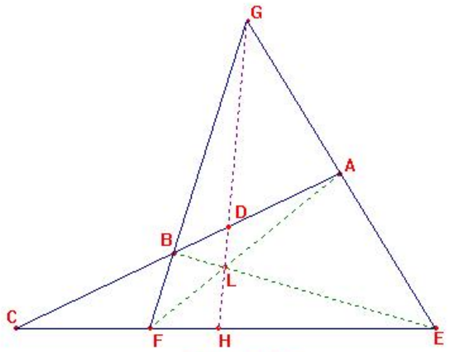


FIGURA I.3.5

Por último, considérese a todos los puntos con que se ha ensanchado a $\pi$ como pertenecientes a una misma recta, a la que se denotará por $r_\infty$, la cual, posee exactamente un punto en común con todas las anteriores. En definitiva, es posible forjarse la imagen del plano proyectivo real a partir de la del plano afín ordinario, salvo que, mentalmente, hay que concebir un punto en el infinito por cada dirección, y una recta que pasa por todos esos puntos y “rodea” al plano. Este plano es cerrado en el sentido de que viajando en una dirección fija se llegará al punto del infinito de esa dirección, se le sobrepasará, y se volverá al punto de llegada en la dirección opuesta a la de partida. En este prototipo de plano proyectivo real sucede como en algunos juegos de ordenador en los que una nave se pasea por el espacio bidimensional de la pantalla, ya sea matando marcianos o destruyendo meteoritos, pero, al llegar al borde del monitor, reaparece por el punto opuesto con la misma dirección y sentido.

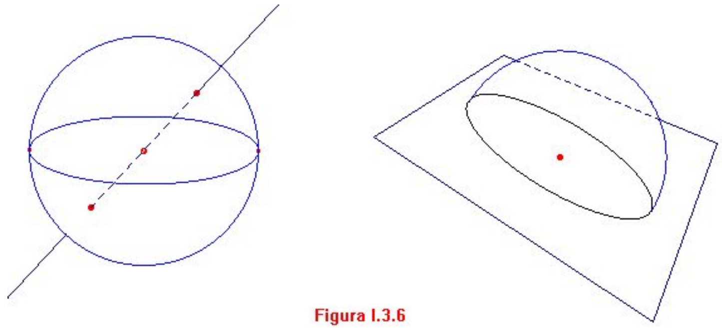

Figura I.3.6

A continuación, se introducirán otros modelos geométricos del plano proyectivo real que no recurren al artificio de añadir cosas a un plano afín, sino a concebirlo sobre un sólido no plano. Pártase a tal fin de la esfera unidad bidimensional $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Cada recta vectorial de $\mathbb{R}^3$ corta a $S^2$ en una pareja de puntos antípodas y cada plano vectorial, en un círculo máximo. ¿No evoca esta situación un comentario anterior acerca de que las rectas proyectivas se comportan como si fuesen circunferencias? El plano proyectivo real puede verse ahora como la esfera unidad en la cual se identifica cada punto $P$ con su antípoda $-P$ y las rectas se representan por círculos máximos. Aquí se evidencia que cada par de rectas distintas se cortan en un único punto.

Al igual que se hizo con la recta proyectiva, desdéñese media esfera para quedarse, por ejemplo, con la superior $\{(x, y, z) \in S^2 : z \geq 0\}$, aunque tomando la precaución de continuar identificando los puntos del borde $z = 0$ con sus respectivos antípodas.

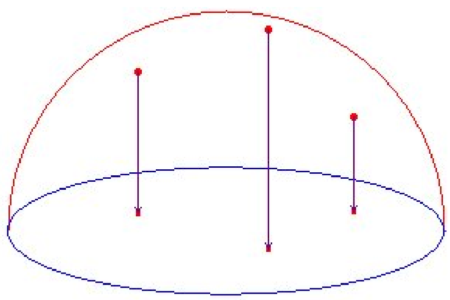

Figura I.3.7

Finalícese la construcción aplastando la semiesfera sobre el plano $z = 0$

por medio de la proyección ortogonal $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$. El resultado ha quedado así de simple:

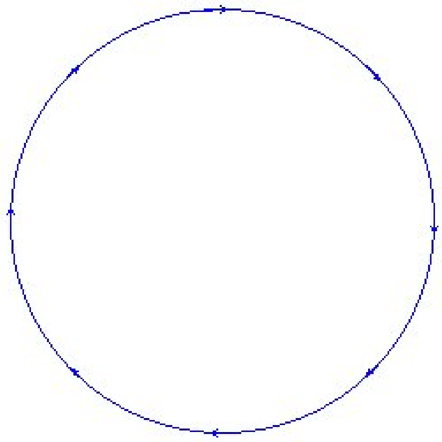

Figura I.3.8

o sea, un esquema del cociente de la circunferencia unidad $S^1$ bajo la relación de equivalencia $P \cong -P$. Los topólogos prefieren dibujarlo en la forma

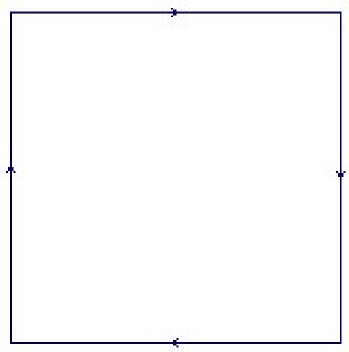

Figura I.3.9

para manejar a $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como cociente de un producto cartesiano de intervalos cerrados. Este canon responde con mayor fidelidad al símil sobre videojuegos de más arriba. En conclusión: el plano proyectivo real constituye, por las mismas razones que la recta, un espacio topológico compacto y conexo.

## §2 Coordenadas homogéneas

En los espacios proyectivos conviene estudiar las posiciones relativas de sus subespacios más que la estructura que pudiera obtenerse de la definición de operaciones internas entre sus elementos. Recuérdese que un espacio proyectivo está constituido por puntos y que, aunque se permite sumarlos considerándolos como subespacios, el resultado no siempre es un punto ya que puede dar una recta. Así, esta suma de puntos no representa una operación interna al estilo que lo hacían la suma de vectores de un espacio vectorial. Sin embargo, conceptos como la dependencia y la generación son susceptibles de trasladarse de un espacio vectorial a su proyectivo asociado.

Sean $P_1 =< v_1 >, P_2 =< v_2 >, \ldots, P_n =< v_n >$ puntos de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ sobre un cuerpo $K$. Diremos que estos puntos son *independientes* si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes. Cabe preguntarse por la bondad de esta definición ya que a cada $P_i$ lo mismo lo engendra el vector $v_i$, que un múltiplo escalar no nulo de él. Se comprobará pues que la independencia lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ implica la de cualquier conjunto $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n$ con los $\lambda_i$ escalares no nulos. Si se escribe una expresión del tipo

$$\mu_1(\lambda_1 v_1) + \mu_2(\lambda_2 v_2) + \ldots + \mu_n(\lambda_n v_n) = 0,$$

se obtendrá

$$(\mu_1 \lambda_1) v_1 + (\mu_2 \lambda_2) v_2 + \ldots + (\mu_n \lambda_n) v_n = 0,$$

lo que obliga, dada la independencia de los $v_i$, a que cada producto $\mu_i \lambda_i$ sea nulo. Como $\lambda_i \neq 0$, no queda más remedio que $\mu_i = 0$ para cada $i$ y la independencia de puntos ha sido correctamente introducida.

Sea ahora $S$ un conjunto de puntos de $\mathcal{P}(V)$. Al más pequeño subespacio de $\mathcal{P}(V)$ que contenga a $S$ se le denominará el *subespacio engendrado por* $S$. Es obvio, por ejemplo, que el subespacio engendrado por $\{P_1, \ldots, P_n\}$ coincide con $P_1 + \ldots + P_n$, entendida esta última suma como suma de subespacios del retículo, y si $P_i =< v_i >$, entonces $P_1 + \ldots + P_n = \mathcal{P}(< v_1, \ldots, v_n >)$.

De la definiciones anteriores se derivan algunas consecuencias inmediatas:

* Un único punto es independiente.

* Dos puntos son independientes si y solo si son distintos.

* Tres puntos son independientes si y solo si no están sobre la misma recta.

* En un espacio proyectivo $n$-dimensional caben, a lo sumo, $n+1$ puntos independientes, y cada conjunto que genere el total debe contener al menos $n+1$ puntos.

* Si $S = \emptyset$, el subespacio engendrado por $S$ es el vacío.

* De $n+1$ puntos de un espacio $\mathcal{P}(V)$ con $\dim \mathcal{P}(V) = n$, da lo mismo afirmar que generan el total a que son independientes.

Algunos de los hechos precedentes llevan a intuir la posibilidad de establecer bases en los espacios proyectivos que permitan asignar coordenadas a los puntos tal cual se realiza en los espacios vectoriales. Supóngase que $\mathcal{P}(V)$ es un espacio proyectivo $n$-dimensional y que $P_0 =< v_0 >, \ldots, P_n =< v_n >$ son $n+1$ puntos independientes los cuales, por lo afirmado más arriba, generan el total. Con esto, uno se apaña un excelente candidato a servir de base. Las condiciones exigidas a aquellos puntos implican que el conjunto $\{v_0, \ldots, v_n\}$ constituye una base del espacio vectorial $V$. ¿Y si se le ocurre a algún impaciente definir las "coordenadas" de un punto $P =< v >$ como la $(n+1)$-upla de escalares $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ tal que $v = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_n v_n$? Habría que comprobar que eligiendo otros vectores $v_i$ que generen los mismos $P_i$, las nuevas "coordenadas" de $P$ no se desmadran. Pues bien, por desgracia eso ocurre. Si se escribe, por ejemplo, $P_0 =< \lambda v_0 >$ con $\lambda$ un escalar no nulo, las nuevas "coordenadas" de $P$ serían $(\lambda_0 \lambda^{-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. ¿Y qué parecido guardan éstas con las antiguas? Más bien poco. Mejor no empecinarse en traducir al proyectivo el concepto de base de un espacio vectorial. Lo correcto será seguir usando el mismo, si esto resulta factible.

Sea $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial $V$ sobre un cuerpo $K$. Entonces los puntos $\{P_0, \ldots, P_n\}$, con $P_i =< v_i >$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, no sólo generan al proyectivo $\mathcal{P}(V)$, sino que son independientes.

Para cada punto $P =< v >$, el vector $v$ se expresa de forma única como $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$. Pero $P$ también puede escribirse como $P =< \lambda v >$ para cualquier $\lambda \neq 0$, en cuyo caso, $\lambda v = \lambda \sum_i \lambda_i v_i = \sum_i \lambda(\lambda_i v_i) = \sum_i (\lambda\lambda_i) v_i$.

Por otro lado, del producto cartesiano $K^{n+1}$ de $K$ por sí mismo $n+1$ veces elimínese la $(n+1)$-upla $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ que está llena de ceros. En el conjunto $K^{n+1} - \{0\}$ se introduce la relación $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \sim (\mu_0, \ldots, \mu_n)$ si y solo si existe un $\lambda \in K - \{0\}$ tal que $\lambda_i = \lambda \mu_i$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, la cual resulta ser de equivalencia. ¿Por qué se ha desdeñado la $(n+1)$-upla $0$?, porque $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_n$ no engendra ningún punto del proyectivo. Nada más natural entonces que definir las *coordenadas homogéneas de* $P$ como la clase de equivalencia de la $(n+1)$-upla $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$.

A la base $B$ de partida se le suele denominar un *sistema de coordenadas homogéneas*.

El uso de coordenadas homogéneas da mucho juego en el estudio de la geometría de un espacio proyectivo y resulta análogo al de las coordenadas ordinarias de los vectores con respecto a una base prefijada. Esta semejanza se entiende en el sentido de que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos y sus coordenadas homogéneas que permite el etiquetado de aquéllos de manera inequívoca por medio de la clase de equivalencia de alguna $(n+1)$-upla no nula de escalares. Solo hay que tener en cuenta que difiere el lugar donde se toman las coordenadas. Si los espacios vectoriales $(n+1)$-dimensionales lo hacen en $K^{n+1}$, los espacios proyectivos de dimensión $n$ se sirven del conjunto cociente $(K^{n+1} - \{0\})/\sim$ para la elección de las coordenadas homogéneas de sus puntos.

Como aplicación se resolverá el siguiente problema: ¿cuantos puntos habrá en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n$ sobre un cuerpo $K$ de $q$ elementos? Primero cuéntese el número de coordenadas posibles. Si $K$ tiene $q$ elementos, entonces son $q^{n+1}$ las $(n+1)$-uplas de $K^{n+1}$. Al quitarle la $(n+1)$-upla $0$, quedan $q^{n+1}-1$. Por último, habrá que dividir por el cardinal de cada clase de equivalencia para saber cuántas clases distintas hay. Pues bien, como, dada una $(n+1)$-upla, los elementos de su clase de equivalencia se obtienen multiplicando la primera por escalares distintos de $0$ y de éstos hay $q-1$, al final habrá $q-1$ elementos en cada clase. El número de puntos del espacio proyectivo es, por consiguiente, $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. ¿Y si este cociente, por alguna casualidad, diese un número fraccionario? Vaya gracia si, al aplicar la fórmula, va por ahí un matemático afirmando que este espacio posee veintisiete puntos y medio. Imposible. El teorema de Ruffini, sí, ése teorema con que se tortura a los bachilleres cuando estudian polinomios, permite asegurar que el cociente $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ es un número entero positivo.

Otra curiosidad aparece cuando la expresión $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ sigue funcionando para $n=-1$, o sea, para el espacio vacío de dimensión $-1$ cuya cantidad de puntos asciende a la cifra $0$.

Regresando al discurso principal, recuérdese que "sistema de coordenadas homogéneas" y "base" pueden considerarse términos sinónimos. Para no complicar la notación, cuando se trate de coordenadas homogéneas se denotará del mismo modo a una $(n+1)$-upla que a su clase de equivalencia. Así, una igualdad como $(1,-1,5)=(2,-2,10)$ no dañará la vista si se refiere a coordenadas homogéneas de puntos de un espacio proyectivo.

Existe un procedimiento bastante cómodo y muy frecuente de ofrecer un sistema de coordenadas homogéneas distinto a este de exhibir una base del vectorial asociado. En concreto, sea $\mathcal{P}(V)$ un espacio proyectivo $n$-dimensional sobre el cuerpo $K$. En él, escójanse $n+1$ puntos independientes $P_0,\ldots,P_n$ engendrados por los respectivos vectores $v_0,\ldots,v_n$. Ahora tómese un punto adicional $U=<u>$ con la propiedad de no pertenecer a ninguno de los hiperplanos determinados por $n$ de entre los $n+1$ primeros puntos. Esta condición obliga a que, si se expresa $u$ como combinación lineal de la base $\{v_0,\ldots,v_n\}$ en la forma $u=\lambda_0 v_0+\ldots+\lambda_n v_n$, a ninguno de los $\lambda_i$ le es permitido anularse. Por ejemplo, si $\lambda_0=0$, entonces $U$ caería en el hiperplano $P_1+P_2+\ldots+P_n$. Bajo las circunstancias anteriores, el sistema de coordenadas homogéneas determinado por los $n+2$ puntos anteriores (los $P_i$

más el $U$), será la base $\{\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n\}$, es decir, aquélla en la cual el vector $u$ posea como coordenadas homogéneas la $(n+1)$-upla $(1, 1, \dots, 1)$ llena de unos.

Al conjunto de los $n+2$ puntos anteriores se le suele representar en la forma $\{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$, llamándose *puntos base* a los $n+1$ primeros puntos, y *punto unidad* al $U$.

Conviene que el lector compruebe que este método de dar un sistema de coordenadas homogéneas no depende de los vectores elegidos para generar los puntos [1].

Obsérvese que el proceso de elección de un sistema de coordenadas homogéneas por medio de la exhibición de los puntos base y el punto unidad, requiere que la dimensión del espacio proyectivo sea, cuando menos, uno. En una recta proyectiva, un sistema de coordenadas homogéneas queda determinado por tres puntos $\{P_0, P_1; U\}$, dos base y uno unidad. En esta dimensión tan chica cualesquiera tres puntos distintos entre sí integran un sistema de coordenadas homogéneas. La "magia" del punto unidad no reside más que en fijar algo así como "unidades de medida" para los ejes coordenados.

Se abordará un ejemplo. En el plano proyectivo $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q})$ sobre los racionales, tómense $P_0 =< (1, -1, 0) >$, $P_1 =< (1, 0, -1) >$, $P_2 =< (0, 0, 2) >$ y $U =< (1, -2, 7) >$. Confíese en que $\{P_0, P_1, P_2; U\}$ determina un sistema de coordenadas homogéneas, es decir, los tres primeros puntos son independientes y $U$ no está en ninguna recta de las que pasan por dos cualesquiera de los puntos base. Quien no se lo crea, que lo compruebe. Se calcularán las coordenadas homogéneas del punto $P =< (-4, 4, 6) >$. Para ello, hay que comenzar escogiendo una base integrada por convenientes generadores de los puntos base de forma que el generador de $U$ tenga a la terna $(1, 1, 1)$ como

[1] *Se advierte que en la comprobación de semejante verdad interviene de forma decisiva la conmutatividad del cuerpo, por lo que este método de ofrecer sistemas de coordenadas homogéneas no funcionaría en espacios sobre anillos de división, de los que no se ocupan estas notas.*

coordenadas. Para ello se plantea la ecuación vectorial

$$(1,-2,7)=\lambda_0(1,-1,0)+\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,0,2),$$

la cual, una vez convertida en sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, da como soluciones $\lambda_0=2$, $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=3$. Luego el sistema de coordenadas homogéneas (la base) con respecto a la cual hay que referir los puntos es el formado por $u_0=(2,-2,0)$, $u_1=(-1,0,1)$ y $u_2=(0,0,6)$. Por último, la expresión

$$(-4,4,6)=\mu_0(2,-2,0)+\mu_1(-1,0,1)+\mu_2(0,0,6)$$

proporciona las coordenadas homogéneas de $P$, a saber $(-2,0,1)$.

¿Se acuerda el lector del embrollo aquel de los cambios de base en los espacios vectoriales, y que si este vector tiene estas coordenadas en esta base, cuáles son las coordenadas en aquella otra, y todos aquellos líos? Pues aquí, en geometría proyectiva, igual.

Pártase de dos sistemas de coordenadas homogéneas (bases del vectorial asociado) $\{v_0,\dots,v_n\}$ y $\{u_0,\dots,u_n\}$ y exprésese cada $v_i$ en función de los $u_i$ por medio de las $n+1$ combinaciones lineales $v_i=\sum_j \alpha_{ij}u_j$. Sea $P=<v>$ un punto de $\mathcal{P}(V)$ de coordenadas $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ en el primero de los sistemas, esto es, $v=\sum_i \lambda_i v_i$. Entonces,

$$v=\sum_i \lambda_i \sum_j \alpha_{ij}u_j=\sum_j \big(\sum_i \lambda_i\alpha_{ij}\big)u_j,$$

y se obtienen las coordenadas homogéneas de $P$ en el segundo de los sistemas: $(\sum_i \lambda_i\alpha_{i0},\dots,\sum_i \lambda_i\alpha_{in})$. Lo anterior suele escribirse con mayor comodidad mediante una ecuación matricial del tipo

$$(\mu_0,\dots,\mu_n)=(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \dots & \alpha_{0n}\\ \vdots & & \\ \alpha_{n0} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix},$$

o, incluso, de un modo más compacto por

$$\lambda x'=xA,$$

donde $x$ representa al vector fila de las coordenadas de $P$ respecto al primer sistema, $x'$ el vector fila de las coordenadas de $P$ respecto al segundo sistema y $A$ la matriz cuadrada de orden $n+1$ integrada por los $\alpha_{ij}$. El escalar $\lambda$ multiplicando a $x'$ se incluye para indicar que se trata de coordenadas homogéneas. A la expresión $\lambda x' = xA$ se le denomina la *ecuación del cambio de coordenadas homogéneas*. Puesto que $A$ es la matriz de un cambio de base, posee una inversa $A^{-1}$. De aquí que la ecuación del cambio de coordenadas recíproco, el del segundo sistema al primero, se obtenga multiplicando por $A^{-1}$ la ecuación $\lambda x' = xA$ por la derecha, de lo que resulta $\lambda x = x'A^{-1}$. Nótese la indiferencia de la aparición del escalar $\lambda$ en uno u otro lado al variar entre todos los elementos no nulos de $K$. Y esta indefinición del $\lambda$ permite poner $\lambda x = x'(A^t)^{\text{adj}}$. Recuérdese que la inversa de una matriz cuadrada coincide con la traspuesta de la adjunta dividida por el determinante. Así, el valor del determinante se agrega al escalar y se simplifica el cálculo del cambio recíproco.

## §3 Determinación de subespacios por sus ecuaciones

Una vez introducido un método para caracterizar a los puntos por sus coordenadas, parece lógico que los subespacios podrán determinarse como conjuntos de puntos cuyas coordenadas homogéneas satisfagan ciertas relaciones. No habrá en ello grandes diferencias con lo expuesto en el capítulo anterior para espacios vectoriales.

Tómense $k+1$ puntos independientes $P_0 =< u_0 >, \ldots, P_k =< u_k >$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n$ sobre $K$ en el que se ha fijado un sistema de coordenadas homogéneas $\{v_0, \ldots, v_n\}$. Cada $P_i$ posee unas coordenadas $(\alpha_{i0}, \ldots, \alpha_{in})$ en dicho sistema. El subespacio proyectivo

$$\mathcal{S} = P_0 + \ldots + P_k$$

engendrado por los $P_i$ tiene dimensión $k$. Los puntos $P =< u >$ de $\mathcal{S}$ se fabrican haciendo variar $u$ entre todas las combinaciones lineales no idénticamente nulas de los vectores $u_i$, es decir, $u$ encarnará cualquiera de los vectores

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} v_j = \sum_{j=0}^{n} \big( \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \alpha_{ij} \big) v_j ,$$

lo que produce la totalidad de las posibles coordenadas homogéneas de los puntos del subespacio $\mathcal{S}$ sin más que "pasear" la $(k+1)$-upla de parámetros $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k)$ por todo $K^{k+1}$ exceptuando la $(k+1)$-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ llena de ceros. Este hecho se representa por medio de la expresión

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda x_0 & = & \lambda_0 \alpha_{00} & + & \ldots & + & \lambda_k \alpha_{k0} \\ \lambda x_1 & = & \lambda_0 \alpha_{01} & + & \ldots & + & \lambda_k \alpha_{k1} \\ \vdots & & & & & & \\ \lambda x_n & = & \lambda_0 \alpha_{0n} & + & \ldots & + & \lambda_k \alpha_{kn} \end{array} \right\} ,$$

conocida bajo el nombre de *ecuaciones paramétricas* del subespacio $\mathcal{S}$. Estas ecuaciones se entienden en un sentido similar al de las ecuaciones de los subespacios vectoriales, es decir, al recorrer los $\lambda_i$ el cuerpo de escalares (salvo el caso $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\} = \{0\}$), se generan las coordenadas homogéneas $(x_0, \ldots, x_n)$ de la totalidad de los puntos de $\mathcal{S}$. El colocar un $\lambda$ (pero siempre el mismo para todos) delante de cada $x_i$ adquiere, como siempre, la significación de que se opera con coordenadas homogéneas.

Y razonando como en la sección §I.2.2, del hecho de que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_n \\ \alpha_{00} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{k0} & \ldots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} ,$$

tiene rango $k+1$ si y solamente si el punto de coordenadas homogéneas $(x_0, \ldots, x_n)$ pertenece a $\mathcal{S}$, se obtienen las $n-k$ *ecuaciones cartesianas*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \gamma_{00} x_0 & + & \ldots & + & \gamma_{0n} x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \gamma_{(n-k-1),0} x_0 & + & \ldots & + & \gamma_{(n-k-1),n} x_n & = & 0 \end{array} \right\}$$

Basta con partir de un menor no nulo de orden $k+1$ integrado por elementos de las $k+1$ últimas filas y orlarlo de las $n-k$ maneras factibles para encontrar las ecuaciones cartesianas de $\mathcal{S}$ [2].

## §4 El espacio afín dentro del proyectivo

Hasta el momento se ha concebido una definición de estructura afín, aquella en la que un espacio afín no era más que un vectorial a cuyos elementos se les llamaba puntos en vez de vectores y en el que se considerában como subespacios a las imágenes por traslaciones de los subespacios vectoriales. Ahora se comparará esta idea con el nacimiento de una nueva noción de espacio afín compatible con la anterior.

**Definición I.3.3** Sea $H$ un hiperplano del espacio vectorial $V$ sobre $K$. Al conjunto de puntos $\mathcal{A}(V,H)$ que quedan en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ al eliminar los del subespacio $\mathcal{P}(H)$ se le denomina *espacio afín* sobre $K$. En notación conjuntista,

$$\mathcal{A}(V,H)=\mathcal{P}(V)-\mathcal{P}(H).$$

De $\mathcal{P}(V)$ se dirá que es la *envolvente proyectiva* de $\mathcal{A}(V,H)$. A los puntos de $\mathcal{P}(H)$ se les denomina *puntos del infinito* o *puntos impropios*, y a $\mathcal{P}(H)$, *hiperplano del infinito* o *hiperplano impropio*. Los *subespacios afines* de $\mathcal{A}(V,H)$ son los obtenidos al suprimir de los subespacios de $\mathcal{P}(V)$ (no contenidos en $\mathcal{P}(H)$) sus puntos impropios, es decir, $T$ es un subespacio (afín) de $\mathcal{A}(V,H)$ si y solo si existe un subespacio $S$ de $V$ no contenido en $H$ tal que $T=\mathcal{P}(S)-\mathcal{P}(H)$. Se introduce la *dimensión* del espacio afín $\mathcal{A}(V,H)$ como aquella que tuviese el proyectivo $\mathcal{P}(V)$.

A continuación se verá cómo esta manera de introducir el espacio afín no se desvía en esencia de la ya establecida. Tómese un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n$ sobre un cuerpo $K$ y elíjase en él un hiperplano

[2] *De nuevo este sistema es inviable en espacios sobre anillos con división, donde se precisa aplicar un método de eliminación de parámetros..*

$\mathcal{P}(H)$ engendrado por los puntos $P_1 =< v_1 >$, ..., $P_n =< v_n >$. Fíjese un punto arbitrario $P_0 =< v_0 >$ del afín $\mathcal{A}(V, H)$. La forma de escoger estos puntos obliga a que $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ constituya un sistema de coordenadas homogéneas de $\mathcal{P}(V)$ (una base de $V$). En estas circunstancias, la ecuación cartesiana del hiperplano impropio $\mathcal{P}(H)$ se reduce a $x_0 = 0$. En efecto, sea $P =< u >$ un punto de coordenadas homogéneas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, es decir, $u = x_0v_0 + x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$. Así, $P \in \mathcal{P}(H) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ si y solo si $x_0 = 0$. Por consiguiente, en el sistema de coordenadas homogéneas fijado, un punto $P$ de coordenadas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ está en el afín $\mathcal{A}(V, H)$ si y solo si $x_0 \neq 0$.

Este hecho permite establecer una biyección entre el espacio afín $\mathcal{A}(V, H)$ y el $K$-espacio vectorial $K^n$ operando como sigue: al punto $P$ de $\mathcal{A}(V, H)$ con coordenadas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ se le asocia la $n$-upla $(y_1, \ldots, y_n)$, denominada *coordenadas cartesianas* de $P$, donde $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se comprobará en primer lugar que esta aplicación está bien definida. Si $(x'_0, \ldots, x'_n)$ es otro representante de las coordenadas homogéneas de $P$, existiría entonces un escalar no nulo $\lambda$ satisfaciendo $x'_i = \lambda x_i$ para cada $i$. Así,

$$\frac{x'_i}{x'_0} = \frac{\lambda x_i}{\lambda x_0} = \frac{x_i}{x_0}.$$

El carácter biyectivo de la aplicación que se acaba de definir se obtiene exhibiendo su inversa, la cual asociaría a una $n$-upla de escalares $(y_1, \ldots, y_n)$ el punto de $\mathcal{A}(V, H)$ de coordenadas homogéneas $(1, y_1, \ldots, y_n)$.

En definitiva, se pueden identificar los puntos del espacio afín $\mathcal{A}(V, H)$ de dimensión $n$ con los vectores del $K$-espacio vectorial $n$-dimensional $K^n$ por medio del cambio de coordenadas homogéneas a cartesianas y viceversa.

Se verá ahora cómo se comportan los subespacios. Sea $\mathcal{P}(S)$ el subespacio de $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $k$ determinado por las ecuaciones

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \gamma_{00}x_0 & + & \ldots & + & \gamma_{0n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \gamma_{(n-k-1),0}x_0 & + & \ldots & + & \gamma_{(n-k-1),n}x_n & = & 0 \end{array} \right\}.$$

El subconjunto de los puntos afines de $\mathcal{P}(S)$ se nutre de aquéllos cuyas coordenadas homogéneas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ verifiquen las $n-k$ ecuaciones anteriores amén de satisfacer la condición $x_0 \neq 0$. Y cada vez que un algebrista se encuentra con algo distinto de cero, un impulso irresistible lo lleva a multiplicar cada una de las ecuaciones por el escalar $x_0^{-1}$. Obrando de tal guisa se obtiene el sistema lineal no homogéneo de $n-k$ ecuaciones en $n$ incógnitas

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \gamma_{00} & + & \gamma_{01} y_1 & + & \ldots & + & \gamma_{0n} y_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ \gamma_{(n-k-1),0} & + & \gamma_{(n-k-1),1} y_1 & + & \ldots & + & \gamma_{(n-k-1),n} y_n & = & 0 \end{array} \right\},$$

que describe al subespacio afín $\mathcal{P}(S) - \mathcal{P}(H)$ por medio de las relaciones que ligan las coordenadas cartesianas de sus puntos. Basta ahora con aplicar un conocido argumento, referido en párrafos precedentes, para expresar el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo como suma de una solución particular con el conjunto de soluciones del homogéneo asociado. El subespacio afín $\mathcal{P}(S) - \mathcal{P}(H)$ quedaría definido entonces como un conjunto de puntos (vectores de $K^n$) del tipo $A + X$, donde $A$ es una solución particular del sistema no homogéneo y $X$ varía por el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \gamma_{01} y_1 & + & \ldots & + & \gamma_{0n} y_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \gamma_{(n-k-1),1} y_1 & + & \ldots & + & \gamma_{(n-k-1),n} y_n & = & 0 \end{array} \right\}$$

el cual constituye un subespacio vectorial de $K^n$ de dimensión $k$ (pues $k = n-(n-k)$). Así, los subespacios afines de $\mathcal{A}(V, H)$ se identifican con imágenes por traslaciones de los subespacios vectoriales de $K^n$.

Tampoco presenta dificultades el camino inverso: el trasladado $T$ de un subespacio vectorial $k$-dimensional de $K^n$ queda determinado por un sistema lineal no homogéneo del tipo (2) descrito más arriba, el cual, por medio de una "homogeneización" (que horror de palabra) de variables, es decir, sustituyendo cada $y_i$ por $\frac{x_i}{x_0}$ y multiplicando por $x_0$, produce el sistema homogéneo del tipo (1), cuyo conjunto de soluciones totaliza un subespacio proyectivo de dimensión $k$ de $\mathcal{P}(V)$. ¿Totaliza? Mejor rectificar. Para el paso a homogéneas se precisa del cambio $y_i = \frac{x_i}{x_0}$, y esto presupone $x_0 \neq 0$. Es decir, el subconjunto $T$ de $K^n$ consta sólo de los puntos afines de un subespacio de dimensión $k$ de la envolvente proyectiva $\mathcal{P}(V)$ de $\mathcal{A}(V, H)$.

Concluyendo, los subespacios afines de $\mathcal{A}(V, H)$ se identifican con los trasladados de los subespacios vectoriales de $K^n$.

Desde este punto de vista, las dos definiciones I.3.3 y I.3.1 de espacio afín que se han manejado coinciden. Sin embargo, para una mayor generalidad, convendrá visualizar un espacio afín como el trozo que queda de un proyectivo al extraerle el hiperplano del infinito: teoremas y conceptos que se introduzcan en el proyectivo generarán sus correspondientes teoremas y conceptos afines por una simple particularización.

Y se finalizará con una observación. Dos hiperplanos distintos $\mathcal{P}(H)$ y $\mathcal{P}(H')$ de un mismo espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ producen espacios afines $\mathcal{A}(V, H)$ y $\mathcal{A}(V, H')$ diferentes. De ahí la inclusión de los hiperplanos impropios $H$ y $H'$ en la notación elegida. Sin embargo, en la próxima sección se verá que, en esencia, esos afines son el mismo. Pero no ocurrirá así con los lugares geométricos del espacio de partida. Por ejemplo, se comprobará en la segunda parte de estos apuntes cómo una cónica de un plano proyectivo puede originar elipses, parábolas o hipérbolas dependiendo de la recta del infinito escogida.

## §5 Principio de dualidad

Recuérdese de la sección anterior que entre la familia de subespacios de un espacio vectorial $V$ de dimensión $n$ y la familia de subespacios de su dual $V^*$, se establecen dos aplicaciones $S \mapsto S^*$ que resultan ser antiisomorfismos de retículos en el sentido de que invierten las inclusiones y, por consiguiente, transforman sumas en intersecciones y viceversa. A cualquiera de estas dos aplicaciones se le denominará la *correlación estándar*.[3] Por otro lado, si $S$ es un

[3] *Las correlaciones son cierto tipo de transformaciones de bastante interés en geometría proyectiva. Sin embargo, dado el carácter elemental de estas notas, solo se tratará la correlación estándar introducida aquí.*

subespacio $k$-dimensional de $V$ (resp. de $V^*$), entonces $S^*$ es un subespacio de $V^*$ (resp. de $V$) de dimensión $n-k$. De todo esto debe deducirse que:

*Todo teorema en espacios proyectivos de dimensión $n$ sobre $K$, enunciado en términos de inclusiones, sumas y/o intersecciones de subespacios, proporciona un teorema dual, igualmente válido en espacios proyectivos $n$-dimensionales sobre el mismo cuerpo, obtenido mediante la inversión de las inclusiones, la sustitución de las sumas por intersecciones, de las intersecciones por sumas, y los subespacios de dimensión $r$ por subespacios de dimensión $n-r-1$.*

Lo anterior se conoce como el *Principio de Dualidad* y puede considerarse como un *metateorema*, un teorema sobre los teoremas. Obsérvese que $\dim \mathcal{P}(V) = n$ significa $\dim V = n+1$. De ahí que si $\dim \mathcal{P}(S) = r$, se tenga $\dim \mathcal{P}(S^*) = \dim S^* - 1 = (dim V - \dim S) - 1 = [(n+1)-(r+1)] - 1 = n-r-1$.

También se "dualizan" (y se piden excusas por conjugar un verbo de nuevo cuño) propiedades o conceptos. Por ejemplo, en un plano proyectivo el término dual de punto es recta ($1 = 2-0-1$), el de recta, punto ($0 = 2-1-1$), el de recta determinada por dos puntos ($r = \overline{AB} = A+B$), punto donde se cortan dos rectas ($R = a \cap b$). En cambio, en espacios tridimensionales los duales de los puntos son los planos y viceversa, mientras que recta es término dual de sí mismo. La propiedad dual de que *tres puntos no alineados determinan un único plano* sería que *tres planos sin rectas comunes se cortan en un único punto*. En general, hiperplano dualiza en punto ($0 = n-(n-1)-1$), y punto, en hiperplano ($n-1 = n-0-1$).

La importancia del principio de dualidad radica en que, de golpe, duplicó toda la geometría. Bastaba con demostrar un teorema para obtener automáticamente su teorema dual. Tan fructífera se mostró semejante herramienta que a partir de Gergonne (1771-1859) se impuso la costumbre de escribir los tratados de geometría proyectiva a dos columnas, en la primera la teoría original, y a su derecha, la teoría dual. El primero en vislumbrar un fenómeno tan interesante fue el matemático francés Jean Victor Poncelet

(1788-1867), quien enunció el principio de dualidad en el plano proyectivo real, aunque por métodos bien distintos a los aquí expuestos pues se valía de una cónica no degenerada. Más adelante, Julius Plücker (1801-1868) logró prescindir de esas cónicas al introducir las coordenadas homogéneas [4]. Y es curioso el hecho de que teoremas con nombre propio, como los de Pascal y Brianchon que se abordarán en capítulos posteriores, no devengan sino en el dual uno del otro[5]. También se hallará el lector frente a teoremas *autoduales*, cuyo dual viene a decir lo mismo que el de origen, o incluso ante teoremas en los que el dual consiste en el recíproco. En tales circunstancias bastará con probar la suficiencia de unas condiciones para obtener la necesidad de las mismas.



[4] *En el agrio combate que se libró entre los partidarios de la geometría analítica frente a los "sintéticos", la principal recriminación de aquellos radicaba precisamente en que estos últimos eran incapaces de probar el principio de dualidad sin el auxilio de una cónica.*

[5] *El teorema de Pascal (1623-1662) fue publicado en 1640. Sin embargo, hubo que esperar más de siglo y medio a que Brianchon (1785-1864) aplicase el principio de dualidad a aquel enunciado.*