II.2
CUÁDRICAS EN EL PROYECTIVO

Índice del capítulo.

A. Castellón

CUÁDRICAS EN EL PROYECTIVO

En el capítulo precedente se han estudiado las formas cuadráticas desde un punto de vista algebraico. Todos los resultados que allí se formularon tienen una contrapartida geométrica cuando se los contempla desde el punto de vista de la geometría proyectiva. Por eso, aunque son muchos los textos destinados a ingenieros que abordan directamente las cuádricas en los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, para un matemático resulta mucho más natural seguir el camino

$$\begin{array}{c}\text{formas cuadráticas}\\ \downarrow\\ \text{cuádricas proyectivas}\\ \downarrow\\ \text{cuádricas afines}\\ \downarrow\\ \text{cuádricas euclídeas}\end{array}$$

En este capítulo se dotará de contenido geométrico a las formas cuadráticas en el escenario de los espacios proyectivos.

§1 Generalidades

Como se adelantó en el capítulo anterior, suele ser costumbre de los libros técnicos introducir una cónica como el lugar geométrico de los puntos del plano real cuyas coordenadas (x, y) satisfacen una ecuación del tipo $p(x, y) = 0$ con p un polinomio de segundo grado en dos variables con coeficientes en $\mathbb{R}$. Con mayor generalidad, una cuádrica en un K-espacio afín n-dimensional consiste en el conjunto de puntos cuyas coordenadas cartesianas satisfacen una ecuación $p(y_1, \dots, y_n) = 0$ donde p representa ahora a un polinomio de segundo grado en n indeterminadas sobre K y, por consiguiente, susceptible de escribirse en la forma

$$p(y_1, \dots, y_n) = \sum_i \alpha_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} 2\alpha_{ij} y_i y_j + \sum_i 2\alpha_{i0} y_i + \alpha_{00}.$$

El lector tal vez adivine el propósito de incluir un 2 en los coeficientes de los términos de primer grado y los de segundo que contengan el producto de dos variables distintas. O quizá no. Pero en lo que sí que estará de acuerdo es que tal modo de proceder es lícito, pues basta con dividir por 2 los coeficientes originales adecuados para llegar a una expresión como la de arriba.

Así bien, operando como se hizo con las cónicas, el polinomio $p(y_1,\ldots,y_n)$ pasa a depender de coordenadas homogéneas si en él se efectúan las sustituciones $y_i = x_i/x_0$ y se multiplica el resultado por x_0^2. El nuevo polinomio $q(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ viene dado por

$$q(x_0,x_1,\ldots,x_n) = x_0^2\; p(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}),$$

el cual tiene una variable más, pero ahora es homogéneo de segundo grado. Recuérdese que un polinomio es homogéneo de grado n, si cada uno de sus monomios tiene grado n, o, equivalentemente, si al sustituir cada variable x_i por λx_i, el polinomio queda multiplicado por el escalar λ^n. Es fácil comprobar que el polinomio $q(x_0,\ldots,x_n)$, obtenido como homogeneización [1] del $p(y_1,\ldots,y_n)$, es homogéneo de segundo grado. En efecto, para cada $\lambda \in K$ no nulo, se tiene

$$q(\lambda x_0,\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = (\lambda x_0)^2 p(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_0},\ldots,\frac{\lambda x_n}{\lambda x_0}) =$$

$$\lambda^2 x_0^2 p(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}) = \lambda^2 q(x_0,x_1,\ldots,x_n).$$

La cuádrica se interpreta entonces como el lugar geométrico de los puntos afines del espacio proyectivo $\mathcal{P}_n(K)$ engendrados por vectores isótropos para la forma cuadrática definida por $q(x_0,\ldots,x_n)$. Esta última queda descrita, en el sistema de coordenadas homogéneas que diera lugar a las coordenadas cartesianas del afín de partida, por la matriz (α_{ij}) con $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ para cualesquiera $i,j \in \{0,\ldots,n\}$.

Se ilustrará todo esto con un ejemplo. Supóngase que una cuádrica afín en $\mathbb{R}^4$, según el concepto provisional de cuádrica que se maneja, está deter-

[1] *Por desgracia, la acción del verbo homogeneizar no genera en castellano otra palabra de mejor sonido que* homogeneización. *Por completo inapropiado sería el uso del barbarismo* homogenización.

minada por la ecuación

$$y_1^2 - 4y_2^2 + y_4 - 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 3y_3y_4 - 2 = 0.$$

Homogeneizando se obtiene

$$-2x_0^2 + x_1^2 - 4x_2^2 + x_0x_4 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_3x_4 = 0,$$

y la cuádrica consistirá en los puntos afines del espacio proyectivo real de dimensión cuatro engendrados por los vectores isótropos para la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ de matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ha de reconocer pues que el examen de una cuádrica desemboca de forma natural en el de cierta forma cuadrática. Y puesto que la teoría de las formas cuadráticas se basa en sólidos pilares, conviene trasladarse a un ambiente proyectivo y así aprovechar el equipaje de la geometría ortogonal para el estudio de las cuádricas.

Definición II.2.1 Sea V un espacio vectorial sobre K provisto de una forma cuadrática $q : V \to K$. Al conjunto de puntos del espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ engendrados por los vectores isótropos no nulos de q se le denomina una *cuádrica proyectiva* y se denotará por $\mathcal{Q}(q)$. A una cuádrica en dimensión proyectiva 2 se le llamará una *cónica*.

Esta definición es buena ya que un vector isótropo no nulo engendra un subespacio vectorial de dimensión 1 totalmente isotrópico, esto es, un punto del proyectivo. (Piénsese que cualquier múltiplo escalar de un vector isótropo es, así mismo, isótropo.) Algunos autores distinguen entre el conjunto de puntos $\mathcal{Q}(q)$ y la clase de equivalencia de q bajo la relación

$$q \sim \lambda q, \ \lambda \in K - \{0\}.$$

Ello se debe a un deseo de integración en la geometría algebraica donde las cuádricas se contemplan desde otro punto de vista. En otros libros, se exige a q que no sea idénticamente nula, es decir, que no todo vector sea isótropo. Quizá con ello se persiga un fin estético ya que, en ocasiones, habrá que hacer salvedades sobre ciertas generalizaciones que contemplan a la cuádrica que "llena" todo el espacio como un caso especial. Sin embargo, tal medida lleva aparejadas algunas incomodidades al considerar subespacios totalmente contenidos en una cuádrica. Por último, otros textos denominan *hipercuádrica* a lo que aquí se ha llamado cuádrica, reservando este término para las contenidas en espacios tridimensionales. En realidad no es mala idea. Si no se ha adoptado en estos apuntes será por el afán de disminuir el número de pulsaciones de teclado al escribirlos.

Antes de proseguir, se harán algunas observaciones a la definición II.2.1. En primer lugar, se da el hecho curioso de que cuádricas procedentes de formas cuadráticas no isométricas pueden definir los mismos lugares geométricos. Por poner un caso sencillo, considérense las cuádricas sobre la recta proyectiva racional determinadas por las ecuaciones $x_0^2 + x_1^2 = 0$ y $x_0^2 + 2x_1^2 = 0$. Ambas describen al conjunto vacío, pues no poseen vectores isótropos no nulos, mientras que sus respectivas matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

no son congruentes. Medítese sobre ello [2].

Otra peculiaridad radica en que el teorema II.1.3 permite, en un espacio proyectivo n-dimensional, la *diagonalización* de cualquier cuádrica $\mathcal{Q}(q)$, esto es, un cambio de coordenadas a un sistema compuesto por vectores de una base ortogonal. En tal sistema, la ecuación de la cuádrica se escribiría en la forma

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 = 0,$$

[2] *Si aun después de meditarlo no se atina a adivinar el motivo de semejante afirmación, escríbase la condición de congruencia y tómense determinantes.*

que se denomina *ecuación reducida* de la cuádrica. Aquí, el número de coeficientes α_i no nulos proporciona el rango de la forma cuadrática q. (En ocasiones se habla del rango de una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$, cuando uno se está refiriendo al rango de la forma cuadrática q.) Si todos los α_i se anulan (rango cero), la expresión $0 = 0$ queda satisfecha por las coordenadas de cualquier punto, y la cuádrica llena el espacio (el espacio vectorial del que procede el proyectivo es totalmente isotrópico).

Pero ya es hora de que se justifique por qué la geometría proyectiva se ocupa de las cuádricas.

Teorema II.2.1 *Una proyectividad entre espacios proyectivos transforma una cuádrica en otra cuádrica.*

Demostración Siendo $\sigma = \mathcal{P}(f)$ una proyectividad entre los espacios proyectivos $\mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(V')$ de la misma dimensión n sobre el cuerpo K, concíbase una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en $\mathcal{P}(V)$. Existe una manera natural de dotar a V' de una forma cuadrática q', que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ & \searrow_{q} & \downarrow q' \\ & & K. \end{array}$$

La forma q' deberá actuar como la composición $q \circ f^{-1}$. Hay que comprobar que q' es una forma cuadrática. Para $\lambda \in K$ y $v \in V'$, se tiene

$$q'(\lambda v) = q(f^{-1}(\lambda v)) = q(\lambda f^{-1}(v)) = \lambda^2 q(f^{-1}(v)) = \lambda^2 q'(v).$$

Un razonamiento tan mecánico como el anterior desembocaría en la bilinealidad de la polarizada de q'. Además, si se toma un punto $P =< v >$ de la cuádrica $\mathcal{Q}(q)$, para el que $q(v) = 0$, la proyectividad σ lo lleva a otro punto $< f(v) >$ con $f(v)$ isótropo para q'. En efecto,

$$q'(f(v)) = q(f^{-1}(f(v))) = q(v) = 0.$$

Por último, escójase un punto $P' =< u >$ de la cuádrica $\mathcal{Q}(q')$ que define la forma cuadrática q'. Entonces $0 = q'(u) = q(f^{-1}(u))$ y P' es imagen de un punto de $\mathcal{Q}(q)$, en concreto, de $< f^{-1}(u) >$. Así, $\sigma(\mathcal{Q}(q)) = \mathcal{Q}(q')$.

La descripción de las cuádricas en dimensiones muy pequeñas se realiza de modo casi inmediato. Esta sección se ocupará de las dimensiones menores que 2, dejando para la siguiente un somero estudio de las cónicas. En espacios proyectivos de dimensión -1, las cuádricas se quedan sin puntos puesto que el propio espacio no tiene elementos que ofrecer. Una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en un espacio (un punto) $\mathcal{P}_0(K)$ o bien llena el espacio (consta del único punto) o bien $\mathcal{Q}(q) = \emptyset$, dependiendo de si K, como espacio vectorial sobre sí mismo, es o no totalmente isotrópico.

Considérese ahora una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en una recta proyectiva $\mathcal{P}_1(K)$ de ecuación reducida $\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 = 0$. Hay tres posibilidades:

1) El rango de q es 2. Esto implica que ni α_1 ni α_2 se anulan. En tal circunstancia, la cuádrica puede poseer 2 puntos o ninguno, dependiendo de si la ecuación

$$\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$$

tenga soluciones en K. En efecto, en el caso en que λ sea una de las dos raíces cuadradas de $-\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$, la cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ se compondrá de los puntos $(1, \lambda)$ y $(1, -\lambda)$, mientras que, de lo contrario, no habría más vectores isótropos que el cero.

2) El rango de q es uno y, por tanto, algún coeficiente se anula. Supóngase $\alpha_1 = 0$, con lo que la ecuación $\alpha_0 x_0^2 = 0$ (con $\alpha_0 \neq 0$) determina un único punto, el $(0, 1)$.

3) El rango de q es cero, luego $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y todo punto de la recta pertenece a la cuádrica.

En definitiva, una cuádrica en una recta proyectiva consta de dos puntos o ninguno, si procede de una forma cuadrática no degenerada, y de un único punto o de todos, si la forma cuadrática degenera. Memorícese este resultado pues se utilizará a menudo en lo que sigue. Por ejemplo, como consecuencia interesante de lo anterior pueden describirse todas las posiciones relativas de una cuádrica y una recta. En un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, considérense una recta $r = \mathcal{P}(S)$ y una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$. Se denotará por q_S a la restricción de la forma cuadrática q al subespacio S que engendra la recta. Es obvio que $\mathcal{Q}(q_S)$ es una cuádrica en la recta r tal que $\mathcal{Q}(q_S) = \mathcal{Q}(q) \cap r$. Pues bien, si q_S no degenera, entonces $\mathcal{Q}(q_S)$ tiene dos puntos o ninguno, lo que equivale a decir que r corta a la cuádrica en 2 ó 0 puntos. En el primero de los casos se dirá que la recta es *secante* a la cuádrica, y en el segundo, que es *exterior* a la cuádrica. Cuando q_S degenere, la recta r tocará a la cuádrica en un solo punto o estará totalmente contenida en ella. En ambos casos se hablará de recta *tangente* a la cuádrica.

Este concepto de tangencia puede generalizarse a subespacios de cualquier dimensión.

Definición II.2.2 De un subespacio $\mathcal{P}(S)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ se dirá que es *tangente* a una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$, si degenera la restricción de q a S, la cual se denotará por q_S.

Como en el caso de las rectas, una simple cavilación debería convencer al lector de que $\mathcal{Q}(q_S) = \mathcal{Q}(q) \cap \mathcal{P}(S)$.

Cada cuádrica degenerada $\mathcal{Q}(q)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ contiene a los puntos engendrados por vectores del radical pues estos son isótropos. Al subespacio $\mathcal{P}(\operatorname{Rad} V)$ se le conoce por el *vértice* de la cuádrica y a cualquiera de sus puntos se le endosa el adjetivo *singular*. Por otro lado, la descomposición $V = \operatorname{Rad} V \oplus S$, con S no degenerado, permite concebir en el subespacio $\mathcal{P}(S)$ la cuádrica de S no degenerada $\mathcal{Q}(q_S)$, denominada *directriz*. Obsérvese que, mientras que una cuádrica degenerada sólo tiene un vértice, sin embargo puede poseer varias directrices. No hay más que considerar intersecciones con distintos suplementos del radical. Por *generatriz* se entiende cualquier recta que contenga puntos singulares y puntos de una directriz. La razón de los sustantivos vértice, directriz y generatriz se origina en el siguiente

Teorema II.2.2 *Si una cuádrica degenerada no se reduce al vértice, entonces es la unión conjuntista del haz de sus generatrices, es decir, se compone de rectas que pasan por puntos del vértice y se apoyan en una directriz.*

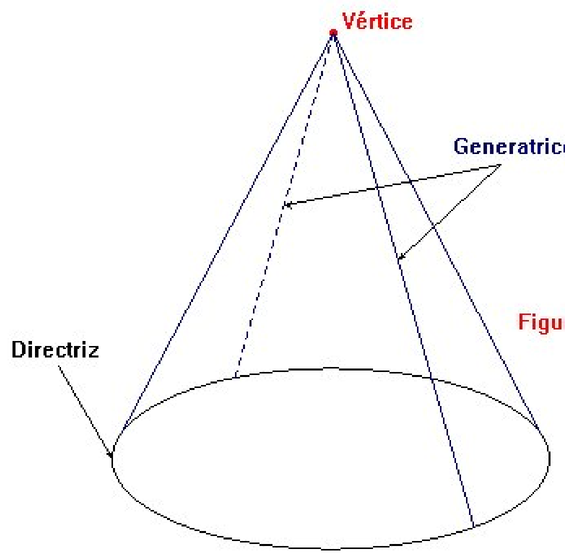

Figura II.2.1

En la figura II.2.1, el vértice se reduce a un punto y la directriz es una cónica.

Demostración Escríbase $V = \operatorname{Rad} V \oplus S$ para un espacio vectorial V con producto interno q sobre K. Elíjase un punto singular $P =< u >$ del vértice y otro $Q =< v >$ en la directriz $\mathcal{Q}(q_S)$. Se ha de comprobar que cada punto $R =< \alpha u + \beta v >$ de la recta $\overline{PQ}$ pertenece a la cuádrica $\mathcal{Q}(q)$, lo cual se deduce de la serie de igualdades

$$q(\alpha u + \beta v) = \alpha^2 q(u) + 2\alpha\beta q(u,v) + \beta^2 q(v) = 0,$$

donde se ha aplicado la isotropía de v y el hecho de que $u \in \operatorname{Rad} V$. Para la inclusión inversa, pártase de un punto arbitrario $A =< a >$ de la cuádrica. La descomposición de V en suma directa de subespacios proporciona vectores b y c únicos tales que $a = b + c$, con $b \in \operatorname{Rad} V$ y $c \in S$. Pero el vector a es isótropo, luego

$$0 = q(a) = q(b+c) = q(b) + 2q(b,c) + q(c) = q(c).$$

Si $c = 0$, entonces A cae en el vértice y, por tanto, en cualquier recta que pase por A y por un punto de la directriz. En el otro caso, $q(c) = 0$ y $A \in \overline{BC}$ con $B =< b >$ singular y $C =< c >$ en la directriz.

Para visualizar en un ejemplo concreto las tesis del teorema, considérese la cónica $\mathcal{Q}(q)$ del plano proyectivo real descrita por la ecuación $x_1^2 - x_2^2 = 0$. La matriz de q viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en la base canónica $\{e_0, e_1, e_2\}$. El vértice, en este caso, sólo consta del punto $P =< e_0 >$. Tómese como suplemento del radical el subespacio S engendrado por e_1 y e_2. Adviértase que S constituye un plano hiperbólico y que, por ello, contiene dos rectas totalmente isotrópicas, las engendradas por $e_1 + e_2$ y $e_1 - e_2$. Así, la directriz, que ahora es una cuádrica no degenerada sobre una recta, se compone de los puntos $A =< e_1 + e_2 >$ y $B =< e_1 - e_2 >$. Por tanto, la cónica consiste en la unión conjuntista de las generatrices $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ que se cortan en el vértice P. Si el lector se molestase en calcular la ecuación de tales rectas, obtendría $x_1 = x_2$ y $x_1 = -x_2$, lo que también se deduce de la ecuación $x_1^2 = x_2^2$ de la cónica.

Supóngase que un punto $P =< u >$ reposa en el vértice de una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ sobre K y que se traza por P cualquier recta $\overline{PQ}$ con $Q =< v >$. La matriz de q restringida al subespacio engendrado por u y v adquiere la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q(v) \end{pmatrix},$$

en la base $\{u, v\}$, por lo que $q_{<u,v>}$ degenera y la recta $\overline{AB}$ se sitúa tangente a la cuádrica. ¿Caracterizará esta propiedad a los puntos singulares? Habrá que verlo. Sea ahora $P =< u >$ un punto de la cuádrica con la peculiaridad de que cualquier recta que lo atraviese es tangente a la cuádrica. Así, cada vector $v \notin < u >$ engendra, junto con u un subespacio S degenerado. En la base $\{u, v\}$, la matriz

$$q_S \sim \begin{pmatrix} 0 & q(u, v) \\ q(u, v) & q(v) \end{pmatrix}$$

ha de tener determinante nulo, lo que implica $q(u,v)=0$. Como esto sucede para cada v, se concluye con que $u \in \operatorname{Rad} V$ y P pertenece al vértice. Esto demuestra el

Teorema II.2.3 *Un punto está en el vértice de una cuádrica si y solamente si pertenece a la cuádrica y cada recta que pase por él es tangente a la cuádrica.*

§2 Un primer estudio de las cónicas

En esta sección se realizará una somera descripción de las cuádricas en dimensión 2, esto es, de las cónicas. Para ello, sea $\mathcal{Q}(q)$ una cónica de un plano proyectivo $\mathcal{P}(V)$ sobre K de ecuación reducida

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0.$$

Como se vio con las cuádricas sobre una recta, pueden suceder varios casos:

1) La forma cuadrática q es no degenerada. Esto supone que los α_i no se anulan. La cuádrica podrá tener o no puntos dependiendo de si hay o no vectores isótropos no nulos en V. Si V es no isotrópico, $\mathcal{Q}(q)=\emptyset$. En caso de que haya algún vector isótropo $v \neq 0$, podrá aplicarse la descomposición de Witt descrita en el teorema II.1.5 para concluir con que la cuádrica consta de al menos dos puntos. De hecho, se verá en los ejercicios que $\mathcal{Q}$ tiene tantos puntos como cualquier recta. Mayor conocimiento acerca de la cuádrica requiere de más información sobre la aritmética particular del cuerpo base K.

2) El rango de q es 2. Puede suponerse entonces que la cuádrica tiene a $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0$ como ecuación reducida, donde $0 \notin \{\alpha_1, \alpha_2\}$. El punto $V =< v >$, con $v=(1,0,0)$, pertenece a $\mathcal{Q}(q)$. De hecho, V es el vértice de la cónica. Denótese por S al suplemento del radical engendrado por $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Como la cuádrica q_S en la recta $\mathcal{P}(S)$ no degenera, solo pueden darse ahora dos posibilidades, o la directriz $\mathcal{Q}(q_S)$ tiene dos puntos P y Q, o no tiene ninguno. Del teorema II.2.2 se desprende entonces que la cónica, o bien consiste en dos rectas $\overline{VP}$ y $\overline{VQ}$, secantes en el vértice, o bien o se reduce a un único punto que no es otro que V.

3) El rango de q es 1. Con ecuación reducida $\alpha_2 x_2^2 = 0$ ($\alpha_2 \neq 0$), el radical tiene dimensión 2 y es el subespacio S engendrado por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Un suplemento del radical tiene que ser a la fuerza no isotrópico, luego la cónica se reduce al vértice, que es la recta $\mathcal{P}(S)$.

4) La forma cuadrática q tiene rango 0. Al igual que sucede en cualquier otra dimensión, la ecuación reducida $0 = 0$ es satisfecha por cualquier punto de $\mathcal{P}(V)$ (todo vector es isótropo), y la cónica llena el plano.

Tendrá su interés en lo que sigue saber cuántos puntos y en qué posiciones relativas han de estar para que determinen una única cónica que pase por ellos. Si a uno le dan un conjunto de puntos y le proponen calcular la cónica que los contiene a todos, una idea podría ser la de concebir una matriz genérica M, simétrica y de orden 3, e imponer condiciones del tipo $vMv^t = 0$, con v los vectores fila de las coordenadas de los puntos proporcionados como datos. Así se plantearía un sistema de ecuaciones lineales, con tantas ecuaciones como puntos de los que se dispone. Las incógnitas de este sistema serán los elementos de la matriz a determinar. Ahora bien, la matriz M es simétrica, luego depende solo de 6 elementos. Además, cualquier múltiplo no nulo suyo λM ($\lambda \neq 0$) define la misma cónica que M pues q y λq tienen los mismos vectores isótropos. De ahí que sean suficientes, en principio, 5 ecuaciones para resolver el problema planteado. De hecho, la serie de razonamientos que se desarrollarán a continuación demuestran que, sabido el rango de la forma cuadrática, un conjunto de, a lo sumo, 5 puntos determinan de forma única una cónica que pase por ellos.

Se comenzará por examinar el caso en que una cónica $\mathcal{Q}(q)$ no llena el plano $\mathcal{P}(V)$ (tiene rango mayor que 0) y contiene a cinco puntos A, B, C, D y E tales que no hay tres de ellos alineados. Al no existir colinealidad entre ternas de esos puntos, es lícito escoger el sistema de coordenadas homogéneas

$\{A, B, C; D\}$, lo que equivale a escribir $A =< a >$, $B =< b >$, $C =< c >$ y $D =< a+b+c >$, con a, b y c tres vectores linealmente independientes de V. La base elegida $\{a, b, c\}$ está integrada por vectores isótropos, lo que implica que en ella la matriz M de q toma la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix},$$

para ciertos escalares λ, μ y ν. Obsérvese que λ, μ y ν no pueden anularse a la vez pues, de lo contrario, la cónica ocuparía todo el plano.

Que el punto unidad D sea también isótropo se traduce en la condición

$$(1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

la cual proporciona una primera ecuación $\lambda + \mu + \nu = 0$. Escribiendo las coordenadas homogéneas de $E = (\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)$ en el sistema fijado, se llega a la segunda ecuación

$$\epsilon_0\epsilon_1\lambda + \epsilon_0\epsilon_2\mu + \epsilon_1\epsilon_2\nu = 0.$$

El sistema homogéneo integrado por ambas ecuaciones tiene un subespacio de soluciones de dimensión 1 si y solo si el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon_0\epsilon_1 & \epsilon_0\epsilon_2 & \epsilon_1\epsilon_2 \end{pmatrix}$$

es 1. El primero de los menores de orden 2 es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_0\epsilon_1 & \epsilon_0\epsilon_2 \end{vmatrix} = \epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1).$$

Ahora bien, si $\epsilon_0 = 0$, entonces $E \in \overline{BC}$, mientras que $\epsilon_2 - \epsilon_1 = 0$ implicaría que E está sobre la recta $\overline{AD}$. Como no hay tres puntos alineados de entre los cinco dados, ninguna de las posibilidades puede producirse y la matriz del sistema tiene rango 1. En definitiva, solo hay una cónica que pasa por los cinco puntos. Se hace notar que, desechando la solución trivial $\lambda = \mu = \nu = 0$, el resto satisface $0 \notin \{\lambda, \mu, \nu\}$. De ahí que las condiciones impuestas a los puntos implican que la cónica no degenera.

Supóngase a continuación que A, B y C están alineados, pero $E, F \notin \overline{AB}$. Al compartir $\overline{AB}$ tres puntos con la cónica, debe ocurrir que $\overline{AB} \subset \mathcal{Q}(q)$, y ello implica que q es degenerada. Para verlo, basta razonar sobre el índice de Witt del espacio V. En efecto, una recta proyectiva dentro de una cónica procede de un subespacio vectorial de V totalmente isotrópico de dimensión 2. Si la forma cuadrática q no degenerase, el índice de Witt sería mayor o igual que 2, y quedaría asegurada la existencia de dos o más planos hiperbólicos ortogonales. Esto supone que $\dim(V) \geq 4$. Contradicción. Por último, el hecho de que una cónica con tres puntos colineales contiene a la recta que pasa por ellos, unido a que $\mathcal{Q}(q)$ no recubre todo el plano, prueba que $\mathcal{Q}(q) = \overline{AB} \cup \overline{EF}$. En resumen, la cónica sigue determinada por los cinco puntos dados, aunque ahora degenerando en un par de rectas secantes.

Sin embargo, si $A, B, C, D \in r$ y $E \notin r$, para una cierta recta r, puede haber más de una cónica (distinta de todo el plano) que pase por los cinco puntos, a saber, las constituidas por r unión con cualquier recta que contenga a E. Y lo mismo sucedería si los cinco puntos estuviesen alineados sobre r. En tal caso, además de la cónica que degenera en r, están las del tipo $r \cup s$ con s una recta distinta de r.

Todos estos argumentos conducen a los resultados que se enuncian a continuación.

Lema II.2.1 *Una cónica $\mathcal{Q}$ degenera en cada una de las siguientes circunstancias:*

i) *Hay en $\mathcal{Q}$ al menos tres puntos alineados.*

ii) *La cónica se reduce a un punto.*

iii) *Todo punto del plano pertenece a $\mathcal{Q}$.*

Teorema II.2.4 *Si una cónica $\mathcal{Q}$ no ocupa todo el plano y contiene al menos 5 puntos, entonces una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{Q}$ quede por completo determinada por 5 de los puntos por los que pasa es que* *haya a lo sumo* 3 *de ellos sobre una recta. Además, si de entre los cinco no hay* 3 *colineales, la cónica es no degenerada, mientras que la alineación de* 3 *de ellos implica que* $\mathcal{Q}$ *degenere en dos rectas secantes.*

§3 Polaridad inducida por una cuádrica

En esta sección se dotará de contenido geométrico a los conceptos basados en la relación de ortogonalidad que induce una forma cuadrática. Se comenzará estableciendo alguna terminología. Dos subespacios $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(T)$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ sobre K son *conjugados respecto de una cuádrica* $\mathcal{Q}(q)$, si $q(S,T)=0$. Por ejemplo, los subespacios $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(S^\perp)$ son conjugados. Se introduce la notación $\mathcal{P}(S)^\perp$ para referirse al subespacio proyectivo asociado al ortogonal $S^\perp$ de S. Si se aplica a un punto $A=<a>\in\mathcal{P}(V)$ la fórmula enunciada en el lema II.1.1, se tiene

$$\dim <a>^\perp = \dim V - \dim <a> + \dim(<a>\cap \operatorname{Rad} V),$$

lo cual indica que $A^\perp$ puede constituir un hiperplano o todo el espacio dependiendo de si A es o no singular. De $A^\perp$ se dirá que es el *subespacio polar* de A. De modo análogo, si un hiperplano $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}(V)$ no corta al vértice, entonces $\mathcal{H}^\perp$ consiste en un punto denominado el *polo del hiperplano*.

Con los términos establecidos, en una cuádrica no degenerada, se dan las siguientes propiedades:

i) *Los hiperplanos polares de los puntos de un hiperplano pasan todos por el polo del hiperplano.*

ii) *Hiperplanos que pasan por un punto tienen su polo en el hiperplano polar del punto.*

iii) *Un punto pertenece a la cuádrica si y solo si está en su hiperplano polar.*

Una vez descifrado el trabalenguas, las partes i) y ii) se obtienen como consecuencia inmediata de la simetría de la relación de ortogonalidad. Y la parte iii) no es más que enunciar en términos geométricos el hecho de que la isotropía de un vector equivale a la ortogonalidad consigo mismo. La evidencia de estas propiedades no menoscaba su importancia, pues son ellas las que van a permitir dualizar, en el caso no degenerado, los conceptos emparentados con las cuádricas.

Por un lado, para una cuádrica no degenerada, las aplicaciones $A \mapsto A^{\perp}$ y $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^{\perp}$ que llevan cada punto a su hiperplano polar y cada hiperplano a su polo, son una la inversa de la otra [3]. Además, la primera traslada puntos de un hiperplano en hiperplanos que pasan por un punto, mientras que la segunda realiza la misión dual, la de transformar hiperplanos concurrentes en un punto en puntos del mismo hiperplano. A esta pareja de aplicaciones se la conoce como *polaridad inducida por la cuádrica*. Por otra parte, tanto la condición incluida en iii) como la noción de polaridad se expresan en términos de incidencia entre puntos e hiperplanos, lo que permite su dualización.

Se examinará entonces en qué se traduce la tesis dual de iii), o sea, qué le ocurre a un hiperplano $\mathcal{P}(H)$ que pasa por su polo $\mathcal{P}(H)^{\perp}$. Tal situación equivale a decir que $H \cap H^{\perp}$ no se anula, pero $H \cap H^{\perp}$ coincide con el radical de H. Por tanto que el hiperplano contenga a su polo se transcribe en la degeneración de la forma cuadrática q_H. De ahí que se obtenga la siguiente verdad: *un hiperplano es tangente a una cuádrica si y solo si aloja a su polo.* Recuérdese, para que lo anterior tenga sentido, que hablar del polo de un hiperplano presupone que éste no alberga puntos singulares, lo cual sucede en el escenario no degenerado en el que se razona.

Fíjese ahora un sistema de coordenadas homogéneas en $\mathcal{P}(V)$ con respecto al cual la forma cuadrática q tenga a A por matriz. Sea P un punto cuyas coordenadas homogéneas se representarán por el vector fila u. El hiperplano polar de P consistirá en los puntos de coordenadas $x = (x_0, \ldots, x_n)$ que satisfagan $uAx^t = 0$, de ahí que la ecuación de $P^{\perp}$ tenga a $v = uA$ como vector fila de coeficientes. Multiplicando por A^{-1} esta última igualdad, se

[3] *De hecho, se trata de dos correlaciones.*

obtendría un método para el cálculo del polo de un hiperplano, conocida su ecuación. Pero las coordenadas homogéneas no varían por múltiplos escalares no nulos y, además, la matriz A es simétrica, por lo que, en vez de calcular la inversa de A, puede uno conformarse con la adjunta. Así, si un hiperplano se describe por $xv^t = 0$ con v como vector fila de coeficientes, el polo vendrá determinado por el punto de coordenadas $u = vA^{\text{adj}}$. Que el hiperplano pase por el polo equivale a que se satisfaga la expresión

$$vA^{\text{adj}}v^t = 0,$$

la cual se conoce como *ecuación tangencial de la cuádrica*. Resumiendo, la ecuación tangencial de una cuádrica no degenerada permite establecer qué hiperplanos son tangentes a la cuádrica.

Se examinará ahora qué ocurre en el dual $\mathcal{P}(V^*)$. La correlación estándar $*$ entre el espacio y su dual transforma puntos en hiperplanos e hiperplanos en puntos, y también hiperplanos que contienen a su polo (hiperplanos tangentes) en puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación del tipo $vA^{\text{adj}}v^t = 0$, para A una matriz simétrica, es decir, puntos del dual engendrados por vectores isótropos para la forma cuadrática de matriz A^{adj} en la base dual. ¿Y que son estos lugares geométricos sino lo que se ha estado denominando como cuádricas?

En definitiva, en ambiente no degenerado, "punto sobre una cuádrica" dualiza en "hiperplano tangente a la cuádrica" y viceversa, mientras que cuádrica es un concepto autodual[4].

El siguiente enunciado, cuya demostración se propondrá como ejercicio, da una idea de la posición relativa entre una cuádrica y su hiperplano tangente.

[4] *En este punto debe hacerse notar que todo lo anterior puede englobarse en un estudio más general que incluya cuádricas degeneradas. Si no se ha obrado así, se debe a que ello habría obligado a tratar correlaciones, sistemas nulos y polaridades en el* capítulo I.4, *el cual ya se extendió en demasía para las características de estos apuntes.*

Teorema II.2.5 *Para un punto no singular de una cuádrica, su hiperplano polar, denominado en este caso el* hiperplano tangente*, contiene a todas las rectas tangentes a la cuádrica que pasan por el punto.*

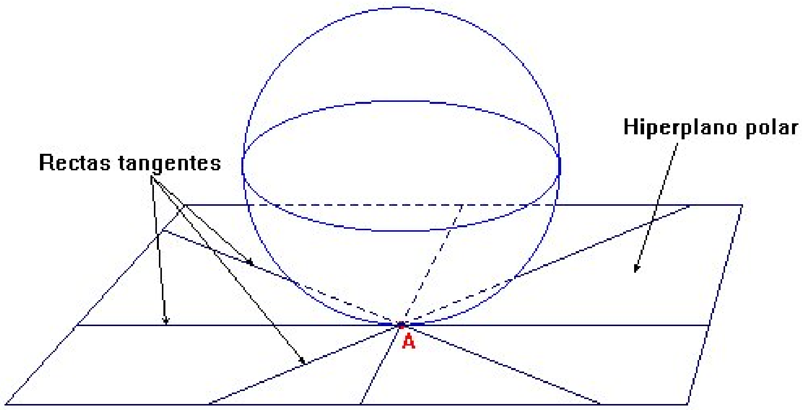

Figura II.2.2

A continuación, se investigará la restricción de una polaridad a una recta. Considérese una cuádrica $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(q)$ en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ sobre K y, en él, una recta $r = \mathcal{P}(L)$ que no pase por el vértice. Tómese un punto arbitrario $P =< u >\in r$. Como P no es singular, puede concebirse su hiperplano polar $P^{\perp} = \mathcal{P}(L^{\perp})$. La fórmula de Grassman ofrece en tales circunstancias dos posibilidades: o bien $r \subset P^{\perp}$, y se tendría la tangencia entre r y $\mathcal{Q}$, o bien $P^{\perp}$ corta a la recta r en exactamente un punto P' que, dicho sea de paso, es conjugado de P.

Se define entonces la biyección $\sigma : r \to r$ que aplica P en sí mismo cuando se dé la primera situación, y transforme P en P' en los demás casos. Nótese que $\sigma = 1_r$ si y solo si $r \subset \mathcal{Q}(q)$, mientras que $\sigma(Q) = P$ para cada $Q \in r$, si $\mathcal{Q}(q) \cap r$ se reduce al punto de tangencia P. En el caso restante, esto es, cuando la recta $r = \mathcal{P}(L)$ no se sitúa tangente a la cuádrica, la restricción q_L no degenera y las intersecciones, 2 o ninguna, de r y $\mathcal{Q}(q)$, constituyen puntos dobles de σ, según se desprende de la propiedad iii) enunciada más arriba. Como cada recta posee más de tres puntos, pueden escogerse $P =< u >$ y $Q =< v >$ distintos y en r con $Q \neq \sigma(P) \neq P$. En la base $\{u, v\}$, la matriz de q_L adquirirá la forma

$$A = \begin{pmatrix} q(u) & q(u,v) \\ q(u,v) & q(v) \end{pmatrix}.$$

Cada $X \in r - P$ está generado por un vector del tipo $xu + v$ y su imagen $X' = \sigma(X)$, por otro de la forma $x'u+v$. Entonces, se sigue de la conjugación entre X y X' que

$$0 = q(xu + v, x'u + v) = q(u)xx' + q(u,v)x + q(u,v)x' + q(v) =$$

$$q(u)xx' + q(u,v)(x + x') + q(v).$$

Leyendo el primer y último término de la expresión anterior, se reconoce en ella a la ecuación de una involución de r, ya que $q(u)q(v) - q(u,v)^2$ no se anula al coincidir con $|A|$.

Resumiendo para la polaridad σ inducida por una cuádrica $\mathcal{Q}$ sobre una recta r se dan los siguientes casos:

i) $\sigma = 1_r$ si $r \subset \mathcal{Q}$, es decir, si r es tangente a $\mathcal{Q}$ en todos sus puntos.

ii) σ es una aplicación constante si r es tangente a $\mathcal{Q}$ en un único punto.

iii) σ es una involución elíptica o hiperbólica dependiendo de si r es exterior o secante a $\mathcal{Q}$[5].

Merece la pena pormenorizar la segunda de las eventualidades descritas en iii). A tal fin, sea $r = \mathcal{P}(L)$ una recta que corta a una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en los puntos $A =< a >$ y $B =< b >$. La matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & q(a,b) \\ q(a,b) & 0) \end{pmatrix}$$

de q_L en la base $\{a, b\}$ posee determinante no nulo (razónese el motivo), por lo que $q(a,b) \neq 0$. Elíjase un punto arbitrario $P =< \lambda a + b >$ de r distinto de A y de B. A su conjugado P' lo engendrará un vector $\lambda' a + b$ para cierto escalar λ'. Razonando como antes se obtiene

$$0 = q(\lambda a + b, \lambda' a + b) = (\lambda + \lambda')q(a,b),$$

[5] *Esta última situación terminará de justificar en el capítulo siguiente los adjetivos "hiperbólica" y "elíptica" endosados a las proyectividades en una recta.*

de donde $\lambda = -\lambda'$. ¿A qué recuerda esto? Para que P haga las veces de punto unidad en el sistema de coordenadas $\{A, B; P\}$, se debería escoger a los vectores λa y b como generadores de A y B, lo cual nos lleva a que, en tal sistema, P' tiene abscisa -1. Sorpresa morrocotuda: los puntos A, B, P y P' se encuentran en cuaterna armónica.

Teorema II.2.6 *Los puntos de intersección de una recta secante a una cuádrica son conjugados armónicos de cualquier pareja de puntos conjugados respecto de la cuádrica.*

De este hecho sacaron bastante punta los geómetras del XIX. Por ejemplo, dada una cónica $\mathcal{Q}$ en un plano proyectivo, el teorema anterior proporciona un método gráfico para el trazado de la recta polar de un punto P que se describe en el siguiente

Corolario II.2.1 *Si un cuadrivértice se inscribe en una cónica, entonces cada punto diagonal no singular es el polo de la recta determinada por los otros dos puntos diagonales.*

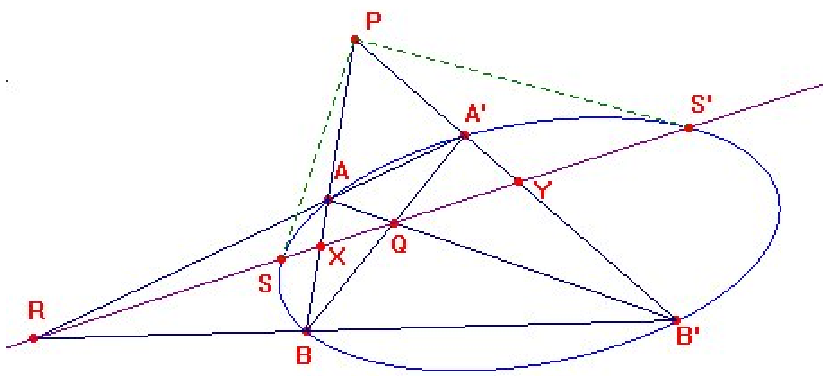

Figura II.2.3

Demostración Sea $\{A, B, A', B'\}$ un cuadrivértice inscrito en una cónica $\mathcal{Q}$ de un plano proyectivo. Denótense por $P = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $Q = \overline{AB'} \cap \overline{A'B}$ y $R = \overline{AA'} \cap \overline{BB'}$ a los puntos diagonales, y supóngase que P es no singular. Constrúyanse a continuación las respectivas intersecciones X y Y de la recta $\overline{PQ}$ con los lados $r = \overline{AB}$ y $s = \overline{A'B'}$ (véase la figura II.2.3). De la definición geométrica de cuaterna armónica se desprende que $(ABPX) = (A'B'PY) =$

-1. Tomar P no singular equivale a decir que r es secante a la cónica. Esto implica, en virtud del teorema II.2.6, que el conjugado de P en la recta r respecto de la cónica no es otro que X. Otro tanto puede decirse de Y si se razona sobre la recta s. Y como todos los conjugados del punto P han de encontrarse sobre su recta polar, debe ser $P^\perp = \overline{XY} = \overline{QR}$, lo que finaliza la demostración.

El argumento anterior ofrece, de propina, la construcción de las tangentes por P a la cónica, si es que estas existen. Para verlo, llámense S y S' a las intersecciones, si las hubiere, de $P^\perp$ con $\mathcal{Q}$. Se afirma que $\overline{PS}$ y $\overline{PS'}$ tocan tangencialmente a la cónica. En efecto, como $S \in P^\perp$, la simetría de la conjugación respecto de una cuádrica da $P \in S^\perp$. Pero S ya estaba sobre su propia polar al pertenecer a la cónica. En definitiva, $\overline{PS} = S^\perp$ es tangente a $\mathcal{Q}$ con S como punto de tangencia.

Y esto representa sólo una muestra de la cantidad de aplicaciones al dibujo que se desprenden del teorema II.2.6, válido también en dimensiones superiores. Por ejemplo, para hallar el plano polar de un punto respecto de una cuádrica en un espacio tridimensional, podrían calcularse dos de sus polares, las cuales determinarían el plano objeto de la indagación. En los ejercicios del cuaderno de prácticas se abundará en este tipo de problemas.

§4 Razón doble de cuatro puntos sobre una cónica

Esta sección se circunscribe de nuevo a la dimensión 2, donde se enuncia un importante resultado de Steiner y las consecuencias que de él se derivan. En particular, gracias a él se rescataron las cónicas del monopolio que ejercía sobre su estudio la geometría analítica y tomaron carta de consideración dentro de la geometría proyectiva.

Teorema II.2.7 **i)** *Si $\sigma : A^* \to B^*$ es una proyectividad entre haces de rectas de un plano tal que $A \neq B$ y $\sigma(\overline{AB}) \neq \overline{AB}$, entonces el conjunto*

$$\mathcal{Q} = \{r \cap \sigma(r) : r \in A^*\}$$

es una cónica no degenerada que pasa por A y B. Además, σ transforma la tangente a la cónica por A en la recta $\overline{AB}$, y esta última en la tangente a $\mathcal{Q}$ por B.

ii) *Recíprocamente, dada una cónica no degenerada $\mathcal{Q}$ y dos puntos A y B distintos sobre ella, la aplicación $\sigma : A^* \to B^*$ dada por*

$$\sigma(r) = \begin{cases} \overline{BP} & \text{si } r = \overline{AP} \text{ y } P \in \mathcal{Q} - \{A, B\}, \\ \overline{AB} & \text{si } r = A^{\perp}, \\ B^{\perp} & \text{si } r = \overline{AB} \end{cases}$$

es una proyectividad.

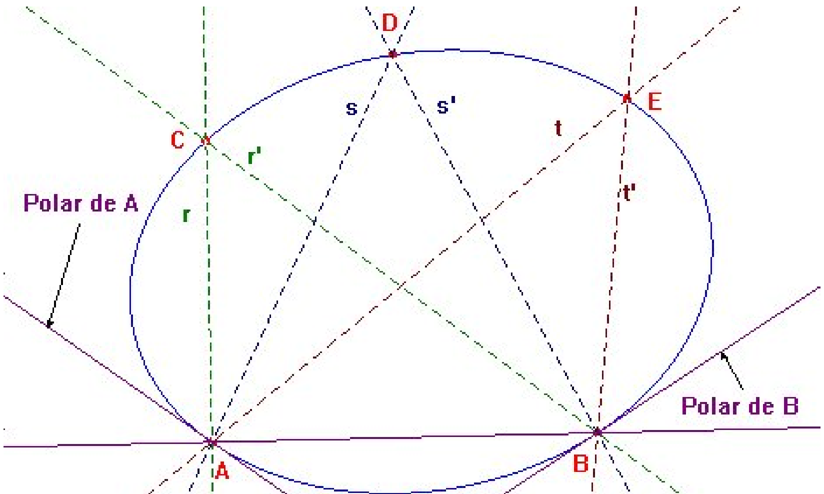

Figura II.2.4

Antes de abordar la demostración, conviene formular un par de comentarios. Adviértase que la primera parte del teorema muestra cómo el concepto de cónica (no degenerada) puede ser enunciado en términos exclusivamente geométricos. En concreto, los libros clásicos de geometría proyectiva definen una cónica como el lugar geométrico de las intersecciones de rectas homónimas para haces proyectivos no perspectivos. Y es que la condición de que $\overline{AB}$ no sea doble se traduce en que la proyectividad entre haces σ no es una perspectividad (teorema I.4.8.iv). Nótese también que la aplicación σ de la segunda parte está bien definida en todos los casos pues si una recta r pasa por A y no es tangente a $\mathcal{Q}$ (la restricción no degenera), entonces r corta a la cónica en exactamente un punto adicional P, aparte del propio A.

Demostración La estrategia para la primera parte consistirá en suponer que existe una cónica $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(q)$ compuesta por los puntos $p \cap \sigma(p)$, variando p en el haz de rectas A^*, para después construirla y comprobar que satisface las condiciones requeridas. Un primer indicio para ver quién es $\mathcal{Q}$ proviene de que tal cónica ha de pasar por B pues $B = \overline{AB} \cap \sigma(\overline{AB})$, sea cual sea $\sigma(\overline{AB})$. Además, a la recta $\sigma(\overline{AB})$ no le está permitido cortar a $\mathcal{Q}$ en otro punto distinto de B, pues ello iría contra la buena definición de σ. De ahí que $\sigma(\overline{AB})$ sea tangente a la cónica. Un razonamiento análogo sobre σ^{-1} conduce a que $A \in \mathcal{Q}$ y $\sigma(A^{\perp}) = \overline{AB}$.

Pero hacen falta más datos para determinar la cónica $\mathcal{Q}$. A tal fin, tómense dos rectas r y s del haz A^*, con $r \neq s$, y escríbase $r' = \sigma(r)$ y $s' = \sigma(s)$. Como por cada punto pasan al menos cuatro rectas (justifíquese), no hay inconveniente en escoger r y s distintas de $\overline{AB}$ y tales que r' y s' también difieran de $\overline{AB}$ (figura II.2.4). Llámense C y D a las respectivas intersecciones de r con r' y de s con s'. Las condiciones impuestas hasta ahora implican que $\{A, B, C, D\}$ constituye un cuadrivértice, lo cual permite fijar el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B, C; D\}$. En él, las rectas r, s, r' y s' tienen por ecuaciones

$$r \equiv x_1 = 0, \;\; s \equiv x_1 - x_2 = 0, \;\; r' \equiv x_0 = 0 \quad \text{y} \quad s' \equiv x_0 - x_2 = 0.$$

Interesa elegir en los haces A^* y B^* sendos sistemas de coordenadas homogéneas. Para el centrado en A, escójase el $\{r, s; t\}$, con la recta unidad $t \equiv 2x_1 - x_2 = 0$, aquella cuya ecuación es la suma de las ecuaciones de r y s. Su homónima $t' = \sigma(t)$ será cierta recta que pasa por $B = (0, 1, 0)$. Para darle forma a la ecuación de t', sea $P = t' \cap \overline{CD}$. Las coordenadas de P responden pues al esquema $P = (\epsilon, \epsilon, \delta)$. Como P no coincide ni con C ni con D (¿por qué?), es $\epsilon \neq 0$, y no hay impedimento en escribir $P = (1, 1, \gamma)$, con $\gamma \neq 1$[6]. Se afirma que $\gamma \neq 2$ pues, de lo contrario, $P = t \cap \overline{CD}$ y, por el

[6] *Estas simplificaciones tienen por objeto minimizar el número de escalares que han de intervenir en la demostración.*

teorema fundamental, σ sería la perspectividad de eje $\overline{CD}$, lo que contradice las hipótesis. Al pasar t' por los puntos B y P, su ecuación viene entonces determinada por

$$t' \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = \gamma x_0 - x_2 = 0.$$

Sea $E = t \cap t' = (2, \gamma, 2\gamma)$. Supóngase por el momento que $\gamma \neq 0$. Las sucesivas elecciones de puntos han conseguido entonces que entre A, B, C, D y E no haya tres de ellos alineados, razón por la cual $\mathcal{Q}$ debe ser la única cónica no degenerada que pasa por ellos. Recordando los razonamientos previos al teorema II.2.4, la matriz M de la forma cuadrática q tendrá el aspecto

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix},$$

con $\lambda + \mu + \nu = 0$ y $\lambda + 2\mu + \gamma\nu = 0$. De este último sistema de dos ecuaciones lineales, basta con elegir una solución no trivial, por ejemplo, tomando $\nu = 1$ se tiene

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma - 2 & 1 - \gamma \\ \gamma - 2 & 0 & 1 \\ 1 - \gamma & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero quedó pendiente más arriba ver qué sucede si $\gamma = 0$. En ese caso $t' \equiv x_2 = 0$ y $E = A$ no proporciona el quinto punto necesario. Mala suerte. Eso ha ocurrido al elegir como recta unidad t aquella que se transforma por σ en la $\overline{AB} = t'$. Que no cunda el pánico pues esta circunstancia ya se previó al comienzo de la demostración. Allí se concluía con que t ha de ser tangente a $\mathcal{Q}$ en A . La ecuación de la polar $A^\perp$ viene dada por

$$A^\perp \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

De escribir la condición $t = A^\perp$ se deduce $\lambda = -2$ y $\mu = \nu = 1$. Así, la matriz de la cónica sigue respondiendo en este caso al patrón de la matriz M con $\gamma = 0$. Además, también $\det(M)$ continúa siendo no nulo. Ha quedado pues construida la única cónica no degenerada que puede satisfacer las tesis del teorema. Queda por comprobar que para cada recta u por A , el punto $u \cap \sigma(u)$ pertenece a $\mathcal{Q}$.

Pero para ver cómo se comporta la proyectividad σ entre los haces, aún falta por fijar un sistema de coordenadas homogéneas en B^*. Se hará de forma que r' y s' sean las rectas base, y t' haga de recta unidad. De imponer que la ecuación de t' sea suma de sendas ecuaciones que decriban a r' y t' se desprende que

$$r' \equiv (\gamma - 1)x_0 = 0, \quad s' \equiv x_0 - x_2 = 0 \text{ y } t' \equiv \gamma x_0 - x_2 = 0.$$

Tómese ahora cualquier recta $u \in A^*$. Hay que demostrar que $X = u \cap \sigma(u) \in \mathcal{Q}$. Es obvio que esto sucede si $u = r$. En caso contrario, existe un escalar λ con $(rstu) = \lambda$. La ecuación de u se obtiene entonces de multiplicar por λ la de r y sumarla a la de s, es decir, $u \equiv (\lambda + 1)x_1 - x_2 = 0$. Y como σ conserva razones dobles de lápices debe ser $\sigma(u') \equiv \lambda[(\gamma - 1)x_0] + [x_0 - x_2] = 0$. El lector puede comprobar ahora que el punto X de intersección de u y $\sigma(u)$ tiene por vector fila x de coordenadas el dado por

$$x = (\lambda + 1, \lambda(\gamma - 1) + 1, (\lambda + 1)(\lambda(\gamma - 1) + 1)).$$

Un cálculo directo prueba que $xMx^t = 0$, con lo que $X \in \mathcal{Q}$.

Finalizada la primera parte, la segunda es ahora más sencilla. Sean A y B dos puntos distintos de una cónica no degenerada $\mathcal{Q}$, y considérese la aplicación $\sigma : A^* \to B^*$ definida en la forma

$$\sigma(r) = \begin{cases} \overline{BP} & \text{si } r = \overline{AP} \text{ y } P \in \mathcal{Q} - \{A, B\}, \\ \overline{AB} & \text{si } r = A^\perp, \\ B^\perp & \text{si } r = \overline{AB}. \end{cases}$$

Elíjanse tres puntos C, D y E sobre la cónica, distintos entre sí y de A y B. Entre los cinco puntos considerados no puede haber tres de ellos colineales pues $\mathcal{Q}$ degeneraría (teorema II.2.4). La cónica coincide entonces con la única no degenerada que pasa por los cinco puntos A, B, C, D y E.

Sea $\tau : A^* \to B^*$ la proyectividad entre haces que transforma la recta $\overline{AC}$ en la $\overline{BC}$, la $\overline{AD}$ en la $\overline{BD}$ y la $\overline{AE}$ en la $\overline{BE}$. La no colinealidad de C, D y E fuerza a que $\tau(\overline{AB}) \neq \overline{AB}$. La primera parte del teorema pone ahora en evidencia que τ opera igual que σ, luego σ es una proyectividad y el teorema está acabado.

En el párrafo precedente se ha deslizado a conciencia una pequeña trampa. El lector que quiera descubrirla por sí mismo debería detenerse aquí a meditar, ya que la sutileza que se ha colado será desvelada justo tras el próximo punto y seguido. Y es que no siempre las cónicas no degeneradas disponen de una cantidad de puntos suficiente como para realizar la elección de los C, D y E anteriores. Más adelante se pedirá probar que las cónicas no degeneradas y no vacías de un plano sobre un cuerpo de q elementos constan todas ellas de $q+1$ puntos. Luego para disponer de 5 puntos sobre una cónica, el cuerpo ha de poseer al menos 4 escalares. De ahí que el razonamiento utilizado para demostrar el apartado ii) del teorema II.2.7 no funcione en el plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}_3$. Uno de los problemas de este capítulo tiene por objeto subsanar semejante deficiencia.

El alcance del teorema II.2.7 quedará bien patente en la cadena de consecuencias que se enunciarán a continuación. Se avecinan más teoremas de tan hondo calado que llevan nombre propio [7].

Teorema II.2.8 (Teorema de Steiner) *Si A, B, C y D se sitúan sobre una cónica $\mathcal{Q}$ que no ocupa todo el plano, y X es otro punto de $\mathcal{Q}$ para el que tiene sentido referirse al lápiz $(\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XD})$, entonces la razón doble*

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD})$$

no depende de la elección de X. Además, esta razón doble coincide con la de los lápices $(A^\perp, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$, $(\overline{BA}, B^\perp, \overline{BC}, \overline{BD})$, $(\overline{CA}, \overline{CB}, C^\perp, \overline{CD})$ y $(\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}, D^\perp)$ cada vez que estos existan.

[7] *En realidad, se trata de resultados equivalentes en el sentido de que demostrando uno de ellos pueden deducirse de él los demás.*

Demostración Se supondrá que existe el lápiz $(\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XD})$ y se razonará sobre las disposiciones posibles de puntos.

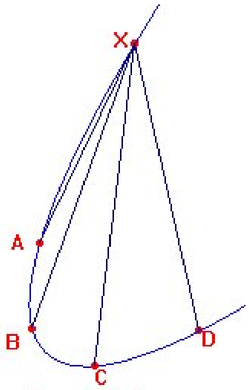

Figura II.2.4.a

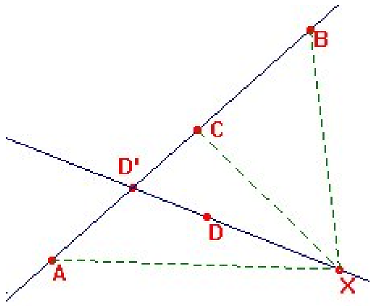

Figura II.2.4.b

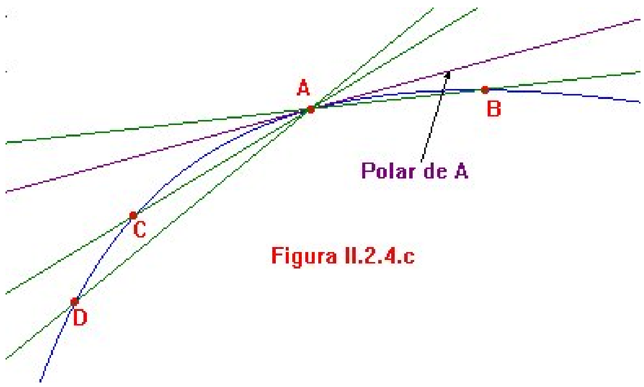

Figura II.2.4.c

Un primer caso será que A, B, C y D sea colineales, lo cual obliga a que $\mathcal{Q}$ degenere (lema II.2.1) en dos rectas secantes r y s con $A, B, C, D \in r$ y $X \in s - r$. La tesis de Steiner se obtiene entonces del teorema I.4.5.

Si tres de ellos, por ejemplo A, B y C, se disponen sobre una recta que no pasa por el cuarto, de nuevo $\mathcal{Q}$ se expresa como $r \cup s$, para dos rectas distintas r y s, aunque ahora con $A, B, C \in r - s$ y $D, X \in s - r$. Sea $D' = r \cap s$ (figura II.2.5.b). Como

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}) = (\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD'}),$$

sustituyendo D por D' se reduciría esta circunstancia al caso anterior. Una reducción semejante puede llevarse a cabo si $\overline{XD} = \overline{XB}$ o $\overline{XD} = \overline{XC}$.

Supóngase entonces que no hay tres puntos alineados de entre A, B, C y D y las rectas $\overline{XA}$, $\overline{XB}$, $\overline{XC}$ y $\overline{XD}$ son distintas. La cónica no denegera (teorema II.2.4). Tómese otro punto $Y \neq X$ sobre $\mathcal{Q}$ para el que exista el lápiz $(\overline{YA}, \overline{YB}, \overline{YC}, \overline{YD})$. La aplicación $\sigma : X^* \to Y^*$ definida en la parte ii) del teorema II.2.7.ii) es una proyectividad, luego

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}) = (\sigma(\overline{XA})\sigma(\overline{XB})\sigma(\overline{XC})\sigma(\overline{XD})) = (\overline{YA}\ \overline{YB}\ \overline{YC}\ \overline{YD}).$$

La igualdad de arriba deja bien patente que la razón doble del lápiz considerado no depende de la elección de X. En esta misma cónica no degenerada, tomando $Y = A$ se prueba que

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}) = (A^{\perp}\ \overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}).$$

Y de igual forma se procedería con el resto de las razones dobles que involucran a una polar. Se deja como ejercicio al lector examinar esta circunstancia en los casos degenerados.

Varias consecuencias se obtienen del teorema de Steiner. La primera, la introducción del concepto de razón doble para cuatro puntos de una cónica $\mathcal{Q}$. En concreto, si A, B, C y D son cuatro puntos no alineados de $\mathcal{Q}$, con A, B y C distintos entre sí y $D \neq A$, se define la *razón doble* $(ABCD)$ como la de cualquiera de los lápices $(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD})$ para $X \in \mathcal{Q}$[8], y en caso de que A, B, C y D fuesen colineales, su razón doble como puntos de la cónica será la misma que la que tienen como puntos sobre una recta.

También interesa comentar que el teorema de Steiner confirma el concepto intuitivo de tangencia. Porque no es infrecuente que los textos de matemática elemental, o incluso los más clásicos de cálculo infinitesimal, se refieran a la recta tangente a una curva como la "secante en dos puntos próximos". Allí se habla a veces de la tangente en un punto D como el límite de la secante $\overline{XD}$, cuando X tiende a D. Y aunque en un plano proyectivo genérico no tiene por qué haber ninguna topología en la que basar los límites

[8] *Como sucediera en la prueba del* teorema II.2.7.ii)*, puede que en cuerpos muy pequeños no haya opción para elegir un quinto punto $X \in \mathcal{Q}$. En tal situación habría que recurrir a alguna recta polar para la definición de la razón doble de cuatro puntos sobre la cónica.*

propios de las funciones reales, la idea que sugiere la expresión

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}) = (\overline{DA}\ \overline{DB}\ \overline{DC}\ D^{\perp})$$

es precisamente esa, que cuando X "se acerca" a D, la secante $\overline{XD}$ "se aproxima" a la tangente $D^{\perp}$.

A continuación se expondrá otra de las consecuencias del teorema de Steiner, la cual constituye uno de los más importantes resultados de la geometría plana.

Teorema II.2.9 (Teorema de Pascal) *Si A, B, C, P, Q y R son seis puntos sobre una cónica $\mathcal{Q}$ para los que existen las intersecciones $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$, $Y = \overline{AR} \cap \overline{CP}$ y $Z = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$, entonces X, Y y Z están alineados.*

Antes de exponer la demostración, obsérvese que el teorema de Pascal contiene a uno de los resultados históricos de la geometría, nada menos que el teorema de Pappus (teorema I.5.2), como caso particular. Para convencerse de ello basta considerar el caso en que la cónica $\mathcal{Q}$ degenere en dos rectas distintas, una conteniendo a A, B y C, y la otra pasando por P, Q y R.

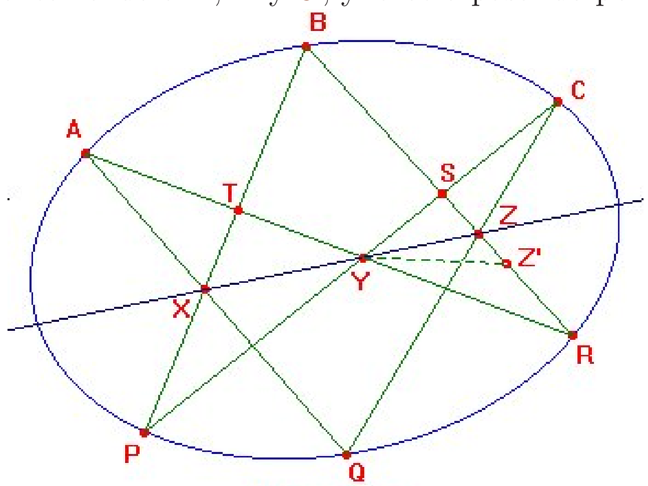

Figura II.2.6

Demostración El teorema de Steiner permite que funcione aquí la misma idea que se utilizó con éxito para probar el teorema de Pappus. Pero antes se eliminarán algunas situaciones particularmente sencillas. Por ejemplo, para $X = Y$ es evidente que la tesis se satisface. Supóngase pues $X \neq Y$.

Si $\overline{XY} = \overline{BR}$, entonces $Z \in \overline{XY}$. De ser $\overline{BR} = \overline{CP}$, ambas rectas han de coincidir con $r = \overline{BP}$, lo que obliga a que $X, Y, Z \in r$. Y a igual conclusión se llegaría si $\overline{BP} = \overline{AR}$. En el caso restante se permite la construcción de los puntos $Z' = \overline{XY} \cap \overline{BR}$, $S = \overline{CP} \cap \overline{BR}$ y $T = \overline{BP} \cap \overline{AR}$ (sígase la demostración a través de la figura figura II.2.6). El teorema se desprende ahora de la siguiente cadena de igualdades

$$(BSRZ) = (\overline{CB}\;\overline{CP}\;\overline{CR}\;\overline{CQ}) =$$

$$(\overline{AB}\;\overline{AP}\;\overline{AR}\;\overline{AQ}) = (BPTX) = (BSRZ'),$$

la cual implica $Z = Z'$. Se ha hecho uso de los teoremas II.2.8, I.4.5 , y del hecho de que la perspectividad de centro Y de $\overline{BP}$ sobre $\overline{BR}$ conserva razones dobles.

Una técnica semejante a la utilizada demuestra el recíproco del teorema de Pascal.

Teorema II.2.10 *Sean P, Q, R, B y C cinco puntos distintos sobre una cónica no degenerada $\mathcal{Q}$ y r una recta arbitraria que pasa por el punto $Z = \overline{CQ} \cap \overline{BR}$. Entonces $A = \overline{RY} \cap \overline{QX}$, pertenece a la cónica, donde $Y = \overline{CP} \cap r$ y $X = \overline{BP} \cap r$.*

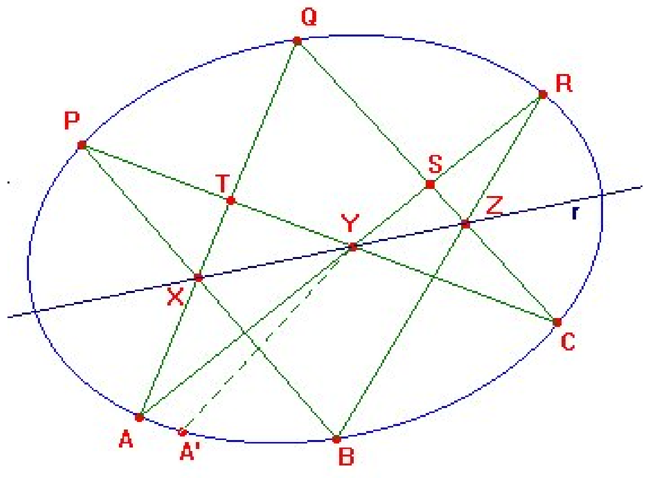

Figura II.2.7

Demostración Antes que nada, el lector debería de convencerse de que los elementos mencionados existen. Y es que la no degeneración de la cónica implica que no puede contener tres puntos alineados, De ahí se deduce la existencia de los puntos X, Y y Z. Complete el lector los detalles. Idéntica razón autoriza a construir los puntos auxiliares $T = \overline{QX} \cap \overline{CP}$ y $S = \overline{RY} \cap \overline{CQ}$ (figura II.2.7). Sean s y t las rectas definidas mediante

$$s = \begin{cases} \overline{PA'} & \text{si } \overline{RY} \text{ es secante a } \mathcal{Q} \text{ en } R \text{ y } A', \\ \overline{PR} & \text{si } \overline{RY} = R^{\perp}, \end{cases}$$

y

$$t = \begin{cases} \overline{RA'} & \text{si } s = \overline{PA'}, \\ R^{\perp} & \text{si } s = \overline{PR}. \end{cases}$$

De nuevo el teorema de Steiner permite escribir la cadena de igualdades

$$(\overline{PB}\ \overline{PC}\ \overline{PQ}\ s) = (\overline{RB}\ \overline{RC}\ \overline{RQ}\ t) =$$

$$(ZCQS) = (XTQA) = (\overline{PB}\ \overline{PC}\ \overline{PQ}\ \overline{PA}),$$

la cual asegura que $s = \overline{PA}$. Ahora hay que distinguir dos casos. Si $\overline{RY}$ interseca a $\mathcal{Q}$ en el punto $A' \neq R$, entonces $A' = A$ pues $A = \overline{PA} \cap \overline{RY}$ y $A' \in \overline{PA'} = \overline{PA}$. En la otra circunstancia es $s = \overline{PR}$. Aquí $R = \overline{PR} \cap R^{\perp} = \overline{PA} \cap \overline{RY} = A$. En ambas situaciones $A \in \mathcal{Q}$ y el teorema está probado.

Esta sección finalizará dando una visión de conjunto de los resultados obtenidos. Es lógico interpretar los teoremas II.2.7 y II.2.10 como la contrapartida sintética al teorema II.2.4, en el sentido de que aquellos ofrecen procedimientos geométricos para el trazado de una cónica de la que se conocen cinco puntos. Por otra parte, aquí se ha derivado el teorema de Pascal (II.2.9) del de Steiner (II.2.8), y este, a su vez del teorema II.2.7. En realidad se trata de enunciados equivalentes pues cada uno de ellos implica los otros dos. Y habida cuenta del comentario precedente, en este lote de equivalencias puede también incluirse al teorema II.2.4. Sobre este particular tratarán varios de los ejercicios del capítulo y algunas de las prácticas del cuaderno. Otra tanda de importantes aplicaciones se aplazan hasta el capítulo §II.5.

§4 Clasificación proyectiva de las cuádricas

Definición II.2.3 De dos cuádricas en sendos espacios proyectivos de dimensión n sobre el mismo cuerpo se dirá que son *proyectivamente equivalentes* si existe alguna proyectividad que trasforme una en la otra.

Clasificar cuádricas consiste en dar la lista completa, salvo equivalencias, de las que pueda haber en un espacio proyectivo concreto. Este problema, en general, no es sencillo pues en los tipos no degenerados depende bastante de la aritmética del cuerpo base. Estas notas se limitarán a exponer, en dimensiones pequeñas, algún caso accesible sobre un cuerpo finito y enunciar un teorema que englobará dos ejemplos notables, el real y el complejo.

En la demostración del teorema II.2.1 se vio cómo una proyectividad $\sigma = \mathcal{P}(f)$ entre espacios proyectivos de dimensión mayor que 1 transformaba una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en la cuádrica $\mathcal{Q}(q')$ con $q' = q \circ f^{-1}$. No es difícil comprobar que q y q' han de poseer el mismo rango. De ahí que lo natural de sospechar en la igualdad de rangos como una condición necesaria para la equivalencia proyectiva de cuádricas.

En efecto. Sea $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ una proyectividad que transforma la cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en la cuádrica $\mathcal{Q}(q')$. Supóngase que r es una recta de $\mathcal{P}$ tangente a $\mathcal{Q}(q)$. Entonces, una de dos, o r toca a la cuádrica en un único punto, o $r \subset \mathcal{Q}$. De ahí que $\sigma(r) \cap \mathcal{Q}(q')$ se reduzca a un punto o $\sigma(r) \subset \mathcal{Q}(q')$. En definitiva, σ conserva la tangencia de rectas. Del teorema II.2.3 se desprende que la imagen del vértice de la primera cuádrica constituye el vértice de la segunda, luego los rangos de q y q' han de coincidir.

Otro invariante que habrá que contemplar para saber si dos cuádricas son o no proyectivamente equivalentes será el índice de Witt, ya que éste representa la dimensión de los subespacios totalmente isotrópicos maximales de un suplemento del radical y, por tanto, de los subespacios contenidos en una directriz de la cuádrica.

Teorema II.2.11 *Son condiciones necesarias para la equivalencia proyectiva de dos cuádricas $\mathcal{Q}(q)$ y $\mathcal{Q}(q')$, situadas en sendos espacios $\mathcal{P}(V)$ y $\mathcal{P}(V')$ de la misma dimensión sobre K, que coincidan los rangos e índices* *de Witt de las formas cuadráticas* q *y* q'*. Tales condiciones son también suficientes en cada una de las siguientes circunstancias:*

i) *el cuerpo* K *es algebraicamente cerrado,*

ii) K *es un cuerpo ordenado en el que cada elemento positivo admite una raíz cuadrada.*

Demostración La necesidad ya se ha probado. En el caso algebraicamente cerrado, el índice de Witt alcanza el máximo valor posible (recuérdese el comentario del final de la sección §II.1.3. De ahí que la igualdad de dimensiones y rangos fuerce a las descomposiciones en sumas ortogonales directas $V = \operatorname{Rad} V \oplus (\bigoplus_1^k P_i) \oplus W$ y $V' = \operatorname{Rad} V' \oplus (\bigoplus_1^k P_i') \oplus W'$, con los P_i y los P_i' planos hiperbólicos, mientras que los subespacios no isotrópicos W y W' tienen ambos dimensión 1 o se anulan a la vez. Tómense sendas bases $\{e_0, \dots, e_r\}$ del radical de V y $\{e_0', \dots, e_r'\}$ del radical de V'. Para cada P_i y cada P_i' elíjanse respectivos pares hiperbólicos $\{u_i, v_i\}$ y $\{u_i', v_i'\}$. Por último, si $W \neq 0$, sean $u \in W$ y $u' \in W'$ vectores no nulos con $q(u) = 1$ y $q(u') = 1$, cuya existencia queda asegurada por la no isotropía y el carácter algebraicamente cerrado de K. No representa ahora gran dificultad probar que el isomorfismo lineal $f : V \to V'$ que actúa sobre la base de V en la forma $f(e_i) = e_i'$, $f(u_i) = u_i'$, $f(v_i) = v_i'$ y, eventualmente, $f(u) = u'$, induce una proyectividad que transforma la cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en la cuádrica $\mathcal{Q}(q')$.

En la circunstancia restante (K es un cuerpo ordenado y tal que cada elemento positivo posee raíz cuadrada), tanto V como V' admiten descomposiciones de Silvester y, por consiguiente, sendas bases ortogonales en las que las formas cuadráticas q y q' se expresan por matrices diagonales

$$\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

con idéntico número de ceros y la misma cantidad de parejas $(1, -1)$ (repásese de nuevo el final de la sección §II.2.3). Procediendo por analogía con el caso algebraicamente cerrado, el lector debería estar capacitado para construir una proyectividad que traslade la primera cuádrica a la segunda.

El teorema anterior cierra, en particular, la clasificación proyectiva de cuádricas en espacios sobre cuerpos tan importantes como los reales y los complejos. Sin embargo, para el cuerpo de los racionales, el cual no se contempla en ninguna de las eventualidades i) y ii) del enunciado, ya se presentan problemas diofánticos de solución no trivial [9].

Como se prometió al comienzo de esta sección, antes de proceder a describir las cónicas y cuádricas tridimensionales reales o complejas, se examinará un ejemplo accesible sobre un cuerpo pequeño. Se dará la lista, salvo equivalencias proyectivas, de todas las cónicas del plano $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}_3)$. La ecuación reducida de una de tales cónicas tomará la forma

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0.$$

1) Cónicas no degeneradas

Ninguno de los coeficientes se anula por lo que, salvo múltiplos escalares no nulos y permutaciones de coordenadas, sólo hay dos posibles ecuaciones reducidas, $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ y $2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. La primera cónica se compone de los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ y $(1, 1, 2)$ que constituyen un símplex. Una comprobación de rutina desemboca en que la otra cónica también está constituida por cuatro puntos sin tres de ellos alineados. Así pues, en virtud del teorema fundamental y del teorema II.2.1, hay tantas cónicas no degeneradas como cuadrivértices y todas ellas son proyectivamente equivalentes.

2) Cónicas definidas por formas cuadráticas de rango 2

Uno de los coeficientes se anula. Entonces, salvo permutaciones de coordenadas y múltiplos escalares no nulos, se presentan dos ecuaciones reducidas: $x_0^2 + x_1^2 = 0$ y $2x_0^2 + x_1^2 = 0$. En ambos casos el vértice se reduce al punto $(0, 0, 1)$ y la directriz se interpreta como una cuádrica no degenerada en la recta engendrada por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Se examinará por separado cada subcaso.

[9] *El lector interesado puede consultar el párrafo* 24 *de* [Santaló].

a) La cónica tiene por ecuación $x_0^2 + x_1^2 = 0$. Como $(x_1/x_0)^2 = 2$ no posee soluciones sobre $\mathbb{Z}_3$, la directriz no contiene puntos y la cónica se limita al vértice.

b) La cónica tiene por ecuación $2x_0^2 + x_1^2 = 0$. Ahora $(x_1/x_0)^2 = 1$ tiene dos soluciones, 1 y 2, y la directriz consta de dos puntos. El teorema II.2.2 describe a la cónica como la unión conjuntista de dos generatrices y, por consiguiente, contiene 7 puntos distribuidos en dos rectas. Este hecho impide la equivalencia proyectiva con la cónica anterior. Nótese además que ahora el índice de Witt es 1, mientras que antes se anulaba.

3) Cónicas definidas por formas cuadráticas de rango 1

Es suficiente con estudiar la cónica $x_0^2 = 0$, la cual no es sino la recta $x_0 = 0$ que pasa por 4 puntos.

4) Cónicas de rango 0

La cónica llena el espacio y posee 13 puntos.

Obsérvese que, en una situación tan simple como la examinada, no presenta dificultades clasificar una cónica en el plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}_3$: salvo equivalencias proyectivas, una cónica es, bien un símplex, bien un punto, bien una pareja de rectas secantes, bien un par de rectas superpuestas, o bien todo el plano.

Se pasará ahora a dar la lista de cónicas reales, expresando en cada caso la ecuación reducida de $\mathcal{Q}(q)$ y cómo diagonaliza la matriz A de la forma cuadrática q.

1) Rango 3. Cónicas no degeneradas

1.1) Índice 0. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. $A = \pm\operatorname{diag}(1, 1, 1)$

De anularse el índice de Witt se deduce que la cónica no tiene puntos y se dice de ella que es una *elipse imaginaria*.

1.2) Índice 1. $\mathcal{Q}(q) \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. $A = \pm\operatorname{diag}(-1, 1, 1)$

Ahora hay vectores isótropos y la cónica tiene puntos. A este tipo se le denomina *elipse real*.

2) Rango 2. El vértice consiste en un único punto

2.1) Índice 0. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_0^2 + x_1^2 = 0$. $A = \pm \operatorname{diag}(0, 1, 1)$

La directriz no tiene puntos y la cónica se reduce al vértice. En tal situación, suele decirse de la cónica que se trata de *una pareja de rectas imaginarias que se cortan en un punto real*. La razón de este galimatías se entiende cuando se contempla el plano proyectivo real contenido en el complejo, donde $x_0^2 + x_1^2 = 0$ describe al par de rectas de ecuaciones $x_0 = ix_1$ y $x_0 = -ix_1$.

2.2) Índice 1. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_1^2 - x_2^2 = 0$. $A = \operatorname{diag}(0, 1, -1)$

La directriz es ahora una cuádrica no degenerada y no vacía sobre una recta y la cónica constará de las dos generatrices que pasan por el vértice y se apoyan en los dos puntos de la directriz. Se observan las ecuaciones de la pareja de rectas que componen la cónica, a saber, $x_2 = x_1$ y $x_2 = -x_1$.

3) Rango 1. El vértice es toda una recta. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_2^2 = 0$. $A = \pm \operatorname{diag}(0, 0, 1)$

La dimensión 1 de cualquier suplemento del radical fuerza a que el índice se anule, puesto que en una recta vectorial, por cuestión de dimensiones, "no caben" planos hiperbólicos. La directriz no contiene puntos y la cónica coincide con el vértice. En tales circunstancias se dice de la cónica que es una *recta doble*.

4) Rango 0. $\mathcal{Q}(q) \equiv 0 = 0$. $A = 0$.

De nuevo el índice se anula. La cónica llena el plano.

La anterior clasificación sirve también para cónicas en el plano complejo sin más que limitar la lectura a los subcasos de mayor índice de Witt posible.

Para confeccionar la relación de cuádricas tridimensionales reales se introduce el término *reglada* para referirse a las cuádricas no degeneradas en las cuales, por cada punto, pasan rectas contenidas en la cuádrica. Cuando el vértice se reduzca a un punto se hablará de *conos*.

He aquí, salvo equivalencias proyectivas, todas las cuádricas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

1) Rango 4. Cuádricas no degeneradas

1.1) Índice 0. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. $A = \pm\,\mathrm{diag}(1,1,1,1)$

La cuádrica no tiene puntos. Se trata de un *elipsoide imaginario*.

1.2) Índice 1. $\mathcal{Q}(q) \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. $A = \pm\,\mathrm{diag}(1,1,1,1)$

Ahora sí que hay puntos, pero los subespacios vectoriales totalmente isotrópicos maximales tienen dimensión 1, por lo que no puede haber rectas contenidas en esta cuádrica denominada *elipsoide real no reglado*.

1.3) Índice 2. $\mathcal{Q}(q) \equiv -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$. $A = \pm\,\mathrm{diag}(-1,1,-1,1)$

Que el índice sea 2 indica la existencia de subespacios totalmente isotrópicos maximales bidimensionales, o sea, rectas proyectivas contenidas en la cuádrica. Cada punto P de la cuádrica está engendrado por un vector isótropo u, que puede completarse a una pareja de pares hiperbólicos (u,v) y (u,v') que generan sendos planos hiperbólicos ortogonales entre sí. Tanto las rectas proyectivas $\mathcal{P}(< u, u' >)$ como $\mathcal{P}(< u, v' >)$ se componen de puntos de $\mathcal{Q}(q)$. Resumiendo, por cada punto de la cuádrica pasan dos rectas totalmente contenidas en ella, y se encuentra uno frente a un *elipsoide real reglado*.

2) Rango 3. El vértice es un punto

En todos los subcasos se tratará de conos cuya directriz es alguna de las cónicas no degeneradas clasificadas con anterioridad.

2.1) Índice 0. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. $A = \pm\,\mathrm{diag}(0,1,1,1)$

La directriz es una elipse imaginaria y la cuádrica se limita al vértice. Se hablará entonces de un *cono imaginario con vértice real*.

2.2) Índice 1. $\mathcal{Q}(q) \equiv -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. $A = \pm\,\mathrm{diag}(0,-1,1,1)$

La cuádrica consiste en el haz de rectas que pasan por el vértice y atraviesan una elipse real, es decir, un *cono real*.

3) Rango 2. El vértice es una recta

3.1) Índice 0. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_2^2 + x_3^2 = 0$. $A = \pm\,\mathrm{diag}(0,0,1,1)$

La directriz no tiene puntos y la cuádrica se reduce al vértice. Se denominará *par de planos imaginarios que se cortan en una recta real*.

3.2) Índice 1. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_2^2 - x_3^2 = 0$. $A = \pm\,\mathrm{diag}(0,0,1,-1)$

Ahora la directriz consiste en una cuádrica no degenerada y no vacía sobre una recta luego consta de 2 puntos. De ahí que la cuádrica se componga de dos planos secantes en una recta (el vértice).

4) Rango 1. El vértice ocupa todo un plano. $\mathcal{Q}(q) \equiv x_3^2 = 0$. $A = \mathrm{diag}(0,0,0,1)$

El índice se ha de anular y la cuádrica se reduce a un *plano doble*.

5) Rango 0. $\mathcal{Q}(q) \equiv 0 = 0$. $A = 0$

Se trata de la cuádrica que llena el espacio.

De nuevo la clasificación de las cuádricas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$ resulta de la anterior restringida a los subcasos de índice máximo.

Y se acabará esta sección con un ejemplo práctico. Supóngase que se pide clasificar cada una de las cónicas reales de la familia

$$\lambda x_0^2 + \lambda x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 + 2\lambda x_1x_2 = 0,$$

la cual consta de una cónica por cada real λ. Se comenzará por escribir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

de la forma cuadrática q. El determinante de A vale $-(\lambda-1)(\lambda^2-1)$, por lo que, para $\lambda \notin \{-1,1\}$, se dispone de cónicas no degeneradas. Serán examinados en primer lugar estos casos, dejando para más adelante las particularizaciones $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Se determinará el índice de Witt encontrando una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Usando, por ejemplo, el primero de los métodos expuestos en la sección §II.2.1, elíjase un vector no isótropo. A simple vista se observa que $u_0 = (0,0,1)$ satisface $q(u_0) = 1$. El complemento ortogonal del subespacio engendrado por u_0 tiene por ecuación

$$-x_0 + \lambda x_1 + x_2 = 0.$$

El vector $u_1 = (1,0,1)$ satisface la relación anterior y no es isótropo ya que $q(u_1) = \lambda - 1$, cuando se ha supuesto $\lambda \neq 1$. Falta por dar con un vector ortogonal a u_0 y u_1. A tal efecto se calcula el complemento ortogonal a u_1, que viene determinado por la ecuación $x_0+x_1=0$. El sistema ofrece el tercer vector $u_2=(1,-1,1+\lambda)$ con $q(u_2)=1-\lambda^2$.

Ya se está en disposición de emitir un veredicto. Para $\lambda<-1$, la matriz A es congruente con $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$ al tomar

$$\{u_0, \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}u_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}u_2\}$$

como base. Para $\lambda\in(-1,1)$ se tendría $A\cong\mathrm{diag}(1,-1,1)$ en la base

$$\{u_0, \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}u_1, \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}u_2\},$$

mientras que $A\cong\mathrm{diag}(1,1,-1)$ para $\lambda>1$ en la base

$$\{u_0, \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}u_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}u_2\}.$$

En cualquier circunstancia se obtienen elipses reales pues el índice siempre vale 1.

Sea ahora $\lambda=1$. Entonces A tiene rango 1 y la cónica consta de una recta doble, a saber, el vértice, cuya ecuación viene dada por $x_0-x_1-x_2=0$. Escójanse dos vectores independientes $u_0=(1,0,1)$ y $u_1=(1,1,0)$ del radical y prolónguese hasta una base de $\mathbb{R}^3$ con $u_2=(0,0,1)$. En tal base, A diagonaliza a $\mathrm{diag}(0,0,1)$ y la ecuación de la cónica se reduce a $x_2^2=0$.

Por último, para $\lambda=-1$, la matriz A tiene rango 2 luego el vértice se reduce a un punto $P=<u_0>$, que se obtiene por medio de la resolución del sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_0 & + & x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_0 & - & x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}\right\},$$

de donde $u_0=(1,-1,0)$. En el suplemento del radical

$$W=<(0,1,0),(0,0,1)>,$$

puede tomarse el vector no isótropo $u_1=(0,0,1)$ con $q(u_1)=1$. Un vector de W ortogonal a u_1 es $u_2=(0,1,1)$ y $q(u_2)=-4$. Así, en la base

$\{u_0, u_1, -\frac{1}{2}u_2\}$, se tiene $A \cong \operatorname{diag}(0, -1, 1)$ y la cónica consiste en el par de rectas secantes $x_1^2 - x_2^2 = 0$.

El procedimiento seguido disfruta de la ventaja de que es trasladable a otros cuerpos. Sin embargo, en el caso real, existen herramientas que facilitan el trabajo, sobre todo, en dimensiones superiores. Como consecuencia del teorema espectral, se sigue que la matriz A diagonaliza en la forma $\operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, donde los λ_i son las raíces del polinomio característico $\Delta(x) = \det(xI - A)$. Además, la congruencia se produce en una base ortogonal integrada por vectores propios de la matriz. Así, bastaría con resolver la ecuación $\Delta(x) = 0$ para conocer el signo de las soluciones, las cuales determinan el índice de Witt. En el problema anterior, haciendo uso de esta maquinaria para, por ejemplo, $\lambda = -1$, se tiene $\Delta(x) = x^3 + x^2 - 4x$ con raíces características $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$. La base en la cual A diagonaliza se compone de vectores u_0, u_1 y u_2 que se calculan resolviendo las ecuaciones vectoriales $u_i(\lambda_i I - A) = 0$. En este caso se ha contado con la suerte de que los subespacios propios tienen dimensión 1. De lo contrario, es decir, si para cierta raíz característica λ ocurre que $\dim V_\lambda > 1$ con V_λ constituido por los vectores u tales que $u(\lambda I - A) = 0$, se debería encontrar una base ortogonal en el subespacio propio V_λ.