I.4
PROYECTIVIDADES, INVOLUCIONES Y AFINIDADES

Índice del capítulo.

A. Castellón

PROYECTIVIDADES, INVOLUCIONES Y AFINIDADES

En geometría, desde la antigüedad, siempre ha subyacido la idea de movimiento o transformación de un espacio en otro o en sí mismo hasta el punto de que era indisociable el estudio de los objetos geométricos del de las transformaciones (funciones) entre ellos. Más aún, una vez que Félix Klein introdujera en su tesis doctoral de la Universidad alemana de Erlangen los grupos de transformaciones, estos sirvieron incluso para clasificar y denominar a las distintas geometrías. Este capítulo se ocupará de estas transformaciones en espacios proyectivos y afines.

§1 Proyectividades entre espacios proyectivos

Si en álgebra lineal, las aplicaciones lineales juegan un papel fundamental, se intentará trasladar este concepto a la geometría proyectiva. Para ello, supóngase que f es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y V' sobre K. Un punto $P =< v >$ de $\mathcal{P}(V)$ no es más que un subespacio $< v >$ unidimensional engendrado por un vector no nulo $v \in V$. Reconózcase que tienta la idea de definir una aplicación $\mathcal{P}(f)$ entre $\mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(V')$ por medio de la igualdad $\mathcal{P}(f)(P) =< f(v) >$. Sin embargo, para que el vector $f(v)$ determine un punto de $\mathcal{P}(V')$, debe ser no nulo. ¿Qué ocurriría entonces si $v \in \ker f$?, pues que el punto P se queda sin imagen.

Pero como aún no se ha enunciado nada, se tiene la posibilidad de exigirle a f que su núcleo se reduzca al 0 o, equivalentemente, que f sea inyectiva. A tales aplicaciones lineales se las conoce como *transformaciones regulares*.

Ahora se evidencia que cada transformación regular $f : V \to V'$ entre espacios vectoriales sobre K determina una aplicación

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V'),$$

que se denominará la *inducida* por f, mediante

$$\mathcal{P}(f) < v > = < f(v) > .$$

Un sencillo cálculo (hágase) demuestra que $< f(v) >$ no depende de la elección del vector que genera a $< v >$.

Nótese que $\mathcal{P}$ adquiere carácter functorial al satisfacerse

$$\mathcal{P}(1_V) = 1_{\mathcal{P}(V)} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(f \circ g) = \mathcal{P}(f) \circ \mathcal{P}(g).$$

Cuando f sea un isomorfismo de espacios vectoriales, se dirá de $\mathcal{P}(f)$ que es una *proyectividad*.

Algunos autores no imponen la condición $\ker f = \{0\}$. Unos por simple despiste ([Santalo], p. 94). Otros porque operan con funciones no definidas en todo el espacio proyectivo ([Burgos]). Y aunque estas aplicaciones parcialmente definidas tengan cierta importancia, las características de iniciación del curso aconsejan abstenerse de tales malabarismos.

Otra confusión se produce con el vocabulario pues difícil encontrar dos libros que llamen a lo mismo de igual forma. Lo que aquí se ha bautizado como proyectividad, en algunos lugares aparece como homografía, en otros como colineación o aplicación lineal proyectiva... Total, una desgracia para quien desee poner orden y concierto al diccionario de términos matemáticos.

A continuación se incluye una lista de propiedades inmediatas cuyas comprobaciones se proponen como ejercicios:

* La existencia de una aplicación $\mathcal{P}(f)$ entre dos espacios proyectivos inducida por una transformación regular conlleva que la dimensión del primero es menor o igual que la del segundo. Recuérdese que las transformaciones regulares conservan la independencia lineal de vectores.
* Una condición necesaria para que haya una proyectividad entre dos espacios es que ambos tengan la misma dimensión.
* Las proyectividades transforman subespacios en subespacios y conservan las dimensiones.

* La inversa de una proyectividad es una proyectividad.

* Cada proyectividad $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$ induce un isomorfismo entre el retículo de los subespacios de $\mathcal{P}(V)$ y el retículo de los subespacios de $\mathcal{P}(V')$, o sea, conserva las inclusiones, las sumas y las intersecciones de subespacios.

* Si $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ es una proyectividad, entonces σ es biyectiva y aplica puntos alineados en puntos alineados o, dicho de otra forma, cada vez que $A \in \overline{BC}$ para tres puntos $A, B, C \in \mathcal{P}$, se tiene $\sigma(A) \in \overline{\sigma(B)\sigma(C)}$ [1].

Operando como se hizo en la sección §I.2.4 con las aplicaciones lineales, se está en condiciones de encontrar la ecuación de una proyectividad. En concreto, si $\mathcal{P}(f)$ es una proyectividad entre los espacios proyectivos $\mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(V')$ de dimensión n sobre K, en los que hay fijados sendos sistemas de coordenadas homogéneas B y B', entonces la relación entre las coordenadas homogéneas de un punto P de $\mathcal{P}(V)$ y las de su imagen $\mathcal{P}(f)(P)$ viene dada por la expresión

$$\lambda x' = xA,$$

donde x es el vector fila de las coordenadas homogéneas de P respecto al sistema de coordenadas B, x' las de su imagen respecto al sistema B', y A la matriz inversible de orden $n + 1$ cuyas filas no son sino las coordenadas respecto al sistema B' de las imágenes de los vectores del sistema B.

Se ilustrará lo anterior con un ejemplo. Considérese el isomorfismo lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ dado por

$$f(x_0, x_1, x_2) = (2x_0 - x_1, x_0 + x_1 + x_2, -x_1 - x_2).$$

Si se fija, tanto en el dominio como en la imagen, el sistema de coordenadas

[1] *Esta última propiedad es la que inspira el concepto de colineación. En concreto, una colineación es una biyección entre dos espacios proyectivos de la misma dimensión, eventualmente, sobre cuerpos distintos, que transforma puntos alineados de uno en puntos alineados del otro. En estos apuntes no se estudiarán las colineaciones, aunque se advierte de su importancia para un estudio más profundo de la geometría proyectiva.*

homogéneas canónico, entonces

$$\begin{array}{lcll} & \mathcal{P}(f) & & \\ P_0 =< (1,0,0) > & \longmapsto & < (2,1,0) > & = Q_0 \\ P_1 =< (0,1,0) > & \longmapsto & < (-1,1,-1) > & = Q_1 \, . \\ P_2 =< (0,0,1) > & \longmapsto & < (0,1,-1) > & = Q_2 \\ U =< (1,1,1) > & \longmapsto & < (1,3,-2) > & = V \end{array}$$

Obsérvese que la matriz del isomorfismo f sería

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y la proyectividad $\mathcal{P}(f)$ vendría descrita por la ecuación

$$\lambda(x'_0, x'_1, x'_2) = (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

cuya interpretación es la habitual, si (x_0, x_1, x_2) son las coordenadas homogéneas de un punto P (respecto al sistema de coordenadas canónico), la expresión anterior proporciona las coordenadas (x'_0, x'_1, x'_2) de su imagen respecto, en este caso, al mismo sistema. Sin embargo, y se incluye este comentario por curiosidad, del carácter biyectivo de f se deduce que $B'' = \{Q_0, Q_1, Q_2; V\}$ es otro sistema de coordenadas homogéneas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{Q})$ (razónese). Pues bien, si se sigue ahora considerando en el dominio el mismo sistema canónico, pero se toma en la imagen el sistema B'', la ecuación de $\mathcal{P}(f)$ adquiriría la forma

$$\lambda(x'_0, x'_1, x'_2) = (x_0, x_1, x_2).$$

Ahora toca el turno de introducir aplicaciones entre espacios afines. Sea $f : V \to V'$ un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales V y V' de dimensión $n+1$ sobre el cuerpo K. Un hiperplano H de V se transforma por f en un hiperplano $H' = f(H)$ de V'. Como $\mathcal{P}(f)\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}(H')$, la proyectividad $\mathcal{P}(f)$ se restringe de dominio e imagen sin problemas a los afines $\mathcal{A}(V, H)$ y $\mathcal{A}(V', H')$. A esta restricción, que se denotará por $\mathcal{A}(f)$, se le llamará una *afinidad*. Como ya se advirtió, prolifera un desmadre general a la hora de etiquetar las aplicaciones entre estructuras geométricas del que tampoco se libran estos apuntes. Así, en alguna literatura, a lo que aquí se conoce como afinidades las denominan isomorfismos afines o, incluso, colineaciones.

Tómense ahora sistemas de coordenadas homogéneas $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathcal{P}(V)$ y $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathcal{P}(V')$ tales que

$$H =< u_1, \ldots, u_n > \quad \text{y} \quad H' =< v_1, \ldots, v_n > .$$

Cada $f(u_i)$ se expresa como combinación lineal de los v_i por medio de $f(u_i) = \sum_j \alpha_{ij} v_j$. En los párrafos previos se vio que la proyectividad $\mathcal{P}(f)$ inducida por f queda descrita por la ecuación

$$\lambda(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n0} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

donde si $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ representa a las coordenadas homogéneas de $P \in \mathcal{P}(V)$ en el primero de los sistemas, entonces $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ constituyen las de $\mathcal{P}(f)(P)$ en el segundo. Como $< u_0 >$ no pertenece a $\mathcal{P}(H)$, su imagen por $\mathcal{P}(f)$ caerá fuera de $\mathcal{P}(H')$ y $\alpha_{00} \neq 0$. No hay inconveniente en poner $\alpha_{00} = 1$ debido a que se trata de coordenadas homogéneas. (Razonando de otra forma, sustitúyase el escalar λ por $\lambda\alpha_{00}^{-1}$.) Por otro lado, cada $< u_i >$ con $i > 0$ se aplica dentro de $\mathcal{P}(H')$ lo que implica que los $\alpha_{i0} = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si P está en el afín (lo cual permite tomar $\lambda_0 = 1$), entonces $\mathcal{A}(f)P$ también (y $\mu_0 = 1$). Reuniendo todas estas consideraciones se obtiene la ecuación de la afinidad $\mathcal{A}(f)$

$$(1, y'_1, \ldots, y'_n) = (1, y_1, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{0n} \\ 0 & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $y = (y_1, \ldots, y_n)$ representa a las coordenadas cartesianas de un punto de $\mathcal{A}(V, H)$ y $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ las de su imagen. Pero también puede escribirse la anterior igualdad mediante

$$y' = a + yA,$$

siendo a el vector fila $(\alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0n})$ y A la matriz cuadrada de orden n con coeficientes en K' dada por $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. En conclusión, la afinidad $\mathcal{A}(f)$ no es sino la composición $\tau_a \circ g$ del automorfismo lineal $g : y \mapsto yA$ del espacio vectorial K^n con la traslación $\tau_a : y \mapsto a + y$ de K^n. De hecho, así definen algunos textos las afinidades.

§2 El teorema fundamental de la geometría proyectiva

Se advierte que lo que aquí se denomina "teorema fundamental de la geometría proyectiva" en otra bibliografía aparece como segundo teorema fundamental[2].

Sea $\mathcal{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión $n \geq 1$ sobre un cuerpo K. Tómense en él $n+1$ puntos independientes

$$P_0 =< u_0 >, P_1 =< u_1 >, \ldots, P_n =< u_n >$$

y otro punto más $P =< u >$ con la propiedad de no pertenecer a ninguno de los hiperplanos engendrados por n de entre los primeros $n+1$ puntos. Recuérdese que esto fabrica un sistema de coordenadas homogéneas de puntos base $P_0, \ldots, P_n$ y punto unidad P. En general, a la configuración de los $n+2$ puntos anteriores se le denomina un *símplex*. En cualquier caso, los vectores $u_0, \ldots, u_n$ determinan una base de V en la cual u se expresa mediante $u = \sum \lambda_i u_i$ con todos los escalares λ_i distintos de 0. Póngase ahora $P_i =< v_i >$

[2] *En dichos textos, el primer teorema fundamental se refiere a las colineaciones introducidas en la anterior nota a pie de página. Simplificando el enunciado, el teorema afirma que si hay una colineación σ entre dos espacios proyectivos $\mathcal{P}_n(K)$ y $\mathcal{P}_n(K')$ $(n{>}1)$, existe entonces un isomorfismo $\tau{:}K{\cong}K'$ entre los cuerpos, y σ es la inducida por un isomorfismo τ-semilineal entre los espacios vectoriales asociados. Se trata de un resultado de gran belleza (véase [Artin]) que combina álgebra y geometría, pero cuya demostración, por desgracia, excede del propósito de estos apuntes.*

con cada $v_i = \lambda_i u_i$ y considérese el sistema de coordenadas homogéneas $\{v_0, \ldots, v_n\}$ en el cual el punto P tiene a $(1, 1, \ldots, 1)$ por coordenadas.

Supóngase que $\sigma = \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ es una proyectividad que deja fijos a los $n + 2$ puntos del símplex. Entonces $f(u) = \lambda u$ y $f(v_i) = \alpha_i v_i$ para $n+2$ escalares no nulos $\lambda, \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$. Ahora bien, de $f(u) = \sum f(v_i) = \sum \alpha_i v_i$ se obtiene $\lambda = \alpha_i$ para cada i, lo que implica que $f(v_i) = \lambda v_i$. Un cálculo directo prueba que $f(v) = \lambda v$ para cada v, o sea, f actúa como la homotecia de razón λ y, por tanto, $\sigma = 1_{\mathcal{P}(V)}$.

Teorema I.4.1 (Teorema fundamental de la Geometría proyectiva *Dados sendos símplex $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$ en espacios proyectivos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ de la misma dimensión $n > 0$ sobre un cuerpo K, existe una única proyectividad $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ que transforma uno en el otro, o sea, $\sigma(P_i) = Q_i$ para cada i.*

Demostración Sean σ y ρ proyectividades de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ que aplican el símplex $\{P_i\}$ en el símplex $\{Q_i\}$. El resultado se obtiene teniendo en cuenta que $\sigma^{-1}\rho$ es una proyectividad que deja fijos a todos los puntos de $\{P_i\}$ y que $\sigma^{-1}\rho = 1_{\mathcal{P}}$ si y solo si $\sigma = \rho$.

El teorema fundamental adquiere una provechosa importancia por el hecho de que basta con dar la imagen de un símplex para determinar por completo una proyectividad. De él se hará uso con bastante frecuencia de aquí en lo sucesivo.

Por mencionar en este momento alguna de sus aplicaciones inmediatas, supóngase que se dispone de dos fotografías aéreas de una misma zona de modo que se reconocen en una de ellas cuatro puntos de la otra con la propiedad de que no haya tres de ellos alineados, esto es, que constituyan un símplex del plano proyectivo real. En tal situación, el teorema fundamental afirma que se está en condiciones de asociar al resto de los puntos su correspondiente pareja. Tal labor se lleva a cabo por medio de un sencillo método gráfico que se tratará más adelante. Adviértase que este problema tiene su interés en estereoscopía, permitiendo reconstruir el relieve a partir de dos instantáneas planas.

El concepto de símplex ha resultado ser bastante fructífero, no solo en geometría proyectiva, sino en geometría afín, euclídea o en topología algebraica. Nótese que, al estar compuestos por $n+2$ puntos con n la dimensión del espacio proyectivo, los símplex[3] no son concebibles en espacios proyectivos vacíos o puntuales ($n \in \{-1, 0\}$). En ambos casos estarían constituidos por más puntos de los que hay en todo el espacio. De ahí la restricción $n > 0$ en las hipótesis del teorema fundamental.

§3 Proyectividades entre rectas de un plano

La siguiente definición evoca el proceso pictórico que inspiró a Desargues sus conceptos proyectivos de la geometría, pero reducido todo en una dimensión.

Definición I.4.1 Sean r y s dos rectas de un plano proyectivo y O un punto del plano no incidente con ninguna de las dos rectas. La *perspectividad de centro O de r sobre s* es la aplicación $\pi_O : r \to s$ que transforma cada punto A de r en la intersección A' de s con la recta $\overline{OA}$. En definitiva, $\pi_O(A) = A' = s \cap \overline{OA}$.

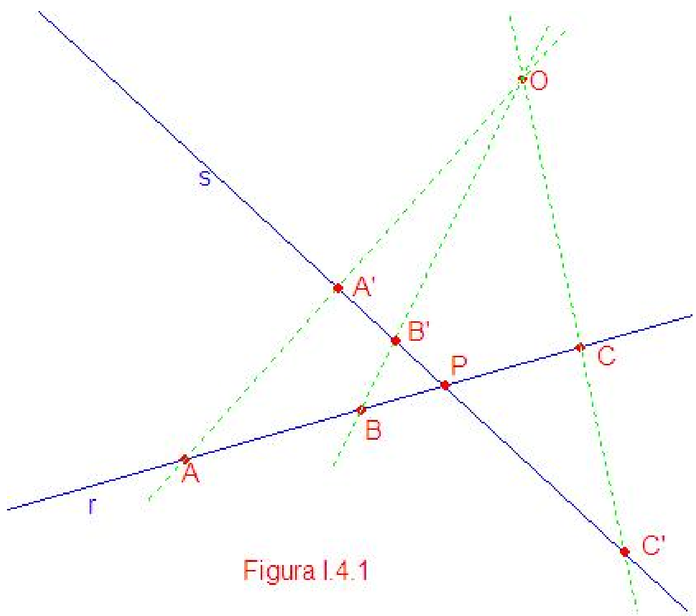


Figura I.4.1

[3] *Antes de recurrir al cursi plural símplices de alguna literatura, se prefiere considerar invariable en número al sustantivo símplex.*

Queda clara la procedencia del término perspectividad. Un ser bidimensional que observara la recta r desde el punto de vista O, la representaría en perspectiva sobre la recta s, convertida en lienzo rectilíneo, por medio de procedimiento indicado por π_O. En este caso, las rectas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, etcétera hacen las veces de rayos luminosos que proyectan cada punto sobre su imagen, y nunca mejor dicho lo de la imagen porque esta es precisamente la génesis del vocablo.

Se evidencia que toda perspectividad $\pi_O : r \to s$ es biyectiva así como que el punto de intersección M de r y s constituye un *punto doble* (punto que se aplica en sí mismo). Una propiedad elemental afirma que $r = s$ implica $\pi_O = 1_r$, luego la identidad constituye una perspectividad de centro cualquier punto del plano que no se sitúe en la recta dominio. Otra obviedad proviene del hecho de que la inversa de una perspectividad es otra perspectividad del mismo centro.

Pues bien, el concepto de perspectividad entre rectas proyectivas está bastante relacionado con el de proyectividad. Para verlo, se estudiará qué ocurre con las perspectividades al introducir coordenadas. Pártase para ello de una perspectividad $\pi_O : r \to s$ y fíjese en r un sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; C\}$ con $A =< a >$, $B =< b >$ y $C =< a + b >$ (sígase la Figura I.4.2). Denótense por A', B' y C' a las respectivas imágenes por π_O de A, B y C. Como A' no coincide con $O =< o >$ y está sobre la recta $\overline{OA}$, existe un único escalar $\alpha \in K$ tal que $A' =< \alpha o + a >$. En efecto, de $A' \in \overline{OA}$ se deduce que A' está engendrado por un vector $v = \lambda o + \mu a$. Como $A' \neq O$, ha de ser $\mu \neq 0$. Así, como cualquier múltiplo escalar de v engendra a A', tómese $A' =< \mu^{-1} v >$ y de ahí la afirmación anterior. Recuérdese este razonamiento pues se realizará de aquí en adelante con bastante frecuencia sin advertencia expresa. Por la misma razón, se encontrará un escalar β con $B' =< \beta o + b >$. Y no es preciso argumentar como antes para el punto C' puesto que éste se sitúa tanto en $\overline{OC}$ como en $\overline{A'B'}$. Así, no queda más remedio que satisfacerse $C' =< (\alpha + \beta) o + (a + b) >$, sin más que comprobar que el vector $(\alpha+\beta)o+(a+b)$ se expresa tanto como combinación lineal de o y del vector que genera a C, como combinación lineal de sendos vectores que generan a A' y a B'.

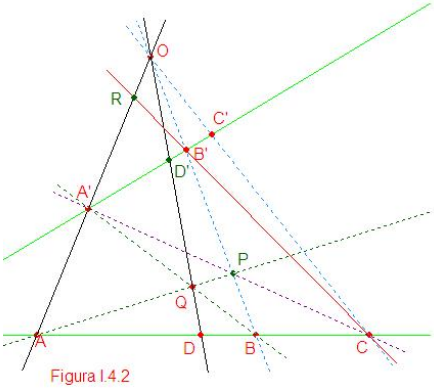


Figura I.4.2

El carácter biyectivo de π_O permite afirmar que A', B' y C' son distintos dos a dos, luego es lícito fijar en s el sistema de coordenadas homogéneas $\{A', B'; C'\}$. Tómese ahora un punto $D \in r$ distinto de A. Hay pues un único $\lambda \in K$ que satisface $D =< \lambda a + b >$. A este λ se le llamará la *abscisa* de D en el sistema en el que A está en el infinito, B en el origen y C actúa como punto unidad. La abscisa no es más que la coordenada cartesiana en la recta afín $r - A$. Se calculará a continuación la abscisa de $D' = \pi_O(D)$ en el sistema $\{A', B'; C'\}$ con A' como punto del infinito. El punto D' se sitúa en la intersección de $\overline{OD}$ con $\overline{A'B'}$. ¿Qué vector se expresa como combinación lineal de o y $\lambda a+b$ y, al mismo tiempo, como combinación lineal de $\alpha o+a$ y $\beta o+b$? Fácil, el vector $(\lambda\alpha+\beta)o+(\lambda a+b)$. Luego $D' =< (\lambda\alpha+\beta)o+(\lambda a+b) >$. Y como $(\lambda\alpha + \beta)o + (\lambda a + b) = \lambda(\alpha o + a) + (\beta o + b)$, la abscisa de D' coincide con la abscisa λ del punto del que era imagen. Se ha encontrado un hecho susceptible de definir.

Definición I.4.2 Sean A, B, C y D cuatro puntos sobre una recta proyectiva con los tres primeros distintos entre sí y D distinto de A. Por *razón doble de los cuatro puntos* se entenderá al valor que toma la abscisa λ del punto D en el sistema de coordenadas $\{A, B; C\}$ con A en el infinito (para el paso a coordenadas cartesianas), en cuyo caso se escribirá $(ABCD) = \lambda$.

Obsérvese, antes de proseguir, que siempre ocurre

$$(ABCB) = 0 \quad \text{y} \quad (ABCC) = 1.$$

Éstas constituyen las únicas situaciones posibles en rectas proyectivas sobre $\mathbb{Z}_2$ las cuales no contienen más que tres puntos. Por otro lado, la igualdad $(ABCB) = 0$ justifica el nombre de "punto origen" para B, así como $(ABCC) = 1$, la de "punto unidad" para C. En algunos textos se encuentran expresiones del tipo $(ABCA) = \infty$, lo cual, aparte de dañar la vista, exige manipulaciones algebraicas con el símbolo ∞ muy cercanas a la chapuza.

Con esta terminología, los razonamientos que se acaban de efectuar no han hecho sino probar que las perspectividades conservan la razón doble. Expresado de otro modo,

$$(\pi_O(A)\pi_O(B)\pi_O(C)\pi_O(D)) = (ABCD)$$

cualesquiera que se tomen A, B, C y D alineados con $A \neq B \neq C \neq A$ y $D \neq A$.

Ya que este concepto de razón doble parece gozar de un prometedor futuro, convendrá encontrar fórmulas que la calculen, dependiendo del formato en el sean proporcionados los datos. Supóngase, por ejemplo, que $r = \mathcal{P}(V)$ es una recta proyectiva sobre K y $\{a, b\}$ constituye una base de V (un sistema de coordenadas homogéneas de r). Escríbase $A =< a >$ y $B =< b >$ $(A \neq B)$. Tómense puntos $C =< c >$ y $D =< d >$ con $C \notin \{A, B\}$ y $D \neq A$. Entonces los vectores c y d se expresan como combinación lineal de a y b en la forma $c = \lambda_0 a + \lambda_1 b$ y $d = \mu_0 a + \mu_1 b$, obteniéndose las coordenadas homogéneas (λ_0, λ_1) de C y (μ_0, μ_1) de D. Para calcular la razón doble $(ABCD)$ hay que considerar a C como punto unidad, para lo cual se eligen sendos generadores $\lambda_0 a$ de A y $\lambda_1 b$ de B. El valor de $(ABCD)$ coincidirá con el escalar ν que satisfaga $D =< \nu(\lambda_0 a) + (\lambda_1 b) >$. Sabiendo que $d = \mu_0 a + \mu_1 b$, si se multiplican ambos miembros por $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ se tiene

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} d = \frac{\lambda_1 \mu_0}{\mu_1} a + \lambda_1 b,$$

con lo que se logra endosarle a b el coeficiente λ_1. Por último, multiplíquese y divídase el coeficiente de a por λ_0 y resulta

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}d = \frac{\lambda_1\mu_0}{\lambda_0\mu_1}\lambda_0 a + \lambda_1 b,$$

de donde $\frac{\lambda_1\mu_0}{\lambda_0\mu_1}$ es la abscisa del punto D buscada. En resumen, se ha confeccionado la fórmula

$$(ABCD) = \frac{\lambda_1\mu_0}{\lambda_0\mu_1}, \tag{1}$$

que da la razón doble de cuatro puntos alineados en función de las respectivas coordenadas (λ_0, λ_1) y (μ_0, μ_1) de vectores que engendran a los dos últimos puntos con respecto a una base integrada por vectores que generan a los dos primeros. No incordia la existencia de dos escalares λ_0 y μ_1 en el denominador ya que, al tomar $C \neq B$ y $D \neq A$, estos nunca se anularán.

Se estudiará ahora en el caso de que, en cierto sistema de coordenadas prefijado, son conocidas las abscisas α, β, γ y δ de los cuatro puntos anteriores A, B, C y D. Esto significa que hay vectores linealmente independientes u y v con $a = \alpha u + v$, $b = \beta u + v$, $c = \gamma u + v$ y $d = \delta u + v$. En semejantes condiciones, se pretende hallar $(ABCD)$ en términos de abscisas. Primero se debe resolver la ecuación vectorial $c = \lambda a + \mu b$ para ver cuáles son las coordenadas de c en la base integrada por A y B, lo que equivale a plantear el siguiente sistema lineal en las variables λ_0 y λ_1:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_0\alpha & + & \lambda_1\beta & = & \gamma \\ \lambda_0 & + & \lambda_1 & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Se trata de un sistema de Cramer ya que su determinante $\alpha - \beta$ nunca se anulará (¿por qué motivo?). Resolviéndolo, se concluye con

$$\lambda_0 = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} \qquad \text{y} \qquad \lambda_1 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta}.$$

Un procedimiento análogo llevará a expresar d como combinación lineal de los vectores a y b en la forma $d = \mu_0 a + \mu_0 b$ con

$$\mu_0 = \frac{\delta - \beta}{\alpha - \beta} \quad \text{y} \quad \mu_1 = \frac{\alpha - \delta}{\alpha - \beta}.$$

Por último, sustituyendo las coordenadas de c y d en la fórmula (1) y operando se obtiene

$$(ABCD) = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}, \tag{2}$$

relación que proporciona la razón doble, conocidas las abscisas de los puntos involucrados.

Ahora que se dispone de algunas herramientas algebraicas, puede regresarse al problema de encontrar las biyecciones entre rectas proyectivas que conservan razones dobles. Las perspectividades entre rectas de un plano se cuentan entre ellas, así como las biyecciones obtenidas como composición de perspectividades. Sin embargo, con la actual formulación de los objetivos, en los que no se está obligado a situar dominio e imagen dentro de un mismo plano, se puede establecer un ambiente de mayor generalidad.

Sea σ una biyección entre dos rectas proyectivas r y s sobre el mismo cuerpo K y satisfaciendo $(\sigma(P)\sigma(Q)\sigma(R)\sigma(S)) = (PQRS)$ para cualesquiera puntos $P, Q, R, S \in r$ tales que la razón doble $(PQRS)$ tenga sentido. Fíjense sendos sistema de coordenadas $\{A, B; C\}$ de r y $\{A', B'; C'\}$ de s con $A' \neq \sigma(A)$[4]. Denótense por α, β y γ a las abscisas respectivas, referidas al último de los sistemas, de los puntos $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ y $\sigma(C)$. se pretende hallar una relación entre la abscisa x de un punto arbitrario X de r y la abscisa x' de $X' = \sigma(X)$. Dicho de otra manera, se desea encontrar la ecuación de σ en términos de abscisas. Para $X \neq A$, se tiene $x = (ABCX) = (\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C)X')$. La fórmula (2) permite escribir

$$x = \frac{(\gamma-\alpha)(x'-\beta)}{(\gamma'-\beta)(x'-\alpha)}.$$

Para despejar x', habrá que quitar denominadores, trasponer y agrupar términos semejantes. Tras ello, se llegará a una igualdad del tipo

$$(\mu_0 + \mu_1 x)x' = \lambda_0 + \lambda_1 x, \tag{3}$$

[4] *El caso restante ($A'=A$) será tratado en la tanda de ejercicios..*

en la cual, evitando complicaciones, no es preciso molestarse en calcular los valores de los escalares λ_0, λ_1, μ_0 y μ_1. Aquí hay que detenerse por un momento a reflexionar puesto que el coeficiente de x' tal vez se anule para algún valor de x. ¿Para cuántos?: exactamente para uno, la única raíz del polinomio de primer grado $\mu_0 + \mu_1 x$. Esto no debe de extrañar puesto que no todo punto de s tiene derecho a una abscisa, en concreto, el punto impropio de s es el único de tal recta sin abscisa (no posee coordenada cartesiana puesto que no pertenece a la recta afín). Luego se conviene, porque no hay otra posibilidad, en que el punto de r de abscisa $-\frac{\mu_0}{\mu_1}$ se aplica por σ en el punto del infinito de s.

Por otro lado, no se equivocaría quien afirme que los vectores (μ_0, μ_1) y (λ_0, λ_1) del K-espacio vectorial K^2 han de ser independientes. En efecto, en caso de que fuesen dependientes, se consideraría el isomorfismo $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda + \mu x$ de K^2 al espacio vectorial bidimensional de los polinomios de primer grado en la indeterminada x con coeficientes en K, que haría del polinomio $\lambda_0 + \lambda_1 x$ un proporcional al polinomio $(\mu_0 + \mu_1 x)$. En tal situación, x' se mantendría constante según la igualdad (3), en contra de la sobreyectividad de σ. De la independencia lineal de (μ_0, μ_1) y (λ_0, λ_1) se concluye con

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 \neq 0.$$

Pues bien, para cada punto X de la recta r de abscisa $x \neq -\frac{\mu_0}{\mu_1}$, la abscisa x' de su imagen toma la forma

$$x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x},$$

con $\lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 \neq 0$.

¿Y el punto del infinito de r?, ¿dónde va a parar? Vuélvase a la expresión (3) de más arriba e inténtese ahora despejar x como si se pretendiera encontrar la ecuación de σ^{-1} en lugar de la de σ. Así

$$(-\lambda_1 + \mu_1 x')x = \lambda_0 - \mu_0 x',$$

ecuación que sólo posee soluciones en x cuando $x' \neq \frac{\lambda_1}{\mu_1}$. Éste es el único punto de s al que no se llega por medio del cociente $\frac{\lambda_0+\lambda_1 x}{\mu_0+\mu_1 x}$ por mucho que se varíe x entre los escalares de K. Y como da la casualidad de que sólo hay un punto de r sin abscisa, el impropio, éste ha de aplicarse en el punto de s de abscisa $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$.

Resumiendo, dada una biyección σ entre rectas proyectivas r y s sobre el mismo cuerpo K que conserve razones dobles, resulta factible encontrar una relación del tipo

$$x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x},$$

con λ_0, λ_1, μ_0, y μ_1 cuatro escalares satisfaciendo $\lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 \neq 0$, que proporciona la abscisa x' de la imagen por σ de cada punto de abscisa x, pero con la salvedad de que el punto impropio de r se transforma en el punto de abscisa $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ y el punto de abscisa $-\frac{\mu_0}{\mu_1}$ se aplica en el punto del infinito de s.

A la igualdad anterior se le denomina la *ecuación explícita* de σ. A las imágenes y originales de los respectivos puntos impropios de r y s se las conoce bajo el nombre de *puntos límite*.

¿Y si se hubiese recurrido a las coordenadas homogéneas en vez de a las abscisas? Para ahorrarse comenzar de nuevo con una serie interminable de cálculos, se aprovechará todo lo posible lo ya realizado. Supóngase que el punto X de r de coordenadas homogéneas (x_0, x_1) se aplica en el punto X' de s de coordenadas (x'_0, x'_1). Puestos en el caso de que X no es el punto del infinito de r ni es un punto límite (X' no es es el punto impropio de s), resulta lícito el paso a cartesianas haciendo $x = \frac{x_1}{x_0}$ la abscisa de X y $x' = \frac{x'_1}{x'_0}$ la de X'. Sustituyendo en la ecuación explícita y operando se obtiene

$$\frac{x'_0}{\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1} = \frac{x'_1}{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lambda(x'_0, x'_1) = (x_0, x_1)\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Andando, qué sorpresa, la ecuación de una proyectividad. Sí, es la ecuación de una proyectividad porque el determinante de la matriz no se anula. Ahora va a resultar que estas biyecciones entre rectas que conservan razones dobles son proyectividades. No hay que precipitarse. todavía hay que examinar qué ocurre con las excepciones a la ecuación explícita de σ. Cuando X cae en el infinito, sus coordenadas toman la forma $(0,1)$. Entonces

$$(0,1)\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\mu_1, \lambda_1),$$

y el par (μ_1, λ_1) coincide con las coordenadas homogéneas del punto límite de abscisa $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$. Además, si se resuelve la ecuación

$$\lambda(0,1) = (x_0, x_1)\begin{pmatrix} \mu_0 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

multiplicando a la derecha por la adjunta de la traspuesta de la matriz de la proyectividad, se concluye con que el otro punto límite no es sino el de coordenadas homogéneas $(\mu_1, -\mu_0)$, que cuadra con la abscisa que ha de poseer.

Se confirma pues que las biyecciones entre rectas proyectivas sobre el mismo cuerpo que conservan razones dobles son proyectividades. En particular, las biyecciones obtenidas como composición de perspectividades son proyectividades entre rectas del mismo plano. ¿Se dará también el recíproco? Debe investigarse.

Pártase de una proyectividad σ entre dos rectas distintas r y s del mismo plano proyectivo $\mathcal{P}$. Por el teorema fundamental (teorema I.4.1) bastará dar la imagen de tres puntos distintos de r (un símplex) para determinar por completo a σ. Escójanse A, B y C en r distintos dos a dos y denótense por A', B' y C' a sus respectivas imágenes de s (véase la figura I.4.3). En la recta $\overline{AA'}$, elíjanse dos puntos arbitrarios O fuera de r y O' fuera de s. Constrúyanse ahora los puntos $B'' = \overline{OB} \cap \overline{O'B'}$ y $C'' = \overline{OC} \cap \overline{O'C'}$. Si se llama t a la recta determinada por B'' y C'', sea $A'' = t \cap \overline{AA'}$

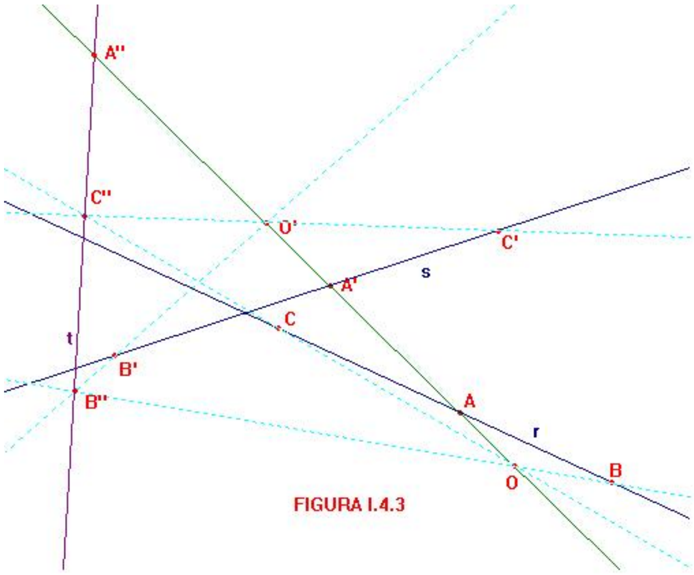
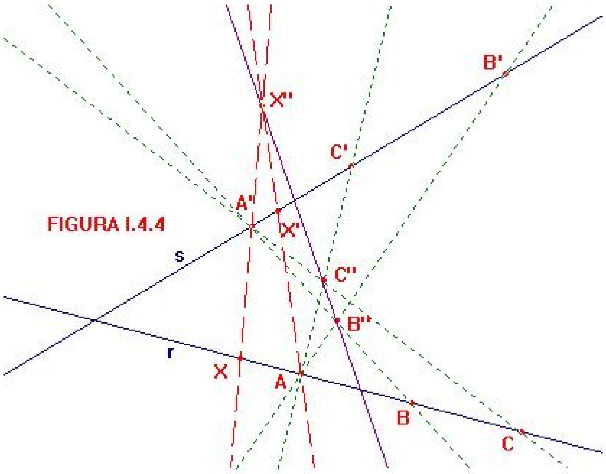


FIGURA I.4.3

Se denotará por π_O a la perspectividad de r sobre t de centro O, y por $\pi_{O'}$ a la perspectividad de t sobre s de centro O'. Se afirma entonces que $\sigma = \pi_{O'} \circ \pi_O$. En efecto, por un lado $(\pi_{O'} \circ \pi_O)(A) = \pi_{O'}(A'') = A'$ y, del mismo modo, se comprueba que $\pi_{O'} \circ \pi_O$ transforma B en B', y C en C'. Recuérdese que la composición de perspectividades $\pi_{O'} \circ \pi_O$, por lo demostrado más arriba, es una proyectividad. Se tienen pues dos proyectividades, σ y $\pi_{O'} \circ \pi_O$, que actúan de la misma forma sobre el símplex $\{A, B, C\}$. El teorema fundamental (teorema I.4.1) obliga a que ambas coincidan y, por lo tanto, σ es composición de perspectividades. ¿Se ha acabado? Aún no, debe examinarse el caso en que $r = s$.

Sea ahora $\sigma : r \to r$ una proyectividad con r una recta sumergida en un plano proyectivo. Tómense como antes tres puntos A, B y C de r distintos entre sí. Escójase otra recta s distinta de r y un punto O no situado ni en r ni en s. La perspectividad π_O de r sobre s y de centro O lleva A a un A''', B a un B''' y C a un C''' (figura I.4.4). Descompóngase ahora, haciendo uso del procedimiento anterior, la proyectividad τ de s a r, que satisface $\tau(A''') = \sigma(A)$, $\tau(B''') = \sigma(B)$ y $\tau(C''') = \sigma(C)$ en producto de dos perspectividades $\pi_{O''} \circ \pi_{O'}$.



En estas circunstancias, la proyectividad σ queda expresada como composición de tres perspectividades en la forma $\sigma = \pi_O \circ \pi_{O''} \circ \pi_{O'}$.

No sólo ha sido resuelto el problema original, sino que se ha obtenido bastante información, si se ordenan con lógica los resultados. Las composiciones de perspectividades conservan razones dobles. Las biyecciones entre rectas que conservan razones dobles son proyectividades. Las proyectividades entre rectas del mismo plano se descomponen en producto de, a lo sumo, tres perspectividades.

El haber cerrado un razonamiento circular, permite también hacerle corresponder a cada proyectividad entre rectas r y s sobre el mismo cuerpo una ecuación explícita. Recapacitando: con anterioridad se vio cómo una biyección entre r y s que conservaba razones dobles inducía una relación del tipo $x' = \frac{\lambda_0+\lambda_1 x}{\mu_0+\mu_1 x}$, entre las abscisas x de los puntos de r y las abscisas x' de sus imágenes. Tal relación estaba sujeta a determinadas restricciones que no es preciso repetir. En aquel momento, para justificar el término "ecuación", se debió comprobar que cualquier relación de ese tipo entre abscisas definía una biyección con la propiedad de conservar razones dobles. Ya no hace falta, pues aquellas ecuaciones determinaban proyectividades y la proyectividades, a la postre, conservan razones dobles.

La serie de hechos demostrados se compendian en el siguiente

Teorema I.4.2 *Sea $\sigma : r \to s$ una biyección entre rectas de un mismo plano proyectivo. Entonces, son equivalentes:*

i) *σ conserva razones dobles,*

ii) *σ es una proyectividad y*

iii) *σ se descompone en producto de perspectividades.*

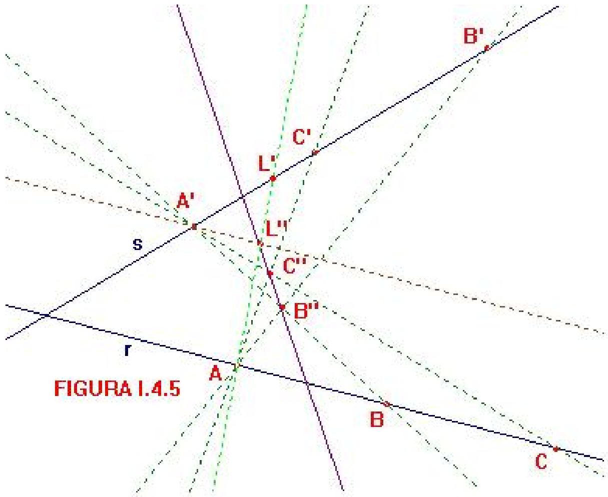
Además, en la situación descrita en iii), el número de perspectividades en que σ factoriza puede reducirse a una cantidad no superior a 3, o incluso a 2, si las rectas son distintas.

Otra verdad sencilla de probar se recoge en el siguiente

Teorema I.4.3 *Una condición necesaria y suficiente para que una proyectividad σ entre dos rectas r y s del mismo plano sea una perspectividad es que el punto de intersección de r con s constituya un punto doble.*

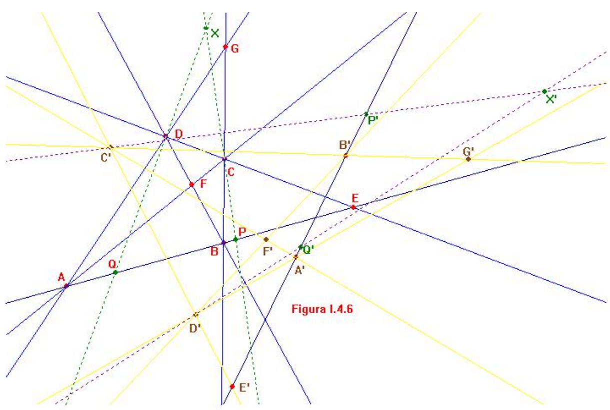
Demostración En un sentido ya se vio al comienzo de esta sección: cada perspectividad entre dos rectas deja fijo al punto de corte. Para el recíproco, escríbase $A = r \cap s$ y tómense B y C en $r - \{A\}$ distintos entre sí. Las rectas $\overline{B\sigma(B)}$ y $\overline{C\sigma(C)}$ han de compartir un punto O. La perspectividad π_O de centro O de r sobre s lleva B a $\sigma(B)$, C a $\sigma(C)$ y deja invariante al punto A. Pero σ opera de igual forma sobre esos tres puntos del símplex (A, B, C). El teorema fundamental obliga a que σ coincida con π_O.

Una aplicación inmediata de los razonamientos que desembocan en el teorema I.4.2 permite el trazado gráfico de proyectividades, y no sólo entre rectas del mismo plano, sino de todo un plano en sí mismo. Para ello se representan en la figura I.4.5 los puntos A, B y C de una recta r y sus imágenes A', B' y C' en s por cierta proyectividad σ. Se pretende encontrar la imagen X' del punto X.



Primero se procede a descomponer σ en producto de perspectividades. En la recta $\overline{AA'}$ habrá que elegir los centros de perspectiva. Puesto que, en este ejemplo, tales puntos difieren del punto $r \cap s$, pueden tomarse ellos mismos para tal menester reduciendo el número de elementos geométricos y simplificando el trazado. Hágase pues $B'' = \overline{A'B} \cap \overline{AB'}$ y $C'' = \overline{A'C} \cap \overline{AC'}$. Ahora $\sigma = \pi_A \circ \pi_{A'}$. La recta $\overline{A'X}$ corta a $\overline{B''C''}$ en X''. El punto X' se obtiene ahora como intersección de $\overline{AX''}$ con s.

Para dibujar los puntos límite se debe recurrir al paralelismo. El punto impropio de r se transforma por $\pi_{A'}$ en la intersección L'' de $\overline{B''C''}$ con una paralela a r por A' (figura I.4.6). La perspectividad π_A transforma L'' en $L' = \overline{AL''} \cap s$.



Para el otro punto límite se trazaría una paralela a s por A, cuya intersección con $\overline{B''C''}$ se denota por L'''. Entonces, el punto L de r que se transforma en el punto del infinito de s vendrá dado por $L = \overline{A'L'''} \cap r$.

Cuando se trate de una proyectividad de una recta en sí misma se obrará de forma similar, pero con el engorro de manejar tres perspectividades en lugar de dos.

Se finalizará esta sección con algunas propiedades acerca de razones dobles. Se probará, por ejemplo, que $(ABCD) = (BADC)$. Puede optarse por una demostración algebraica, haciendo uso de las fórmulas (1) y (2) que proporcionan la razón doble, o por una prueba sintética. Para ésta última, sumérjase en un plano a la recta r, a la que pertenecen los cuatro puntos, y trácese por D otra recta s distinta de r (figura I.4.7). Elíjase un punto P fuera de r y de s y constrúyanse los puntos Q, R y S como las respectivas imágenes de A, C y B por la perspectividad $\pi_P : r \to s$. Sea $T = \overline{AS} \cap \overline{PC}$.

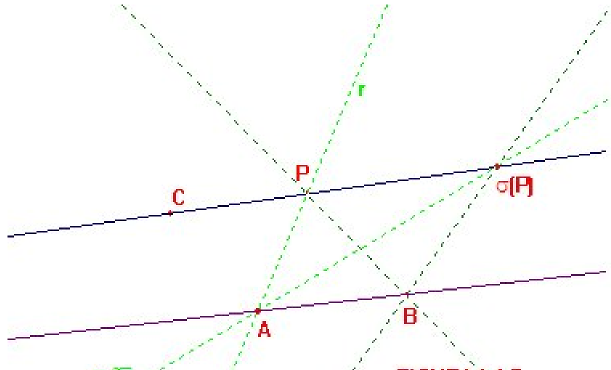


FIGURA I.4.7

Pues bien, la perspectividad de centro P proporciona la igualdad

$$(ABCD) = (QSRD),$$

la de centro A, la igualdad $(QSRD) = (PTRC)$ y, por último, teniendo en cuenta la perspectividad de centro S, se tiene $(PTRC) = (BADC)$ que es lo que se pretendía demostrar. Métodos como éste o el uso directo de las fórmulas sobre razones dobles permiten enunciar el

Teorema I.4.4 *Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos dos a dos de una recta proyectiva con $(ABCD) = \lambda$. Se tiene entonces:*

$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda$

$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\lambda}$

$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - \lambda$

$(ADBC) = (DACB) = (BCAD) = (CBDA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$

$(ACDB) = (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = \frac{1}{1-\lambda}$

$(ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

El resultado anterior reduce a un máximo de 6 las posibles razones dobles de cuatro puntos distintos que, en principio, podrían ordenarse de $24 = 4!$ maneras.

§4 Involuciones

Dada una proyectividad σ entre rectas r y s sobre el mismo cuerpo K y fijados en ellas sendos sistemas de coordenadas, existen escalares λ_0, λ_1, μ_0 y μ_1 donde $\lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 \neq 0$ que proporcionan la ecuación explícita de σ

$$x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x}.$$

Operando, se llega a

$$\lambda x x' + \mu x + \nu x' + \zeta = 0,$$

con $\lambda = \mu_1$, $\mu = -\lambda_1$, $\nu = -\mu_0$ y $\zeta = -\mu_1$, expresión esta denominada *ecuación general* o *implícita* de σ. Habida cuenta de las sustituciones, se tiene que $\lambda\zeta - \mu\nu \neq 0$ y los puntos límite vienen dados por aquellos cuyas abscisas respectivas son $x = -\frac{\nu}{\lambda}$ y $x' = -\frac{\mu}{\lambda}$.

Hay un procedimiento tosco y falto de rigor, pero que sirve como regla nemotécnica, para acordarse de estas últimas fórmulas. Supóngase que se quiere obtener el punto límite de s, es decir, la imagen del punto del infinito de r. Divídase entonces la ecuación general por x y "hágase tender x a infinito":

$$\lim_{x\to\infty}(\lambda x' + \mu + \frac{\nu x'}{x} + \frac{\zeta}{x}) = 0.$$

Por supuesto que, en general, no se puede hablar de un límite auténtico pues no se tiene definida una topología ni una métrica ni nada de lo preciso para usar límites, sin embargo, razonando como en la recta real, en donde una fracción racional tiende a cero si el denominador posee grado mayor que el numerador, se llega, por pura casualidad, a la expresión, $\lambda x' + \mu = 0$, y despejando x' aparece la abscisa del punto límite. De modo análogo se procedería para el otro punto límite [5].

La ecuación general de una proyectividad ofrece, como se verá a continuación y en los ejercicios, una herramienta muy cómoda para su estudio.

Si en la proyectividad σ de ecuación general $\lambda xx' + \mu x + \nu x' + \zeta = 0$ coinciden dominio e imagen, tiene sentido hablar de puntos dobles (recuérdese, puntos que se aplican en sí mismos y para los cuales, por consiguiente, se tiene $x = x'$). El cálculo de los puntos dobles de tal proyectividad se reducirá a la resolución de la ecuación

$$\lambda x^2 + (\mu + \nu)x + \zeta = 0,$$

la cual puede ser de primero o de segundo grado según λ se anule o no, pero también de grado 0 si $\sigma = 1_r$ (¿por qué causa?)

Las ecuaciones de primer grado se interpretarán en la tanda final de problemas. Para las de segundo grado, hay tres opciones, que el polinomio $\lambda x^2 + (\mu + \nu)x + \zeta$ posea dos raíces, en cuyo caso se dirá de σ que es una proyectividad *hiperbólica*, que sólo tenga una raíz, y se la llamará *parabólica*, o ninguna, y se hablará de proyectividad *elíptica*. La razón de tales apellidos se justificará cuando se estudien más adelante las cónicas.

Definición I.4.3 De una proyectividad σ de una recta r en sí misma se dice que es una *involución*, si $\sigma^2 = 1_r$.

Lema I.4.1 *Una condición suficiente para que una proyectividad σ de una recta r en sí misma sea una involución distinta de la identidad es que*

[5] *Se advierte de nuevo que esta es solo una regla mnemotécnica para memorizar las abscisas de los puntos límite de una proyectividad dada por su ecuación general, y que el menor parecido con un razonamiento matemático de mediano rigor es pura coincidencia.*

exista un punto $A \in r$ *tal que* $\sigma(A) \neq A$ *y* $\sigma^2(A) = A$.

Demostración En un sentido es trivial pues si $\sigma : r \to r$ no es la identidad, ha de existir un $A \in R$ con $\sigma(A) \neq A$. El carácter involutivo de σ implica $\sigma^2(A) = A$. Supóngase entonces que σ es una proyectividad de una recta r en sí misma para la que existe un punto $A \in r$ con $B = \sigma(A) \neq A$ y $\sigma^2(A) = \sigma(B) = A$. Escríbase ahora $\sigma = \mathcal{P}(f)$ y $A =< v >$, donde f es el automorfismo lineal que induce la proyectividad. Como $B =< f(v) >$ y $\sigma(B) = A$, ha de ocurrir que $f^2(v) = \lambda v$ para algún escalar no nulo λ. Considérese el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; C\}$ con $C =< v + f(v) >$. (Razónese por qué C no puede coincidir ni con A ni con B.) Se comprobará que la proyectividad σ^2 deja invariable al símplex $\{A, B, C\}$, lo cual finalizará la prueba por simple aplicación del teorema fundamental. En efecto,

$$\sigma^2(B) =< f^2(f(v)) >=< \lambda f(v) >= B \quad \text{y}$$

$$\sigma^2(C) =< f^2(v + f(v)) >=< \lambda v + \lambda f(v) >= C.$$

Es fácil reconocer cuándo una proyectividad $\sigma : r \to r$ es una involución dando un simple vistazo a su ecuación general. Que

$$\lambda x x' + \mu x + \nu x' + \zeta = 0 \tag{4}$$

sea la ecuación general de una proyectividad σ, significa que las abscisas x y x' de un punto y de su imagen están ligadas por tal relación. Pero si σ es involutiva, entonces el punto de abscisa x' se transforma en el de abscisa x y los papeles de original e imagen se intercambian. Esto llevaría a escribir

$$\lambda x' x + \mu x' + \nu x + \zeta = 0. \tag{5}$$

Restando (5) de (4) y operando se llega a $(\mu - \nu)(x - x') = 0$. Basta que haya un punto que no sea doble (uno con abscisa $x \neq x'$), para que $\mu = \nu$. Si, por el contrario, todo punto fuera doble, entonces se trataría de la involución identidad, de ecuación $x - x' = 0$. En cualquier caso, la ecuación general es simétrica en las variables x, x'.

Recíprocamente, sea $\sigma : r \to r$ una proyectividad con ecuación general simétrica en las variables x y x', o sea, del tipo, $\lambda xx' + \mu(x + x') + \zeta = 0$. Tómese un punto cualquiera $B \in r$ de abscisa β y llámese β' la abscisa de $B' = \sigma(B)$. Se tiene $\lambda\beta\beta' + \mu(\beta + \beta') + \zeta = 0$. Pero esto implica también que $\sigma(B') = B$, luego $\sigma^2(B) = B$ para cada punto de r. En definitiva, la simetría en las variables x, x' resulta ser un rasgo distintivo de las involuciones.

Las involuciones jugarán un papel decisivo en capítulos posteriores, gracias, en particular, al teorema con que finalizará esta sección. Además, este importante resultado proporcionará un método para el cálculo gráfico de una involucion más cómodo que el de descomponerla en producto de tres perspectividades. A tal fin se introducen los siguientes conceptos.

A un símplex de un plano proyectivo $\mathcal{P}$ también se le denomina un *cuadrivértice*, esto es, un conjunto de cuatro puntos $\{A, B, C, D\}$ llamados *vértices* tales que no hay tres de ellos alineados. Estos cuatro puntos determinan seis rectas distintas, a saber, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$, las cuales se cortan en siete puntos: los cuatro vértices de partida y los dados por $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $F = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ y $G = \overline{AD} \cap \overline{BC}$, designados como *puntos diagonales*. (Razónese por qué han de ser distintos entre sí tanto los siete puntos como las seis rectas anteriores.) Por *cuadrilátero* se entenderá al concepto dual de cuadrivértice. Así, un cuadrilátero estará constituido por cuatro rectas $\{a, b, c, d\}$ tales que no haya tres de ellas concurrentes. A tales rectas se las conoce como los *lados* del cuadrilátero. Los cuatro lados se intersecan en seis puntos que determinan siete rectas, tres de las cuales, las *diagonales*, se diferencian de las cuatro de partida. En la figura I.4.8 han sido etiquetadas estas tres rectas como e, f y g con $e = \overline{(a \cap b)(c \cap d)}$, $f = \overline{(a \cap c)(b \cap d)}$ y $g = \overline{(a \cap d)(b \cap c)}$. (Observe el lector el proceso de dualización: $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ dualiza en $e = \overline{(a \cap b)(c \cap d)}$, puesto que la recta determinada por dos puntos distintos es el subespacio suma de ambos.)

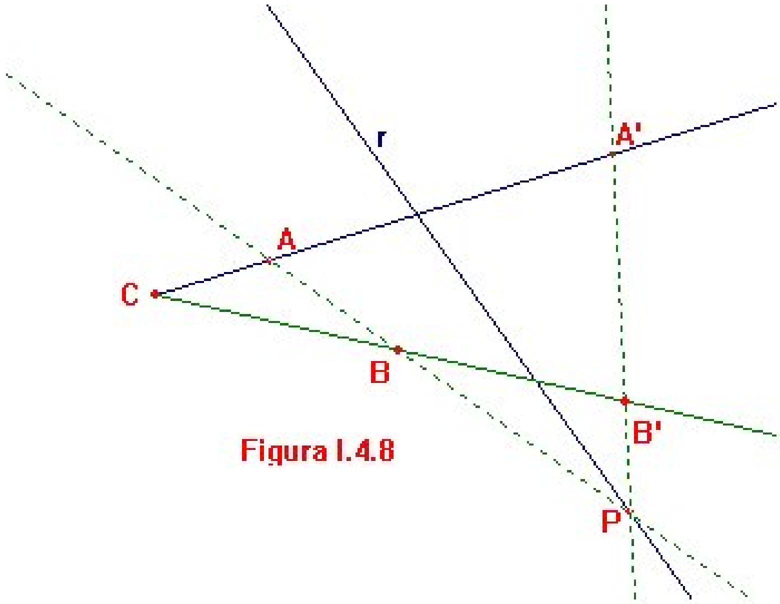


Figura I.4.8

Se evidencia que cada cuadrivértice $\{A, B, C, D\}$ determina varios cuadriláteros. Por exhibir uno, el $\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}\}$, aunque también podría escogerse el

$$\{\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{DA}\} \quad \text{o el} \quad \{\overline{AB}, \overline{BD}, \overline{CD}, \overline{AC}\}.$$

De ahí que a veces se disloque el lenguaje entreverando términos de cuadrivértices en un ambiente referido a cuadriláteros o viceversa.

Teorema I.4.5 (Segundo teorema de Desargues [6]) *Sea* $\{A, B, C, D\}$ *un cuadrivértice de un plano proyectivo y* r *una recta del plano que no contiene a ninguno de los vértices y que corta a* $\overline{BC}$ *en* P*, a* $\overline{AD}$ *en* P'*, a* $\overline{AB}$ *en* Q*, a* $\overline{CD}$ *en* Q'*, a* $\overline{BD}$ *en* R *y a* $\overline{AC}$ *en* R' (figura I.4.9). *Entonces, la única proyectividad* $\sigma : r \to r$ *que aplica* P *en* P'*,* Q *en* Q' *y* R *en* R' *es una involución* [7].

[6] *La razón de llamarlo segundo teorema de Desargues estriba en que es otro el resultado que el mundo matemático conoce universalmente como teorema de Desargues (sin ordinal). A él se dedicará un intesivo estudio en el capítulo siguiente.*

[7] *En prosa arcaica el teorema se enunciaba diciendo que* una recta corta a los lados opuestos de un cuadrivértice según parejas de puntos que están en involución. *Aquí, por lado se ha entendido a cualquiera de las* 6 *rectas determinadas por dos de los vértices, y por lado opuesto de este, al que pasa por los otros dos vértices del cuadrivértice, por ejemplo, el lado opuesto al* $\overline{BD}$ *sería el* $\overline{AC}$.

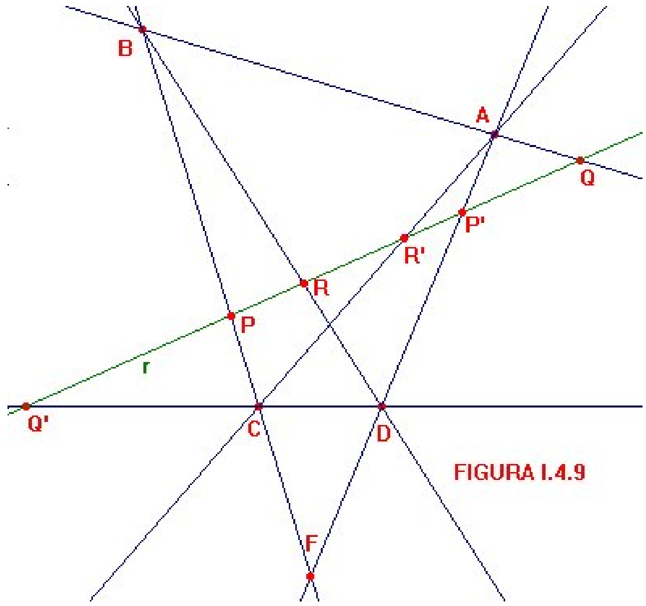


FIGURA I.4.9

Demostración Supóngase, en primer lugar, que al menos uno de los puntos P, Q o R no se transforma en sí mismo, por ejemplo $P \neq P'$. La perspectividad de centro B de r sobre el lado $\overline{AD}$ lleva Q a A, R a D, P al punto diagonal $F = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ y deja fijo a P'. Del teorema I.4.2 se desprende la igualdad $(QRPP') = (ADFP')$. Por otro lado, la perspectividad de centro C permite escribir $(ADFP') = (R'Q'PP')$ y, junto con el teorema I.4.4, $(R'Q'PP') = (Q'R'P'P)$. Pero σ conserva razones dobles, por lo cual $(QRPP') = (Q'R'P'\sigma(P'))$. De ahí que $\sigma(P')$ tenga, en el sistema de coordenadas $\{Q', R'; P'\}$, la misma abscisa que P. Así $\sigma^2(P) = \sigma(P') = P$ y el lema I.4.1 hace de σ una involución. En el caso restante, las condiciones $P = P'$, $Q = Q'$ y $R = R'$ exigen a r que circule sobre los tres puntos diagonales, situación en verdad posible. Sí, aunque parezca poco intuitivo, hay ciertos cuerpos, que se caracterizarán en cuanto se acabe esta demostración, con la peculiaridad de que en los planos proyectivos sobre ellos los puntos diagonales de los cuadrivértices están alineados. Pero aunque esto resulte algo chocante, tampoco importa pues si $P = P'$, $Q = Q'$ y $R = R'$, entonces el teorema fundamental asegura que $\sigma = 1_r$ y de nuevo se obtiene una involución, lo que finaliza la prueba.

Como ya se anunció con anterioridad, este segundo teorema de Desargues proporciona un método gráfico para el cálculo de las imágenes de una involución que será tratado en los ejercicios.

§5 El teorema de Fano

Pero ahora lo que ha suscitado nuestro interés es caracterizar esos planos en los que los tres puntos diagonales de un cuadrivértice están alineados. Para ello, supóngase que $A =< a >$, $B =< b >$, $C =< c >$ y $D =< d >$ disponen un cuadrivértice en un plano proyectivo $\mathcal{P}$ sobre el cuerpo K. Por lo ya desarrollado en secciones anteriores no deberían existir inconvenientes a la hora de escribir $D =< a + b + c >$. Entonces el punto

$$< a + b >=< (a + b + c) - c >$$

cae tanto sobre la recta $\overline{AB}$ como sobre la recta $\overline{CD}$, por tanto $E =< a+b >= \overline{AB} \cap \overline{CD}$. Cálculos análogos llevarían a encontrar expresiones para los otros dos puntos diagonales del cuadrivértice (figura I.4.10), en concreto,

$$G =< a + c >=< (a + b + c) - b >= \overline{AC} \cap \overline{BD} \text{ y}$$

$$F =< b + c >=< (a + b + c) - a >= \overline{AD} \cap \overline{BC}.$$

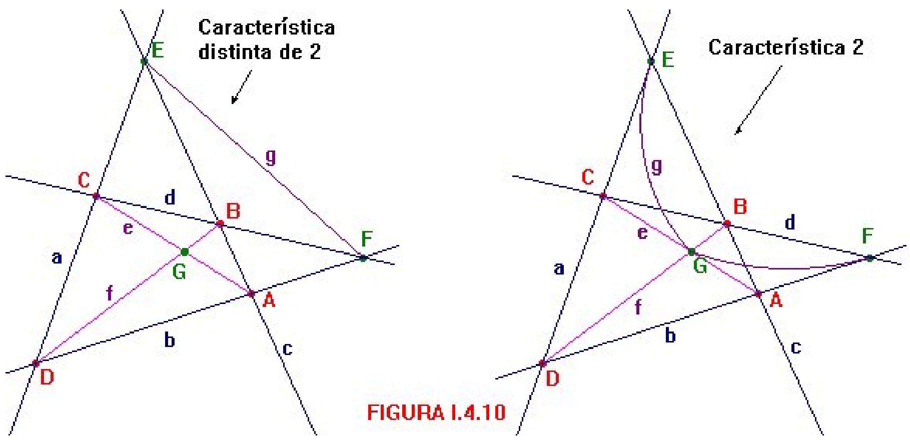


FIGURA I.4.10

Si se especula con la eventualidad de que estos tres puntos, E, F y G estuviesen en línea recta, por ejemplo, con G descansando sobre la recta $\overline{EF}$, se hace preciso expresar $b+c$ como combinación lineal de $a+b$ y $a+c$. En tal circunstancia,

$$b+c=\lambda(a+b)+\mu(a+c)=(\lambda+\mu)a+\lambda b+\mu c,$$

ecuación vectorial que sólo se verifica cuando $\lambda+\mu=0$ y $\lambda=\mu=1$, lo cual conllevaría que $1+1=0$, o sea, que K haya de poseer característica 2. Y la gracia reside en el recíproco: si la característica de K es 2, entonces $<b+c>=<(a+b)+(a+c)>$ y $G\in\overline{EF}$. Se concluye pues con el

Teorema I.4.6 (Teorema de Fano) *Los tres puntos diagonales de un cuadrivértice sobre un plano proyectivo están alineados si y solamente si la característica del cuerpo base es* 2.

La etiqueta se incluye en honor a Gino Fano. Sin embargo, este matemático italiano, que se ocupó de axiomatizar la geometría de Euclides en un intento previo al de Hilbert, no lo formuló como un teorema, sino como uno de sus postulados, aquél que prohibía el alineamiento de los vértices diagonales de un cuadrivértice, algo innecesario en los métodos semi intuitivos de demostración que utilizaban los griegos.

Contemplando de nuevo el enunciado, un matemático debería de apreciar la curiosa imbricación entre propiedad geométrica y propiedad algebraica. Hay un sustrato de belleza artística en el hecho de que la imposición de una cualidad de estricto carácter geométrico, que los puntos diagonales estén en línea recta, implique que $1+1=0$, lo cual representa un atributo algebraico del cuerpo base.

Ahora, siguiendo la táctica establecida desde un principio, se enunciarán versiones afines del teorema de Fano sin más que examinar las circunstancias particulares que concurran cuando algunos de los elementos involucrados se los queda la recta del infinito. Eso sí, el lector debería de convencerse de que, en caso contrario, la tesis permanece invariable: el enunciado de Fano no miente si los lados de un cuadrivértice del plano afín se cortan en puntos del afín.

En un plano afín, se define un *trapecio* como un cuadrivértice con un punto diagonal en el infinito (de su envolvente proyectiva), traducido, con un par de lados opuestos paralelos. Por *paralelogramo* se entenderá a un cuadrilátero con dos de sus puntos diagonales en el infinito (las dos parejas de lados paralelas). La única eventualidad con cierto interés afín se refiere a los paralelogramos, los cuales solo constan de dos diagonales ya que la tercera la constituye la recta impropia. En la tanda de ejercicios del final del capítulo se propondrá demostrar que una condición necesaria y suficiente para que se corten las dos diagonales de un paralelogramo es que la característica del cuerpo difiera de 2. Por ejemplo, en el plano afín sobre $\mathbb{Z}_2$, se dibuja el único cuadrivértice posible, el dado por $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,1)$, y $D = (1,1)$. Se trata de un paralelogramo puesto que $\overline{AB} \| \overline{CD}$ y $\overline{AD} \| \overline{BC}$. Pero también la diagonal $\overline{AC}$ es ¡paralela! a la diagonal $\overline{BD}$.

En efecto, si se calculan sus respectivas ecuaciones cartesianas se obtiene $y = x$ y $y = x + 1$, las cuales plantean un sistema incompatible en característica 2.

Se finalizará esta sección examinando la proposición dual del teorema de Fano: *las tres rectas diagonales de un cuadrilátero sobre un plano proyectivo concurren en un punto si y solamente si la característica del cuerpo es* 2. Vuélvase a la figura I.4.10, donde se representa el cuadrilátero $\{a, b, c, d\}$ sobre el plano proyectivo $\mathcal{P}$. Considérese el cuadrivértice $\{A, B, C, D\}$ dado por $A = b \cap c$, $B = c \cap d$, $C = d \cap a$ y $D = a \cap b$. Las puntos diagonales del cuadrivértice vendrán determinados por $E = \overline{AB} \cap \overline{CD} = a \cap c$, $F = \overline{AD} \cap \overline{BC} = b \cap d$ y $G = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, mientras que las rectas diagonales del cuadrilátero original se describen por $e = \overline{AC}$, $f = \overline{BD}$ y $g = \overline{EF}$.

Obsérvese que G se obtiene como intersección de dos de las rectas diagonales, lo cual produce una equivalencia entre las dos siguientes aseveraciones:

* los tres puntos diagonales están alineados ($G \in \overline{EF}$),
* las tres diagonales concurren ($e \cap f \in g$),

y el dual del teorema de Fano viene a decir lo mismo que el propio teorema no añadiendo nueva información. Para calificar una situación como esta se suele utilizar el término *autodual*. En conclusión: el teorema de Fano es autodual.

§6 Cuaterna armónica

Sea (A, B, F, E) un cuadrivértice de un plano proyectivo $\mathcal{P}$ de puntos diagonales $C = \overline{AB} \cap \overline{EF}$, $G = \overline{AE} \cap \overline{BF}$ y $L = \overline{AF} \cap \overline{BE}$ (figura I.4.11). Considerando la diagonal $\overline{GL}$ y su intersección D con con $\overline{AB}$, se obtienen cuatro puntos alineados, a saber, A, B, C y D.

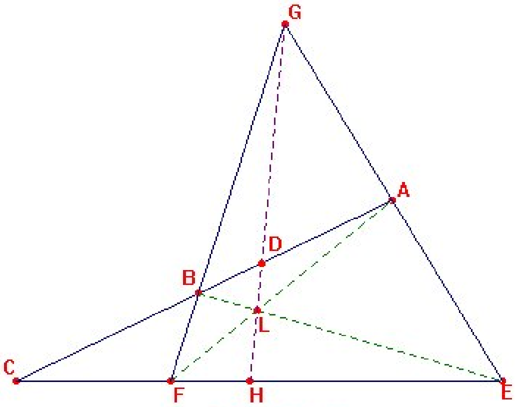


FIGURA I.4.11

Se intentará calcular lo que vale la razón doble $\lambda = (ABCD)$. Por la perspectividad de centro G se tiene $(ABCD) = (EFCH)$, donde $H = \overline{EC} \cap \overline{GD}$. La perspectividad de centro L prueba que $(EFCH) = (BACD)$, por tanto $(ABCD) = (BACD)$. Consultando la tabla de posibles razones dobles del teorema I.4.4, a λ no le quedan más opciones que 1 y -1. En la primera de ellas, debe ser $C = D$ puesto que $(ABCC) = 1$. En tal circunstancia, el teorema de Fano (I.4.6) obliga a que la característica del cuerpo sea 2. Ahora bien, $1 = -1$ en característica 2. Se concluye por tanto con que, sea cual sea la característica del cuerpo, se tiene $(ABCD) = -1$.

Definición I.4.4 De los elementos de una cuaterna (A, B, C, D) de puntos de una recta proyectiva se dice que están en *cuaterna armónica* si su razón doble $(ABCD)$ vale -1, en cuyo caso, a D se le llama el *cuarto armónico* de la terna (A, B, C) y a los puntos C y D se les denomina los *conjugados armónicos* de A y B.

Obsérvese que el teorema I.4.4 hace buena la definición de conjugados armónicos en el sentido de que no importa el orden en el que se den las parejas de puntos. Otra apostilla se refiere a la característica 2. En tal circunstancia, $(ABCD) = -1$ equivale a afirmar $C = D$ y no parece que se vaya a obtener mucho juego del concepto de cuaterna armónica. Por eso se incluye el siguiente

AVISO:

De ahora en adelante, y si no se especifica lo contrario, se razonará sobre cuerpos con característica distinta de 2.

También conviene resaltar que el razonamiento de más arriba brinda un método gráfico para el trazado del cuarto armónico de una terna de puntos alineados. En efecto, según se acaba de ver, una definición equivalente en términos de geometría sintética diría que (A, B, C, D) están en cuaterna armónica si hay un cuadrivértice del que A y B son vértices, C es punto diagonal y D reposa sobra la recta determinada por los otros dos puntos diagonales. Ahora se trataría de averiguar si colocados tres puntos distintos A, B y C sobre una recta r de un plano proyectivo, se es capaz de construir un punto $D \in r$ con $(ABCD) = -1$, o, lo que es lo mismo, de dibujar un cuadrivértice del que formen parte A y B, con C como uno de los puntos diagonales y D en la recta determinada por los otros dos puntos diagonales. Para intentarlo, trácese por C una recta arbitraria r distinta de $\overline{AB}$ y elíjanse en ella dos puntos E y F no coincidentes y diferentes de C. Ya se tiene un cuadrivértice, el (A, B, F, E), de puntos diagonales $C = \overline{AB} \cap \overline{EF}$,

$G = \overline{AE} \cap \overline{BF}$ y $L = \overline{EB} \cap \overline{AF}$ (figura I.4.12). El cuarto armónico de la terna (A, B, C) ha de obtenerse entonces como intersección de r con la diagonal $\overline{GL}$, es decir, $D = \overline{GL} \cap \overline{AB}$.

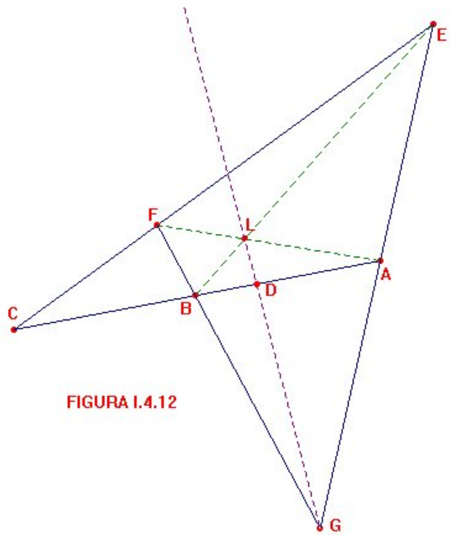


FIGURA I.4.12

Obsérvese de nuevo la figura que nos sugirió la introducción de cuaternas armónicas y que se reproduce en la parte izquierda de la figura I.4.13). Imaginése el lector cómo se deformaría la configuración si se llevase el punto A cada vez más lejos de la escena, más hacia la izquierda, mientras se mantienen firmes en su sitio, como clavados por chinchetas, los puntos B, C, F y G (dibujados en otro color).

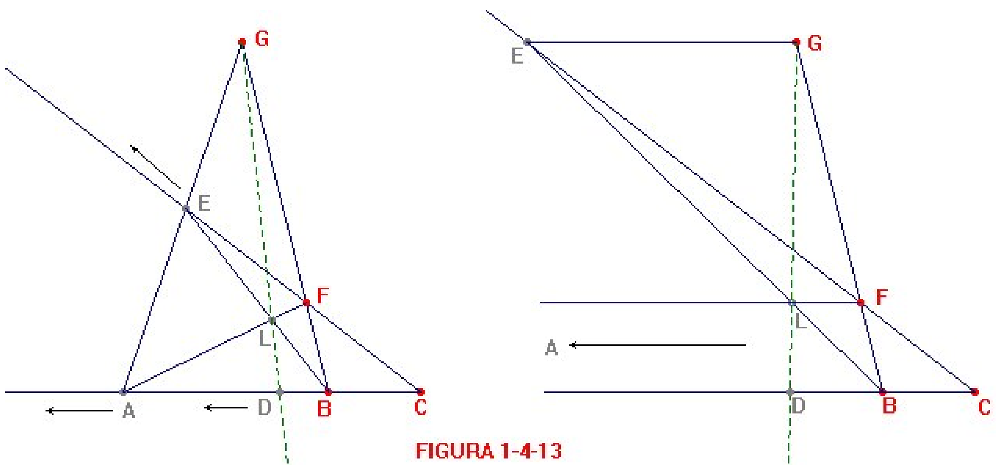


FIGURA 1-4-13

El punto D, en apariencia, se alejaría de B, pero no a tanta velocidad como A. Da la impresión de que se desplazaría con mayor lentitud. ¿Qué ocurrirá cuando A "llegue" al infinito? No hay más que hacer cuentas. Póngase $A =< a >$, $B =< b >$, $C =< a + b >$, en cuyo caso, al ser D el cuarto armónico de la terna (A, B, C), se tendría, $D =< -a + b >$. Al pasar al afín con A en el infinito, los puntos B, C y D toman abscisas respectivas 0, 1 y -1, mientras que A queda sin abscisa. Así, como en el afín existe identidad entre puntos y vectores (en este caso unidimensional los vectores no son sino elementos del cuerpo base), se puede escribir $B = \frac{C+D}{2}$ y ha quedado B justo en la "mitad" del segmento determinado por C y D. En un espacio afín se define el *punto medio* R del segmento determinado por dos puntos P y Q como $R = \frac{P+Q}{2}$. El "partido por dos" cobra sentido gracias a la suposición implícita de que la característica del cuerpo es distinta de 2.

Lema I.4.2 *Cuatro puntos A, B, C y D de una recta proyectiva se encuentran en cuaterna armónica si y solo si B se localiza, cuando A está en el infinito, en el punto medio del segmento determinado por C y D.*

Demostración Se acaba de probar una de las implicaciones. Para la otra, tómense C y D puntos distintos de una recta afín K y hágase $B = \frac{C+D}{2}$. Si A es el punto del infinito de la envolvente proyectiva $\mathcal{P}_1(K)$ de K, hay que comprobar que $(ABCD) = -1$. Para esto, elíjase en $\mathcal{P}_1(K)$ el sistema de coordenadas homogéneas $\{B, A; C\}$. Con respecto a él, el punto A posee como coordenadas $(0, 1)$, mientras que los pares $(1, 0)$ y $(1, 1)$ han de representar a las respectivas coordenadas de B y C. Nótese cómo la primera coordenada igual a 1 de estos últimos delata su condición de puntos afines. Puesto que D descansa en el afín, sus coordenadas toman la forma $(1, \lambda)$. La condición $2B = C + D$ de partida exige que λ valga -1, por lo que, el lema se obtiene de aplicar la fórmula (1) para la razón doble.

Las competencias sobre el concepto del punto medio de un segmento recaen en exclusiva sobre el afín. En un espacio afín, en el cual los puntos no son sino vectores, tiene sentido la expresión $(A + B)/2$ que se refiere al punto (vector) obtenido mediante el producto por el escalar $\frac{1}{2}$ de la suma de los vectores (puntos) A y B. Por el contrario, en un proyectivo la suma de puntos distintos se interpreta como una recta y, además, carece de significado la multiplicación de una recta por un escalar. Además, si

$$\sigma : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$$

es una proyectividad entre espacios proyectivos que lleva el hiperplano $\mathcal{P}(H)$ al hiperplano $\mathcal{P}(H')$, una consecuencia inmediata del hecho de que las proyectividades conserven razones dobles demuestra que la restricción de σ a los espacios afines $\mathcal{A}(V,H)$ y $\mathcal{A}(V',H')$ transforma el punto medio de un segmento en el punto medio del segmento determinado por sus imágenes. Así pues, mientras que las proyectividades conservan cuaternas armónicas, las afinidades conservan también puntos medios.

Lema I.4.3 *Las dos diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.*

Demostración: Se han omitido las hipótesis de ambiente para no afear el enunciado, pero es obvio que la escena se desarrolla en un plano afín K^2 con K un cuerpo. Sea (A,E,B,F) un paralelogramo de K^2, con $\overline{AE}\|\overline{BF}$ y $\overline{AF}\|\overline{BE}$. Denomínese $C=\overline{EF}\cap\overline{AB}$ a la intersección de ambas diagonales. En la envolvente proyectiva $\mathcal{P}_2(K)$ de K^2, llámense D, L y G a los puntos impropios de las rectas $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ y $\overline{AE}$ respectivamente. Adviértase que las condiciones de paralelismo impuestas en el afín llevan a $L=\overline{BE}\cap\overline{AF}$ y $G=\overline{AE}\cap\overline{BF}$ (figura I.4.14).

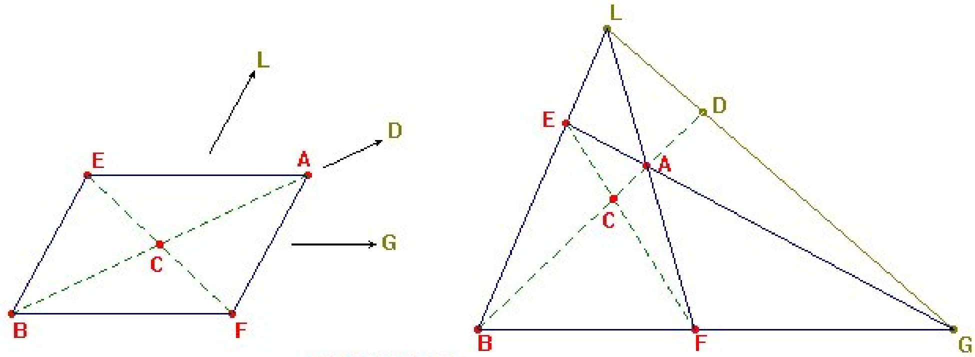


FIGURA I.4.14

Ahora, en la envolvente proyectiva, se tienen A y B dentro del cuadrivértice (A,B,F,E), del cual C constituye uno de los puntos diagonales y

D pertenece a la recta que pasa por por los otros dos. Luego D constituye el cuarto armónico de la terna (A, B, C). Utilizando el teorema I.4.4, se tiene $-1 = (ABCD) = (DCBA)$. Y como D se queda en el infinito al retornar al afín, el lema I.4.2, obliga a que C se sitúe en el punto medio del segmento determinado por A y B. Un razonamiento análogo probaría que $C = \frac{E+F}{2}$ considerados como puntos (vectores) del afín.

§7 Transformaciones entre haces de rectas

Esta última sección del capítulo transcurrirá en el escenario de los planos proyectivos y se dedicará a dualizar, en este ámbito de dimensión 2, las definiciones y resultados de las secciones precedentes que sean susceptibles de dualización. Aquellas nociones expresables en los exclusivos términos de incidencia entre puntos y rectas tendrán un reflejo dual inmediato. Por ejemplo, en varias ocasiones se ha razonado sobre la configuración geométrica integrada por cuatro puntos alineados A, B, C y D con los tres primeros distintos entre sí y $D \neq A$. A la configuración dual de esta en un plano proyectivo se la denominará un *lápiz*. En concreto, un lápiz (a, b, c, d) constará de cuatro rectas concurrentes a, b, c y d de un plano proyectivo con $a \neq b \neq c \neq a \neq d$. A un lápiz (a, b, c, d) se le adjudicará el adjetivo *armónico*[8], si existe un cuadrilátero que integre a a y b como dos de sus lados, a c como una de sus diagonales y d pase por el punto de corte de las otras dos diagonales (figura I.4.15). Si una recta cualquiera r corta a un lápiz armónico en los puntos $A = r \cap a$, $B = r \cap b$, $C = r \cap c$ y $D = r \cap d$ distintos, es obvio que (A, B, C, D) habrán de formar cuaterna armónica pues basta imaginar otra recta por C (diferente de r y que no pase por el punto base del lápiz) para construir un cuadrivértice de vértices A y B, punto diagonal C y con D en la recta determinada por los otros dos puntos diagonales.

[8] *El concepto dual de cuaterna armónica será, como es de suponer, el de lápiz armónico.*

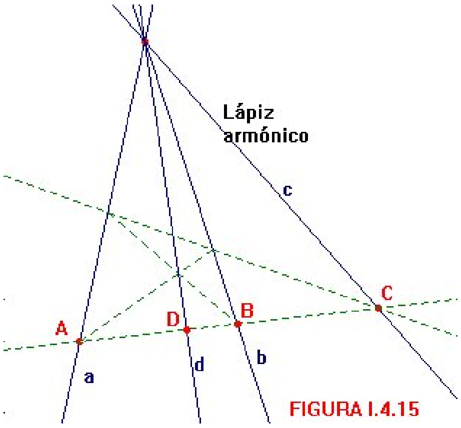


FIGURA I.4.15

Ahora se dualizarán los distintos tipos de transformaciones entre rectas estudiados. Los conceptos duales de aplicaciones entre conjuntos de puntos alineados (rectas) consistirán en aplicaciones entre haces de rectas concurrentes. Si A es un punto de un plano $\mathcal{P}$, se denotará por A^* al haz de rectas de $\mathcal{P}$ que pasan por A. Recuérdese que la perspectividad $\pi_R : a \to b$ de centro R de la recta a sobre la recta b ($R \notin a \cup b$) viene dada por la biyección $\pi_R(A) = \overline{RA} \cap b$. Así pues, para dos haces A^* y B^* de un mismo plano $\mathcal{P}$ (sígase la figura I.4.16), la *perspectividad de eje* r, con r una recta de $\mathcal{P}$ que no contiene ni a A ni a B, ha de definirse como la biyección que asocia a cada recta a de A^* la recta a' de B^* determinada por B y $a \cap r$ ($a' = \pi_r(a) = \overline{(a \cap r)B}$).

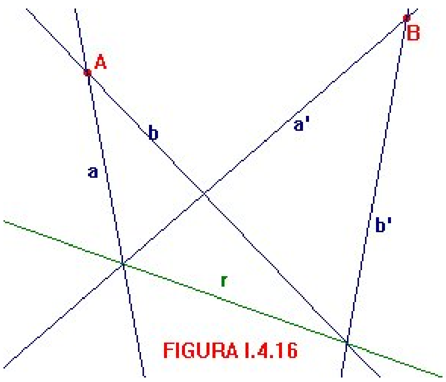


FIGURA I.4.16

Las *proyectividades* entre haces de rectas del mismo plano se introducen como composición de un número finito de perspectividades.

Hasta ahora no se ha encontrado ningún problema en enunciar duales pues se han tratado nociones que sólo involucran relaciones de pertenencia entre puntos y rectas. Sin embargo, la razón doble lleva consigo el pecado original de las coordenadas. Por ello se necesitará descender al mecanismo interno del principio de dualidad para introducir la razón doble de un lápiz. Como es costumbre, se denotará por $*$ tanto a la correlación estándarentre un plano $\mathcal{P}(V)$ y su dual $\mathcal{P}(V^*)$ como a su inversa. Puntos alineados de $\mathcal{P}(V)$ desembocan por $*$ en rectas concurrentes de $\mathcal{P}(V)$, y viceversa, rectas concurrentes de $\mathcal{P}(V)$ se aplican en puntos alineados. Pues bien, para que el concepto de razón doble de un lápiz sea compatible con el principio de dualidad, se requiere que $*$ conserve razones dobles. Así, se define la *razón doble del lápiz* (a, b, c, d) mediante $(abcd) = (a^*b^*c^*d^*)$. El hecho de que $(r^*)^*$ coincida con r para cualquier recta r demuestra que la inversa de la correlación estándar también deja invariantes las razones dobles. Hay que advertir que tal propiedad no convierte a $*$ en una proyectividad puesto que, aunque conserve razones dobles, no lo hace entre rectas del mismo plano, sino entre puntos de una recta y rectas de un haz.

Ahora, de lo que se trata, es de lograr una caracterización más cómoda de la razón doble de un lápiz que lo libre a uno del engorro de tener que recurrir a la correlación estándar para determinar su valor. A continuación se ofrecen dos de ellas.

Tómense dos rectas a y b de un plano proyectivo $\mathcal{P}(V)$ sobre un cuerpo K y escríbase $A = a \cap b$. Supóngase que, fijado un sistema de coordenadas, las expresiones $p(x_0, x_1, x_2) = 0$ y $q(x_0, x_1, x_2) = 0$ representan a las respectivas ecuaciones de a y b, donde p y q son polinomios homogéneos de primer grado con coeficientes en K en las variables x_0, x_1 y x_2[9]. Con todas estas premisas, existe una biyección entre K y $A^* - \{a\}$ que asocia a cada escalar λ la recta de ecuación $\lambda p(x_0, x_1, x_2) + q(x_0, x_1, x_2) = 0$. Esta afirmación puede demostrarse bien por cálculo directo, bien mediante el uso del principio de dualidad. Para esto último, recuérdese (ejercicio I.3.7) que, fijada una base en V, el punto de

[9] *De un polinomio* $p(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ *se dice que es* homogéneo de grado n *si* $p(\lambda x_0,\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)=\lambda^n p(x_0,x_1,\ldots,x_n)$*, o, de modo equivalente, si cada monomio de* $p(x_0,\ldots,x_n)$ *es de grado* n*.*

coordenadas homogéneas $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ se transforma por la correlación estándar en la recta de ecuación $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ respecto de la base dual de V^*. Elíjanse ahora otras dos rectas c y d tales que (a, b, c, d) constituya un lápiz. No existe inconveniente en suponer que la ecuación de c se obtiene como suma de las ecuaciones de a y b (¿por qué?). Bajo estas circunstancias, se afirma que la razón doble $(abcd)$ coincide con el único escalar λ tal que, al multiplicar por λ la ecuación de a y sumar el resultado a la ecuación de b, aparece la ecuación de d. Esto, desde luego, proporciona un método para hallar la razón doble de un lápiz conocidas las ecuaciones de sus integrantes. Por ejemplo, en el plano proyectivo sobre $\mathbb{Q}$, considérense el punto $A = (1, 0, 1)$ y las rectas

$$\begin{array}{rcccccl} a \equiv & x_0 & - & 2x_1 & - & x_2 & = 0, \\ b \equiv & 2x_0 & & & - & 2x_2 & = 0, \\ c \equiv & x_0 & + & x_1 & - & x_2 & = 0 \text{ y} \\ d \equiv & 5x_0 & - & 3x_1 & - & 5x_2 & = 0, \end{array}$$

que pasan por A. Se trata de calcular la razón doble $(abcd)$. Para ello, hay que expresar la ecuación de c como suma de ecuaciones que describan a a y a b, lo que lleva a plantear la igualdad entre polinomios homogéneos

$$x_0 + x_1 - x_2 = \lambda_0(x_0 - 2x_1 - x_2) + \lambda_1(2x_0 - 2x_2).$$

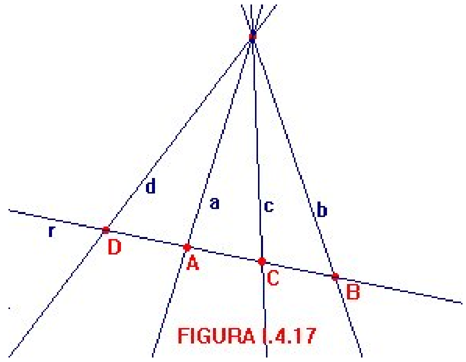
Igualando coeficientes se obtiene $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_1 = \frac{3}{4}$. Por otro lado, la expresión

$$5x_0 - 3x_1 - 5x_2 = \mu_0(-\frac{1}{2}x_0 + x_1 - \frac{1}{2}x_2) + \mu_1(\frac{3}{2}x_0 - \frac{3}{2}x_2),$$

lleva a $\mu_0 = -3$ y $\mu_1 = \frac{7}{3}$, es decir, la recta d queda descrita por una ecuación del tipo $-\frac{9}{7}p(x_0, x_1, x_2) + q(x_0, x_1, x_2) = 0$, donde $p(x_0, x_1, x_2)$ y $q(x_0, x_1, x_2)$ son las ecuaciones respectivas de a y b. Entonces $(abcd) = -\frac{9}{7}$.

Aún parece complicado todo este lío. Más sencillo lo pone el siguiente teorema, cuya demostración se propondrá en la tanda de ejercicios, al cual es al que se suele recurrir en la práctica para el cálculo de la razón doble de un lápiz.

Teorema I.4.7 *Sea (a, b, c, d) un lápiz de un plano $\mathcal{P}$ y r una recta arbitraria de $\mathcal{P}$ que no pase por $a \cap b$. Entonces $(abcd) = (ABCD)$, donde $A = a \cap r$, $B = b \cap r$, $C = c \cap r$ y $D = d \cap r$.*



En bastantes textos aparece el enunciado anterior como definición de razón doble de un lápiz. Si se hubiese obrado de tal forma, se habría tenido que citar al teorema I.4.2 para comprobar que $(abcd)$ no depende de la elección de la recta r. No se ha hecho aquí así porque, aunque el teorema I.4.7 ofrece un procedimiento muy cómodo para el cálculo, no sugiere una relación demasiado clara con la dualidad.

Se realizará de nuevo el cálculo de la razón doble $(abcd)$ del ejemplo de más arriba, pero usando el teorema I.4.7. Tómese por ejemplo $r \equiv x_0 = 0$. Entonces

$$\begin{array}{ccccc} P & = & a \cap r & = & (0,1,-2), \\ Q & = & b \cap r & = & (0,1,0), \\ R & = & c \cap r & = & (0,1,1) \text{ y}, \\ S & = & d \cap r & = & (0,5,-3). \end{array}$$

Fíjese en r el sistema de coordenadas homogéneas $\{(0,1,-2),(0,1,0)\}$. En él, las coordenadas homogéneas de R se determinan haciendo $(0,1,1) = \lambda_0(0,1,-2) + \lambda_1(0,1,0)$, lo que implica $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$ y $\lambda_1 = \frac{3}{2}$. Del mismo modo se calcularían las coordenadas homogéneas de S en el mismo sistema obteniendo $\mu_0 = \frac{3}{2}$ y $\mu_1 = \frac{7}{2}$. La fórmula (1) da entonces

$$(PQRS) = \frac{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}\frac{7}{2}} = -\frac{9}{7}.$$

Alquien podría pensar, si revisa las definiciones de las secciones anteriores, que el único concepto que queda por dualizar es el de punto medio de un segmento. Pero el principio de dualidad sólo funciona en espacios proyectivos, no en espacios afines, y la geometría afín posee las competencias exclusivas en materia de puntos medios dejando al margen a la proyectiva. Por tanto, no hay noción de “recta media” de dos rectas.

Una vez dualizado todo concepto susceptible de dualización, se compendian los correspondientes resultados en el

Teorema I.4.8

i) *Toda proyectividad entre haces del mismo plano factoriza en producto de, a lo sumo, tres perspectividades.*

ii) *Las proyectividades entre haces de rectas del mismo plano conservan razones dobles de lápices.*

iii) *Toda biyección entre haces de rectas de un mismo plano que conserve razones dobles de lápices es una proyectividad.*

iv) *Una proyectividad entre haces de rectas A^* y B^* de un plano es una perspectividad si y solamente si la recta $\overline{AB}$ es doble.*

v) *El lápiz (a, b, c, d) es armónico si y solamente si $(abcd) = -1$.*

vi) *Una proyectividad σ de un haz en sí mismo es una involución distinta de la identidad si y solo si existe una recta a del haz tal que $\sigma(a) \neq a$ y $\sigma^2(a) = a$.*

vii) *Una involución en un haz distinta de la identidad tiene, a lo sumo, 2 rectas dobles.*