



II.4

PROYECTIVIDADES ENTRE CÓNICAS. HACES

Índice del capítulo.

- §1 Proyectividades entre cónicas
 - §2 El teorema de Desargues-Sturm
 - §3 Haces de cónicas
-



PROYECTIVIDADES ENTRE CÓNICAS. HACES

A lo largo de esta sección, si no se menciona nada en contra, se entenderá que el escenario es proyectivo, aunque los resultados que aquí se contienen también produzcan frutos importantes en el afín.

§1 Proyectividades entre cónicas

En el capítulo anterior se vio cómo el teorema de Steiner (teorema II.2.8) permitía definir la razón doble de cuatro puntos sobre una cónica. Por otro lado, en el teorema I.4.2 se llegó a la conclusión de que las proyectividades entre rectas se obtienen como biyecciones que conservan razones dobles. De ahí lo natural de la siguiente

Definición II.4.1 De una biyección $\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$ entre cónicas proyectivamente equivalentes se dice que es una *proyectividad* si siempre que tenga sentido escribir la razón doble $(ABCD)$ de cuatro puntos de \mathcal{Q} , ésta coincide con la razón doble $(\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C)\sigma(D))$ de sus imágenes.

Se examinará qué sucede en ciertas situaciones particulares. Considérese una biyección $\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$ entre dos cónicas. Que ambas son vacías o se reduzcan a un punto representan situaciones triviales. Si las dos cónicas se componen de sendas rectas (dobles, claro), la expresión $(ABCD)$ hay que entenderla como la razón doble ordinaria de cuatro puntos alineados, por lo que el nuevo concepto coincide con el de proyectividad entre rectas sobre el mismo cuerpo. Supóngase ahora que las cónicas cuentan con rangos e índices iguales a 1. Ello implica que el vértice de cada una consta de un solo punto y, la directriz, de dos, luego existen rectas r, s, r' y s' , con $r \neq s$ y $r' \neq s'$, tales que $\mathcal{Q} = r \cup s$ y $\mathcal{Q}' = r' \cup s'$ (véase la figura II.4.1.)

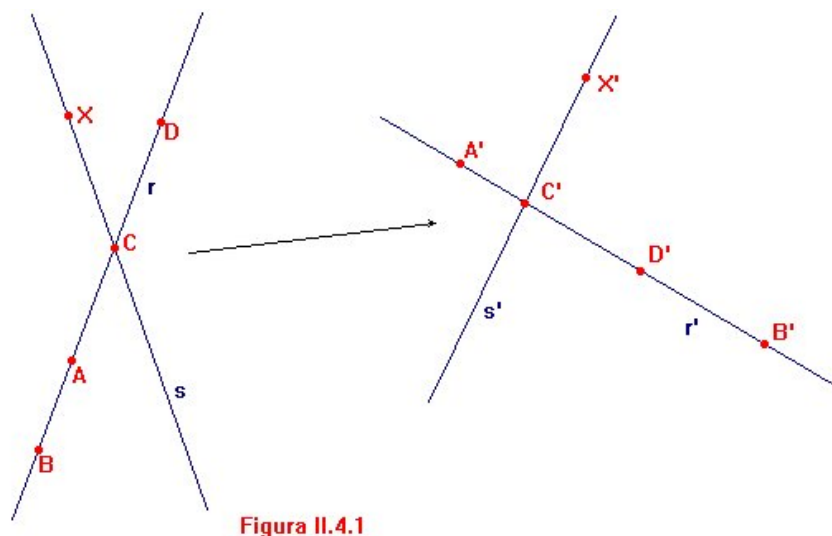


Figura II.4.1

Fíjense dos puntos A y B en $r - \{C\}$ con $C = r \cap s$. Elíjense $D \in r - \{A\}$ y $X \in s - \{C\}$ para que tenga sentido escribir $(\overline{XA} \overline{XB} \overline{XC} \overline{XD})$. Denótese por X', A', B', C' y D' a las respectivas imágenes por σ de los puntos X, A, B, C y D . De la definición de proyectividad entre cónicas se desprende, por un lado, que $C' = r' \cap s'$ (razónese el porqué), y, por otro, que ha de existir el lápiz $(\overline{X'A'} \overline{X'B'} \overline{X'C'} \overline{X'D'})$, lo que fuerza a que A', B' y D' se sitúen sobre una de las dos rectas que conforman \mathcal{Q}' , mientras que X' ha de yacer en la otra. No hay inconveniente en suponer $A', B', D' \in r'$ y $X' \in s'$. En particular, σ transforma puntos alineados de r en puntos alineados de r' y conserva razones dobles de puntos, luego su restricción de dominio y codominio se convierte en una proyectividad entre rectas. Igual sucede entre s y s' . Por último, bastaría tomar $P, Q \in r - \{C\}$ y $S, T \in s - \{C\}$, para concluir, usando el teorema fundamental, con que σ proviene de una proyectividad entre los planos que alojan a las cónicas. Este último razonamiento también se aplica a cónicas no degeneradas y no vacías ya que cada una de éstas contiene un simplex (¿por qué?). En suma:

Teorema II.4.1 *Una proyectividad entre cónicas es la restricción de una proyectividad entre los planos proyectivos que les dan cobijo.*

Especial interés presentan las proyectividades de una cónica en sí misma

pues de su estudio se obtienen resultados útiles para su trazado o el de alguno de sus elementos.

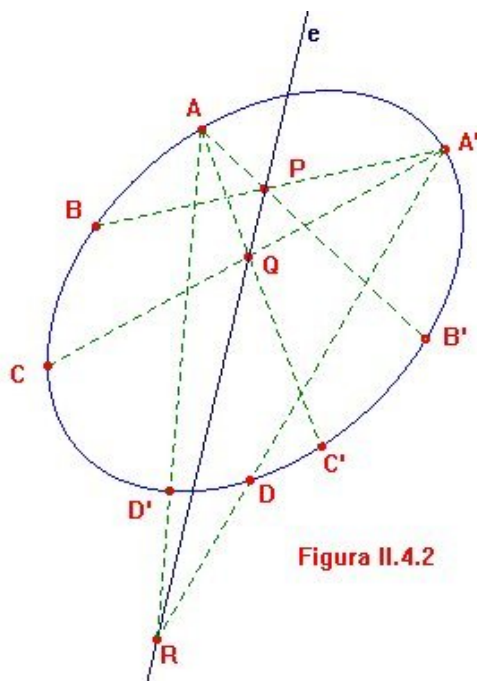


Figura II.4.2

Si el [teorema fundamental](#) de la geometría proyectiva permitía determinar una proyectividad entre rectas a partir de las imágenes de tres puntos del dominio, debería sospechar el lector que algo semejante acontezca para proyectividades entre cónicas. A tal fin, considérense una cónica \mathcal{Q} no degenerada y no vacía de cierto plano proyectivo, y una proyectividad $\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ de la que se conocen los transformados A', B' y C' de sendos puntos distintos $A, B, C \in \mathcal{Q}$. Tómese otro punto $D \in \mathcal{Q}$ diferente de los anteriores. Si $A = A', B = B'$ y $C = C'$, entonces

$$(ABCD) = (\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C)\sigma(D)) = (ABC\sigma(D))$$

implica que $D = \sigma(D)$ y $\sigma = 1_{\mathcal{Q}}$ (repárese el [ejercicio II.2.11](#)). Cuando σ no sea la identidad, no habrá inconveniente en suponer que $A \neq A'$. Sea $\tau : A^* \rightarrow (A')^*$ la biyección que opera en la forma $\tau(\overline{A\sigma(X)}) = \overline{(A')X}$ y $\tau(A^\perp) = (A')^\perp$. No es difícil comprobar que τ es una proyectividad entre haces que tiene a $\overline{AA'}$ como recta doble. Esto la convierte en una perspectiva (recuérdese el [teorema I.4.8.iv](#)). Los puntos $P = \overline{AB'} \cap \overline{A'B}$ y $Q = \overline{AC'} \cap \overline{A'C}$ determinan

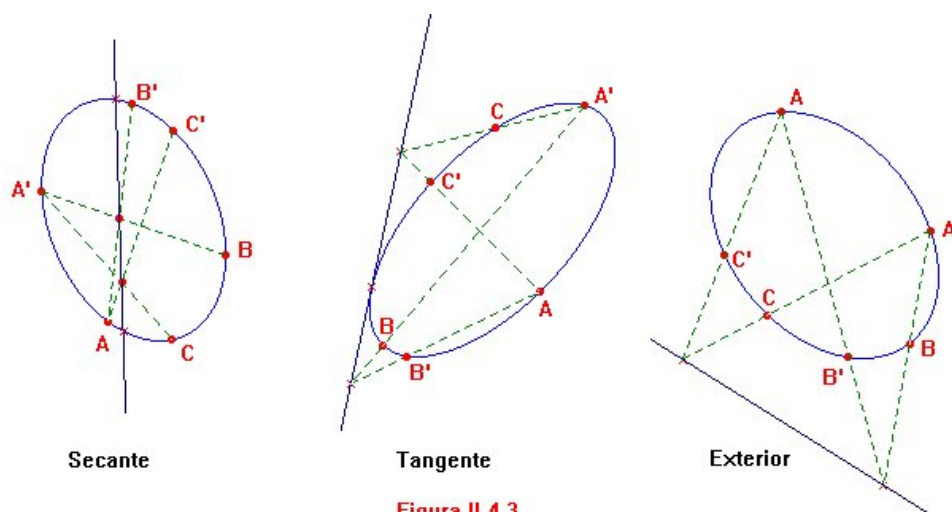
Apuntes de geometría afín y proyectiva

el eje $e = \overline{PQ}$ de la perspectividad (figura II.4.2.) La imagen D' de D viene ahora determinada por la intersección con Q de la recta \overline{AR} , donde $R = e \cap \overline{A'D}$.

Y lo gracioso del asunto estriba en que la recta e no depende de los centros de proyección elegidos. Si, por ejemplo, se hubiese tomado τ' entre el haz de rectas B^* y $(B')^*$ con $S = \overline{B'C} \cap \overline{BC'}$, el teorema de Pascal (teorema II.2.9) aseguraría que $S \in \overline{PQ} = e$. Este importante hecho se refleja en el siguiente

Teorema II.4.2 Si Q es una cónica no degenerada y no vacía de un plano proyectivo, entonces para cada proyectividad $\sigma : Q \rightarrow Q$ distinta de la identidad existe una recta e , denominada *eje de Steiner* de σ , con la propiedad de contener a todas las intersecciones $\overline{A\sigma(B)} \cap \overline{B\sigma(A)}$, con A y B sobre la cónica.

Si una proyectividad σ está en las condiciones del teorema, resulta evidente que los puntos dobles de σ recaen en las dos, una o ninguna intersecciones del eje de Steiner con la cónica. Por analogía con las proyectividades entre rectas, se dirá de σ que es *hiperbólica* si cuenta con dos puntos dobles, *parabólica*, si sólo posee uno, y *elíptica* cuando no hay puntos dobles.



Como consecuencia importante de todo esto se obtiene un método gráfico para el cálculo de los puntos dobles de una proyectividad de una recta en sí

misma o de un haz de rectas en sí mismo. Sean r una recta de cierto plano proyectivo, y $\sigma : r \rightarrow r$ una proyectividad, con $\sigma \neq 1_r$, de la que se conocen las respectivas imágenes A', B' y C' de tres puntos A, B y C . Supóngase que se dispone de una cónica no degenerada y no vacía \mathcal{Q} . Elijase un punto arbitrario $X \in \mathcal{Q} - r$, el cual permitirá definir otra proyectividad $\tau : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$, mediante $\tau(A_1) = A'_1, \tau(B_1) = B'_1$ y $\tau(C_1) = C'_1$ (figura II.4.4.)

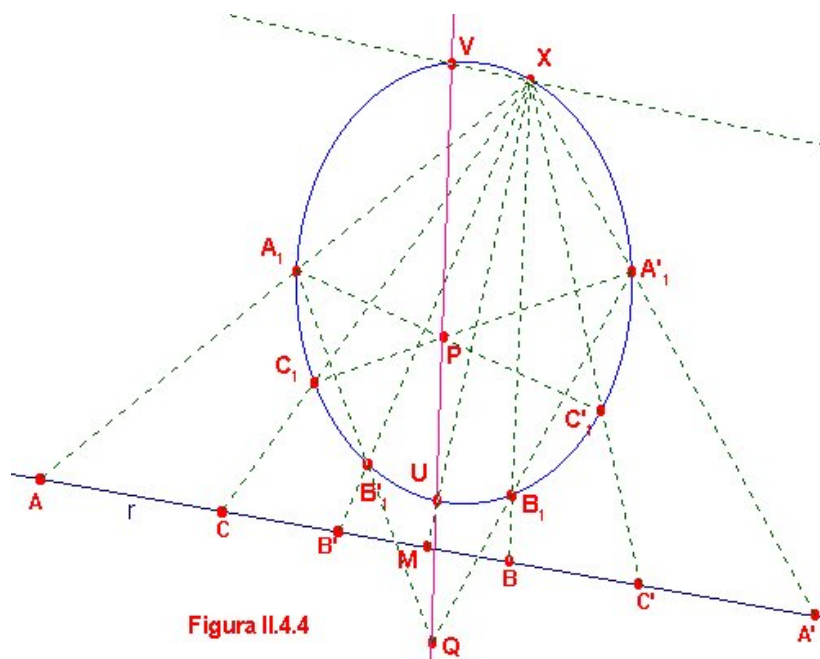


Figura II.4.4

El eje de Steiner e de la proyectividad τ queda determinado por los puntos $Q = \overline{A_1 B'_1} \cap \overline{A'_1 B_1}$ y $P = \overline{A_1 C'_1} \cap \overline{A'_1 C_1}$. Se evidencia ahora que cada intersección M_1 del eje con la cónica (punto doble de τ) se proyecta sobre un punto doble $M = \overline{X M_1} \cap r$ de σ , por lo que σ contará con 2, 1 ó 0 puntos dobles según el eje de Steiner se sitúe secante, tangente o exterior a la cónica. En la figura, con $e \cap \mathcal{Q} = \{U, V\}$, se ve uno de los puntos dobles, el punto $M = r \cap \overline{XU}$.

Si lo que se pretende es hallar las rectas dobles de una proyectividad $\sigma : A^* \rightarrow A^*$ entre dos haces de rectas superpuestos, se podría, bien dualizar lo ya efectuado, bien elegir una recta auxiliar r no conteniendo a A y considerar en r la proyectividad $\sigma'(Y) = r \cap \sigma(\overline{AY})$, lo que reduce el problema al caso anterior, o bien tomar una cónica por A y reconstruir un argumento semejante

al anterior. Pero todo ello no será tratado aquí, sino en el *Cuaderno de prácticas*.

§2 El teorema de Desargues-Sturm

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K . El conjunto $Q(V)$ de las formas cuadráticas $q : V \rightarrow K$ puede estructurarse como K -espacio vectorial con las operaciones puntuales $q + q' : v \mapsto q(v) + q'(v)$ y $\lambda q : v \mapsto \lambda q(v)$. Fijada una base en V , es evidente que la aplicación que asocia a cada forma cuadrática q su matriz en tal base constituye un isomorfismo entre $Q(V)$ y el subespacio de las $(n \times n)$ -matrices simétricas sobre K . Esto da la dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$ de $Q(V)$. Al espacio proyectivo asociado a $Q(V)$ se le denotará por $\mathcal{Q}(V)$.

Definición II.4.2 Si \mathcal{L} es una recta del espacio proyectivo $\mathcal{Q}(V)$, se entenderá por *haz de cuádricas* al conjunto de las cuádricas $\mathcal{Q}(q)$ de $\mathcal{P}(V)$ tales que $\langle q \rangle \in \mathcal{L}$. De un haz se dirá que es *degenerado* si todas sus cuádricas son degeneradas. A los puntos comunes a todas las cuádricas de un haz se les llamará *puntos base* del haz.

Es fácil exhibir ejemplos de haces. En un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, escójense dos cuádricas cualesquiera $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(q)$ y $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}(q')$ distintas entre sí y de la cuádrica que llena todo el espacio. Ello implica que q y q' son formas cuadráticas no proporcionales y, por tanto, engendran puntos diferentes $A = \langle q \rangle$ y $B = \langle q' \rangle$ de $\mathcal{Q}(V)$. De ahí que se pueda considerar la recta proyectiva $\overline{AB} \subset \mathcal{Q}(V)$, la cual definirá un haz, en concreto, el integrado por las cuádricas del tipo $\mathcal{Q}(\lambda q + \mu q')$, con λ y μ cualesquiera escalares no simultáneamente nulos. Por comodidad en la escritura, al haz introducido de semejante guisa se le denotará por $\overline{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'}$. Además, si alguna de las dos cuádricas \mathcal{Q} o \mathcal{Q}' es no degenerada, entonces también lo será el haz. Más adelante se verá que dos cuádricas degeneradas pueden engendrar un haz no degenerado. Pero también se da la circunstancia contraria si se eligen a mala

idea q y q' . Por poner un caso, tómnese en $\mathcal{P}(V)$, con $\dim \mathcal{P}(V) = 2$, las cónicas $\mathcal{Q} \equiv x_0^2 = 0$ y $\mathcal{Q}' \equiv x_1^2 = 0$ que degeneran en sendas rectas dobles. Todas las cuádricas de ecuación $\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 = 0$ son degeneradas valgan lo que valgan λ_0 y λ_1 pues el punto $(0, 0, 1)$ siempre cae en el vértice. (Complete el lector los detalles de este argumento.)

A continuación se enumeran varias observaciones interesantes acerca de los haces de cuádricas.

Teorema II.4.3 Sea $\Phi = \{\mathcal{Q}(q)\}_{\langle q \rangle \in \mathcal{L}}$ un haz de cuádricas de un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión $n > 0$. Entonces:

- i) La cuádrica que llena el espacio no pertenece a Φ .
- ii) Para cada punto P de $\mathcal{P}(V)$, una de dos, o bien P es un punto base del haz, o bien existe exactamente una cuádrica del haz que pasa por P .
- iii) El haz Φ no puede estar constituido solo por cuádricas vacías.
- iv) Si Φ es no degenerado, hay en él a lo sumo $n + 1$ cuádricas degeneradas.

Demostración La parte i) se desprende directamente de la definición de haz. Y es que la cuádrica idénticamente nula no es sino el vector 0 del espacio vectorial $\mathcal{Q}(V)$, el cual ni tan siquiera tiene derecho a engendrar un punto del proyectivo $\mathcal{Q}(V)$.

Para justificar el aserto ii) hay que comprobar antes que el conjunto

$$\mathcal{H} = \{\langle q \rangle \in \mathcal{Q}(V) : P \in \mathcal{Q}(q)\}$$

constituye un hiperplano de $\mathcal{Q}(V)$. En efecto, fíjese un sistema de coordenadas homogéneas con respecto al cual el punto P tenga por coordenadas a la $(n + 1)$ -upla $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Que la cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ de ecuación

$$\alpha_{00}x_0^2 + \dots + \alpha_{nn}x_n^2 + 2\alpha_{01}x_0x_1 + 2\alpha_{02}x_0x_2 + \dots + 2\alpha_{nn}x_0x_n = 0$$

pase por P implica que

$$\alpha_{00}\alpha_0^2 + \dots + \alpha_{nn}\alpha_n^2 + 2\alpha_{01}\alpha_0\alpha_1 + 2\alpha_{02}\alpha_0\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{nn}\alpha_0\alpha_n = 0,$$

expresión que representa a la ecuación de un hiperplano de $\mathcal{Q}(V)$ en las incógnitas α_{ij} . Ahora es fácil probar la propiedad enunciada pues las posiciones relativas de una recta y un hiperplano son bien conocidas del lector. Para $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ toda cuádrica del haz contiene a P . Mientras que si la recta \mathcal{L} corta al hiperplano \mathcal{H} en un único punto, solo habrá una cuádrica que pase por P .

El apartado iii) es consecuencia del ii), por lo que solo queda por comprobar iv). Para ello, elíjanse en Φ dos cuádricas distintas $\mathcal{Q}(q)$ y $\mathcal{Q}(q')$. Si Φ es no degenerado, no hay inconveniente en suponer que q es una forma cuadrática no degenerada. Sean A y B las $(n+1)$ -matrices simétricas respectivas de q y q' en una base fija de V . Cualquier cuádrica degenerada del haz debe ser distinta de $\mathcal{Q}(q)$, luego adoptará el tipo $\mathcal{Q}(\alpha q + q')$ para cierto escalar α (la abscisa). La degeneración de $\mathcal{Q}(\alpha q + q')$ implica que $\det(\alpha A + B) = 0$, y se plantea una ecuación en α de grado $n+1$ que tiene, a lo sumo, $n+1$ raíces. De ahí que no haya más de $n+1$ cuádricas degeneradas en un haz no degenerado, lo que finaliza la demostración del teorema.

Sin embargo, conviene advertir que hay un caso relevante en el que no se dan haces degenerados. Se trata de la dimensión proyectiva 1. Tómnese dos cuádricas \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' degeneradas de un haz de cuádricas de una recta proyectiva r . Como ninguna de ellas llena la recta (teorema II.4.3.i), su degeneración las lleva a reducirse a sendos puntos P y Q . En un sistema de coordenadas del tipo $\{P, Q; U\}$ las respectivas ecuaciones de \mathcal{Q} y de \mathcal{Q}' son $x_0 = 0$ y $x_1 = 0$. Es ahora fácil encontrar cuádricas no degeneradas en el haz, por ejemplo $x_0^2 + x_1^2 = 0$ o $x_0^2 - x_1^2 = 0$.

Lema II.4.1 *Todo haz de cuádricas Φ sin puntos base sobre una recta proyectiva r induce una involución $\sigma : r \rightarrow r$ tal que $\{X, \sigma(X)\} \in \Phi$ para cada $X \in r$.*

Demostración Antes que nada conviene reflexionar acerca de cómo actúa la aplicación σ . Tómnese un punto X de la recta. Como Φ no tiene puntos base, el apartado ii) del teorema II.4.3 fuerza a que haya una única

cuádrica \mathcal{Q} del haz pasando por X . Y como esta cuádrica no llena la recta, o se reduce a X , o contiene a otro punto más X' . En el primero de los casos es $\sigma(X) = X$, mientras que σ transformaría X en X' si se diese la segunda circunstancia.

Gracias a la advertencia previa al lema puede elegirse una cuádrica no degenerada $\mathcal{Q} = \{P, P'\}$ en el haz Φ . Para los razonamientos que siguen se fijará en r un sistema de coordenadas homogéneas $\{P, P'; U\}$ en el que P y P' actúan como puntos base (del sistema, no del haz). En él, la ecuación de \mathcal{Q} adquiere la forma $x_0x_1 = 0$. Escójase ahora en Φ otra cuádrica \mathcal{Q}' distinta de la anterior con

$$\mathcal{Q}' \equiv \lambda_{00}x_0^2 + \lambda_{11}x_1^2 + 2\lambda_{01}x_0x_1 = 0.$$

La ecuación de cualquier cuádrica $\mathcal{Q}'' = \{X, X'\}$ de $\Phi - \{\mathcal{Q}\}$ tomará entonces el aspecto

$$\begin{aligned} 2\alpha x_0x_1 + \lambda_{00}x_0^2 + \lambda_{11}x_1^2 + 2\lambda_{01}x_0x_1 = \\ (1) \quad \lambda_{00}x_0^2 + \lambda_{11}x_1^2 + 2(\alpha + \lambda_{01})x_0x_1 = 0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{Q}'' \neq \mathcal{Q}$, los puntos X y X' (que tal vez se superpongan) no pueden coincidir ni con P ni con P' (razónese el porqué), luego sus respectivas coordenadas homogéneas responden a los patrones $(1, x)$ y $(1, x')$, con $xx' \neq 0$. Ahora bien, sustituyendo en (1) estas coordenadas se obtiene

$$\lambda_{00} + 2(\alpha + \lambda_{01})x + \lambda_{11}x^2 = 0, \quad \text{y} \quad \lambda_{00} + 2(\alpha + \lambda_{01})x' + \lambda_{11}(x')^2 = 0,$$

es decir, x y x' son las dos raíces de una ecuación de segundo grado. Las conocidas propiedades de estas raíces permiten escribir

$$xx' = \frac{\lambda_{00}}{\lambda_{11}},$$

que no es más que la ecuación de una involución de puntos límite P y P' con $P' = \sigma(P)$. (Justifique el lector por qué λ_{00} y λ_{11} no pueden anularse.)

Probado este lema, en apariencia inocente, se enuncia ahora el resultado más importante de la sección.

Teorema II.4.4 (Teorema de Desargues-Sturm) Sean $\Phi = \{Q(q)\}_{\langle q \rangle \in \mathcal{L}}$ un haz de cuádricas de un espacio proyectivo \mathcal{P} de dimensión $n \geq 1$, y r una recta de $\mathcal{P}(V)$ que ni está contenida en ninguna de las cuádricas del haz ni pasa por ninguno de sus puntos base. Existe entonces una involución $\sigma : r \rightarrow r$ tal que $\{X, \sigma(X)\} \in \Phi$ para cada $X \in r$.

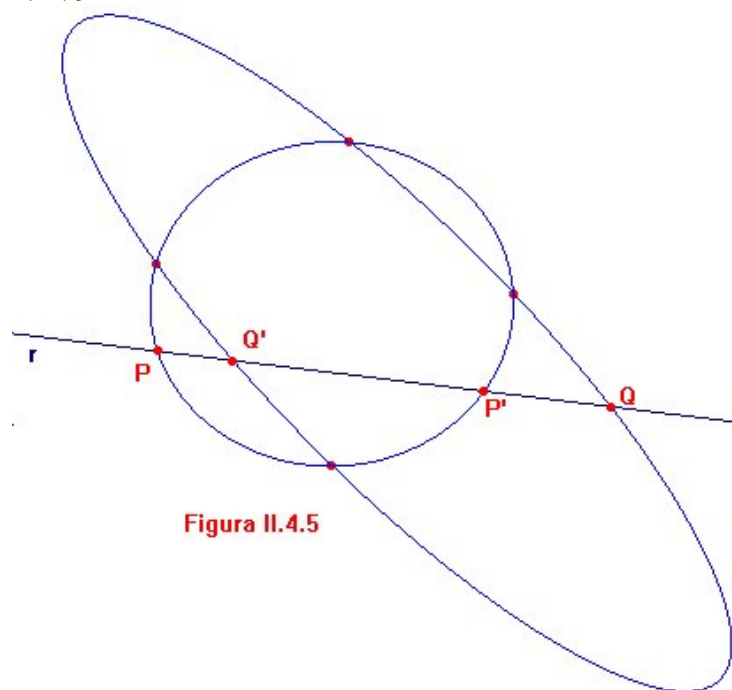


Figura II.4.5

Demostración Las condiciones impuestas a r implican que, escogida una cuádrica Q del haz, o bien la recta toca a Q en un solo punto de tangencia, o bien es secante en dos puntos. De ahí la buena definición de σ . Considérese ahora el haz

$$\Phi_r = \{Q(q_r) : q \in \mathcal{L}\}$$

inducido en la recta r por Φ . Las cuádricas de Φ_r no son sino las intersecciones con r de las cuádricas del haz Φ . El teorema se prueba ahora sin más que aplicar el lema II.4.1 al haz Φ_r y la recta r .

No es casualidad que Desargues figure como cotitular del teorema anterior. Y es que fijado un símplex (A, B, C, D) en un plano proyectivo $\mathcal{P}(V)$,

la familia de las cónicas que pasan por los cuatro vértices constituye un haz. Para convencerse de ello solo hay que releer los párrafos previos al lema II.2.1. Allí se probó que si $\mathcal{Q}(q)$ es una cónica que contiene a los puntos A, B, C y D , entonces la matriz de la forma cuadrática q en el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B, C; D\}$ es del tipo

$$M(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & -\lambda - \mu \\ \mu & -\lambda - \mu & 0 \end{pmatrix},$$

con λ y μ dos escalares que solo se anulan simultáneamente en la cónica que llena el plano. La descomposición

$$M(\lambda, \mu) = \lambda M(1, 0) + \mu M(0, 1)$$

deja bien a las claras que el conjunto de las cónicas consideradas tiene dimensión vectorial 2, luego constituye una recta del espacio proyectivo $\mathcal{Q}(V)$. Así, la familia de las cónicas que pasan por los cuatro vértices de un cuadrivértice (A, B, C, D) es un haz de puntos base A, B, C y D . En este haz es fácil ver cuáles son las cónicas degeneradas, a saber, $\overline{AB} \cup \overline{CD}$, $\overline{AC} \cup \overline{BD}$ y $\overline{AD} \cup \overline{BC}$.

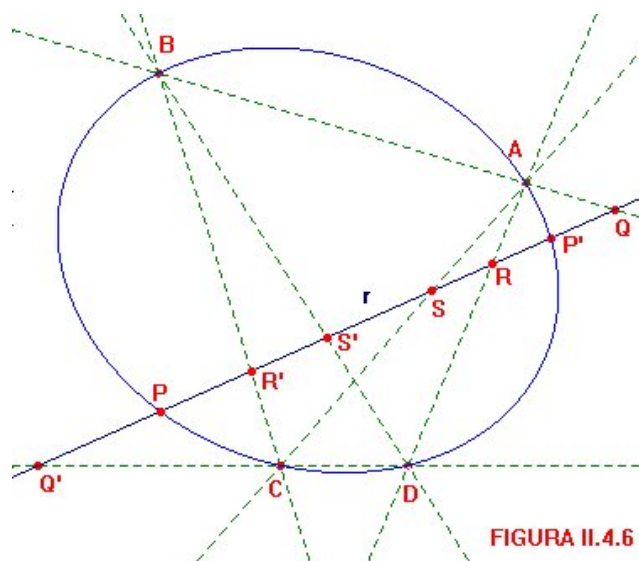


FIGURA II.4.6

Sea ahora r una recta que interseca a los lados del cuadrivértice en los puntos indicados en la figura II.4.6. El segundo teorema de Desargues (teorema I.4.5) afirma entonces que la involución $\sigma : r \rightarrow r$ definida por $\sigma(Q) = Q'$

y $\sigma(R) = R'$ transforma S en S' , lo cual no representa sino un caso particular del teorema de Desargues-Sturm (teorema II.4.4). Además, para cada cónica del haz de puntos base los del cuadrivértice y que corte a r en los puntos P y P' , se tiene que $\sigma(P) = P'$, con σ la involución inducida por el cuadrivértice.

§3 Haces de cónicas

Y se cerrará este capítulo particularizando el estudio de los haces de cuádras al siempre interesante escenario bidimensional. Para comenzar, se plantea la cuestión de cuántos puntos base puede tener un haz de cónicas Φ de un plano proyectivo. Si el haz es no degenerado, eligiendo cualesquiera cónicas distintas Q y Q' de Φ , con Q no degenerada, es evidente que los puntos base han de pertenecer a las dos cónicas. Si Q' es no degenerada, no puede compartir más de 4 puntos con Q (teorema II.2.4), mientras que si Q' degenera en un punto, una recta o dos rectas, sigue siendo 4 el número máximo de intersecciones entre ambas cónicas. En conclusión, no hay más de 4 puntos base en un haz no degenerado. El caso del cuadrivértice descrito más arriba constituye un ejemplo de un haz con exactamente 4 puntos base. Aunque también se dan otras posibilidades con menos puntos. Ello queda bien claro en el siguiente

Teorema II.4.5 Sean Φ una familia de cónicas de un plano proyectivo \mathcal{P} , con $\mathcal{P} \notin \Phi$, S el conjunto de puntos comunes a todos los elementos de Φ , y T , el de rectas tangentes a todas las cónicas de Φ . Entonces Φ es un haz no degenerado si satisface cualquiera de las siguientes condiciones:

- i) $S = \{A, B, C, D\}$, con (A, B, C, D) un símplex.
- ii) $S = \{A, B, C\}$ y $T = \{a\}$, no estando alineados A, B y C , y siendo a una recta que pasa por A , pero que no contiene ni a B ni a C .
- iii) $S = \{A, B\}$ y $T = \{a, b\}$, con A y B distintos, $A \in a$, $b \in B$ y ninguna de las rectas coincide con la \overline{AB} .

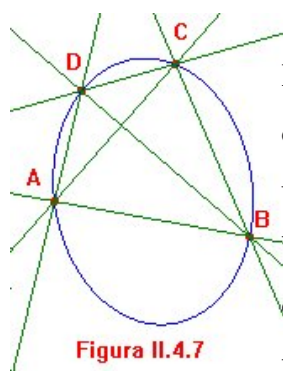


Figura II.4.7

Demostración La parte i) ya se ha visto más arriba.

Eso sí, como tal vez el lector se sorprenda de que el enunciado no afirme nada acerca del conjunto T , quizá convenga comentar aquí que en esta situación no puede haber rectas base ($T = \emptyset$). Para ello basta considerar las 3 cónicas degeneradas del haz, a saber, las constituidas por parejas de lados opuestos del cuadrivértice. Se utilizará

el hecho de que las rectas tangentes a una cónica que degenera en dos rectas pasan todas por el vértice de la cónica. De ahí la imposibilidad de compartir tangentes entre aquellas 3 cónicas degeneradas y, con mayor razón, entre el resto de cónicas del haz. Para el apartado ii), tomese un cuarto punto $D \in a$ distinto de A y de $a \cap BC$. En el sistema

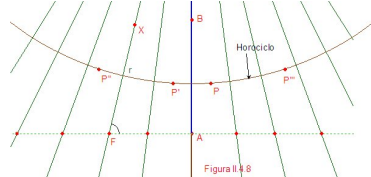


Figura II.4.8

de coordenadas homogéneas $\{A, B, C; D\}$, la matriz de la forma cuadrática de una cónica no degenerada que contenga a S tomará la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, la polar de A tendría de ecuación $A^\perp \equiv \lambda x_1 + \mu x_2 = 0$. Pero si esta recta ha de ser la $\overline{AD} \equiv x_1 - x_2 = 0$, la relación $\lambda = -\mu$ describe al conjunto de las cónicas no degeneradas que pasan por los puntos de S y son tangentes a la recta a .

Por otro lado, las cónicas degeneradas de Φ han de contener a tres puntos no colineales, luego no les queda más remedio que degenerar en dos rectas secantes. Las únicas posibilidades son

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(q) = \overline{AB} \cup \overline{AC} \equiv x_1 x_2 = 0$$

y

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}(q') = \overline{AD} \cup \overline{BC} \equiv x_0(x_1 - x_2) = 0.$$

(Justifíquese esta afirmación.) Si el lector se molesta en calcular las matrices de q y q' , verá que también responden al esquema de las no degeneradas

$$M(\lambda, \nu) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & 0 & \nu \\ -\lambda & \nu & 0 \end{pmatrix},$$

Apuntes de geometría afín y proyectiva

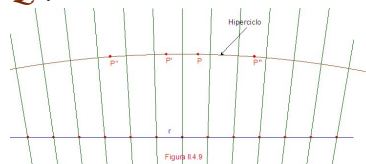
cuando $(\lambda, \nu) = (0, 1)$ o $(\lambda, \nu) = (1, 0)$. Por último, como

$$M(\lambda, \nu) = \lambda M(1, 0) + \nu M(0, 1),$$

de nuevo el subespacio de $Q(V)$ de las formas cuadráticas consideradas tiene dimensión vectorial **2** (por tanto dimensión proyectiva **1**) y se concluye con que el conjunto de cónicas que pasan por A , B y C , y son tangentes a a en A no es sino el haz $\overline{QQ'}$. La ecuación de cualquiera de las cónicas del haz es del tipo

$$\lambda x_0(x_1 - x_2) + \nu x_1 x_2 = 0,$$

Supóngase ahora que se dan las condiciones de las cónicas degeneradas Q o sea, combinación lineal de las ecuaciones de las cónicas degeneradas Q y Q' .



homogéneas $\{A, B, C; U\}$, con $C = a \cap b$, cualquier cónica no degenerada que pase por A , B y C , y sea tangente a \overline{AC} y a \overline{BC} tiene una matriz M del tipo

$$M(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Los elementos a_{02} y a_{12} de la matriz se anulan al ser C conjugado de A y de B . Las únicas cónicas degeneradas de Φ son

$$Q = \overline{AC} \cup \overline{BC} \equiv x_0 x_1 = 0 \quad \text{y} \quad Q' = \overline{AB} \text{ (doble)} \equiv x_2^2 = 0,$$

con matrices respectivas $M(1, 0)$ y $M = (0, 1)$. De nuevo

$$\{M(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \in K^2\}$$

tiene dimensión (vectorial) **2** y se encuentra uno con el haz $\overline{QQ'}$. Las ecuaciones

$$2\lambda x_0 x_1 + \mu x_2^2 = 0$$

de las cónicas del haz se obtienen como combinación de las de las cónicas Q y Q' . El teorema está demostrado a falta de comprobar que en los casos i)

y ii) no hay más puntos base del haz que los de S , ni más rectas tangentes a todas las cónicas de Φ que las del conjunto T .

A los respectivos haces de cónicas descritos por las condiciones i)-iii) se les llamará *haces del tipo I, II y III*. Pero aún hay más tipos de haces no degenerados aparte de los anteriores.

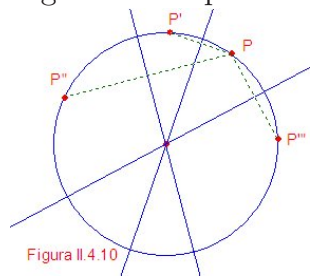


Figura II.4.10

Tipo IV. Sean a una recta tangente en A a una cónica no degenerada $Q = Q(q)$, y B un punto de la cónica fuera de a . Considérese la cónica degenerada $Q' = Q(q') = a \cup \overline{AB}$. Entonces el haz $\overline{QQ'}$ es no degenerado y tiene la propiedad de que todas sus cónicas

pasan por A y B y son tangentes a a . Puede escogerse un sistema de coordenadas homogéneas $\{u_0, u_1, u_2\}$, en el que las matrices de $\overline{QQ'}$ se adecuen a un esquema sencillo tomando $A = \langle u_0 \rangle$, $B = \langle u_1 \rangle$ y $C = \langle u_2 \rangle \in a \cap B^\perp$. Ahora se tiene

$$q \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad q' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De ahí que las cónicas de $\overline{QQ'}$ estén descritas por las matrices

$$M(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\alpha & 0 \\ \lambda\alpha & 0 & \mu \\ 0 & \mu & \lambda\beta \end{pmatrix},$$

cuyas ecuaciones se obtienen por combinaciones lineales

$$\lambda(2\alpha x_0 x_1 + \beta x_2^2) + \mu x_1 x_2.$$

Se advierte que la familia de las cónicas que son tangentes a a y pasan por A y B es más grande que el haz $\overline{QQ'}$. Por ejemplo, la recta (doble) \overline{AB} satisface estas condiciones y no pertenece a $\overline{QQ'}$. Razónese esta aserción.

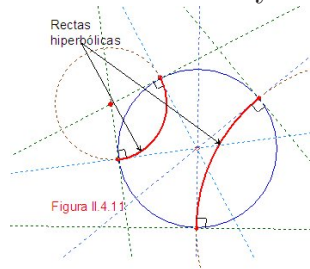


Figura II.4.11

Tipo V. Sean $Q = Q(q)$ una cónica no degenerada y a una recta tangente en el punto A . Considérese la cónica $Q' = Q(q')$ que degenera en la recta (doble) a . Entonces el haz no degenerado $\overline{QQ'}$ es tal que todas sus

Apuntes de geometría afín y proyectiva

cónicas son tangentes a a en el punto A . Tomando un sistema de coordenadas $\{u_0, u_1, u_2\}$, con $A = \langle u_0 \rangle$, $B = \langle u_1 \rangle \in a - \{A\}$ y $C = \langle u_2 \rangle \in B^\perp - a$ y fuera de la cónica, se tiene

$$q \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad q' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

con lo que las matrices del haz tienen la forma

$$M(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda\alpha \\ 0 & \lambda\beta & 0 \\ \lambda\alpha & 0 & \mu\gamma \end{pmatrix},$$

con ecuaciones

$$\lambda(2\alpha x_0 x_2 + \beta x_1^2) + \mu\gamma x_2^2 = 0.$$

De nuevo el conjunto de las cónicas que son tangentes a a en A es mayor que el haz. Por ejemplo, cualquier recta (doble) del haz A^* satisface esta condición y no pertenece a $\overline{QQ'}$.

Si se han resaltado los haces de tipo I-III en el [teorema II.4.5](#) más los IV y V descritos ahora mismo, es porque en planos proyectivos sobre cuerpos algebraicamente cerrados (o, al menos, con raíces cuadradas) no hay más haces que estos. Aunque esta aseveración no será probada aquí, se volverá sobre el particular en la tanda de ejercicios.

Otro aspecto que puede llamar la atención es que no se adivinan en todos los tipos I-V las correspondientes contrapartidas duales. Observe el lector que aunque las configuraciones que satisfacen los haces tipo II y V son autoduales, no se ha incluido la dual de, por ejemplo, I. Y es que como un cuadrivértice determina un haz, es legítimo preguntarse si la familia de las cónicas tangentes a los 4 lados de un cuadrilátero es, así mismo, un haz. Se solventará esta cuestión de inmediato. Tómese un simplex (A, B, C, D) en un plano proyectivo \mathcal{P} , y sea Φ el haz de cónicas que pasan por los vértices del simplex. En el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B, C; D\}$, las matrices de las cónicas de Φ responden al tipo

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & \lambda + \mu \\ -\lambda & 0 & -\mu \\ \lambda + \mu & -\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Como en la [sección §II.2.3](#) solo se trató la dualidad referida a las cónicas en ambiente no degenerado, el razonamiento que se avecina se ceñirá a estas. Para que una cónica de Φ no degenerere es necesario y suficiente con que $0 \notin \{\lambda, \mu\}$. Las cónicas tangenciales de Φ están descritas por matrices de la forma

$$M^{\text{adj}}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} -\mu^2 & -\mu(\lambda + \mu) & \lambda\mu \\ -\mu(\lambda + \mu) & -(\lambda + \mu)^2 & -\lambda(\lambda + \mu) \\ \lambda\mu & -\lambda(\lambda + \mu) & -\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Es sabido que una recta $r \equiv \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ es tangente a una cónica no degenerada de Φ si y solo si el vector fila de coeficientes $x = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ satisface $xM^{\text{adj}}(\lambda, \mu)x^t = 0$ para algunos escalares no nulos λ y μ . Por tanto, las matrices M^{adj} describen al conjunto Φ^* de todas las cónicas no degeneradas que son tangentes al cuadrilátero (A^*, B^*, C^*, D^*) , con

$$A^* \equiv x_0 = 0, \quad B^* \equiv x_1 = 0, \quad C^* \equiv x_2 = 0 \quad \text{y} \quad D^* \equiv x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Si Φ^* fuese un haz, bastaría con elegir en él dos cónicas distintas, por ejemplo, las de matrices $M^{\text{adj}}(1, 0)$ y $M^{\text{adj}}(0, 1)$, para que toda matriz $M^{\text{adj}}(\lambda, \mu)$ fuese combinación lineal de las dos primeras. Compruebe el lector que esto no sucede. Ni siquiera se obtiene un subespacio. Y si esta adversidad ocurre con las no degeneradas, con mayor razón se producirá si se incluyen las tres cónicas de Φ que degeneran en uniones de rectas. En definitiva, la familia de rectas tangentes a un cuadrivértice es un conjunto fácilmente determinable, pero de él no se puede afirmar que sea un haz.

Y se finalizará este capítulo aplicando lo estudiado a la resolución de un problema práctico. Sean A , B y C puntos no alineados de un plano proyectivo, y t_1 y t_2 dos rectas distintas de ese plano que no pasan por ninguno de los 3 primeros puntos. Se trata de determinar gráficamente las cónicas que contienen a A , B y C y son tangentes a t_1 y t_2 ([figura II.4.12](#)).

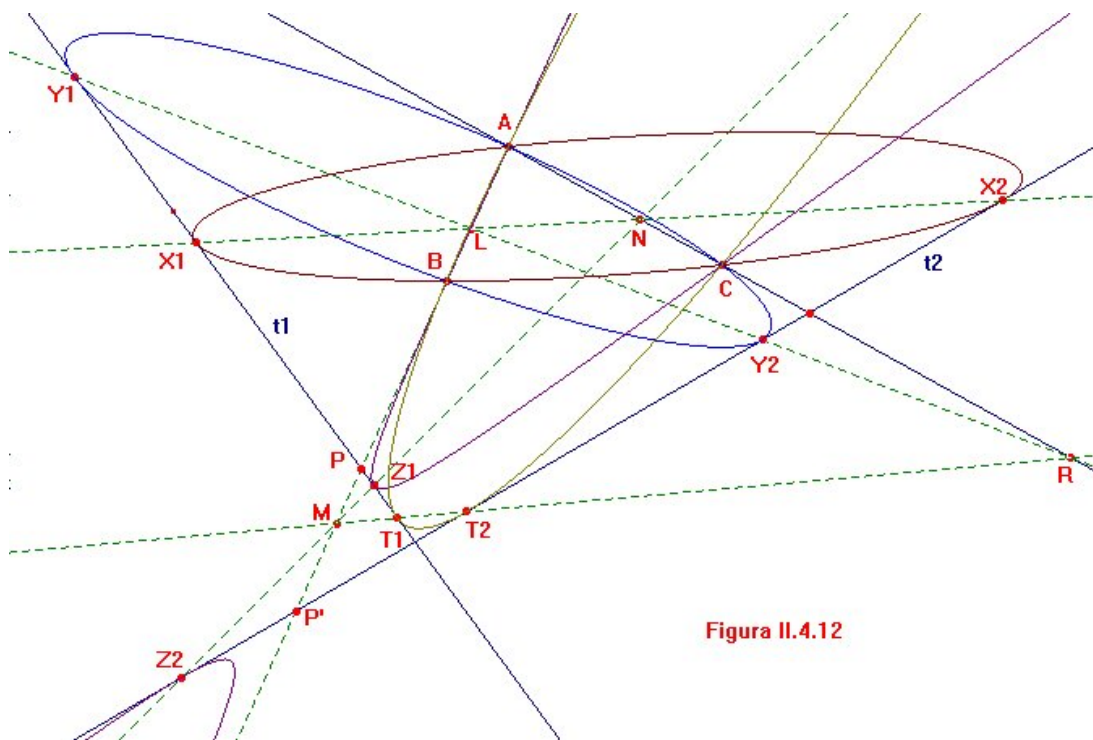


Figura II.4.12

Sean X_1 y X_2 los respectivos puntos de contacto de la cónica buscada con sus tangentes. Es evidente que la cuestión quedará resuelta si se encuentran X_1 y X_2 . A tal fin, considérese el haz de cónicas (del tipo III) tangentes a t_1 en X_1 y a t_2 en X_2 . Aplicando el teorema de Desargues-Sturm (teorema II.4.4) a la recta \overline{AB} , se obtiene una involución de la que se conocen dos parejas de puntos que se transforman uno en el otro, la (A, B) y la (P, P') , con $P = t_1 \cap \overline{AB}$ y $P' = t_2 \cap \overline{AB}$. Esto último se deduce del hecho de que la cónica que degenera en la unión de t_1 y t_2 forma parte del haz. Pues bien, con tales datos se hallarían los puntos dobles, si existen, $L = \sigma(L)$ y $M = \sigma(M)$. Operando de forma análoga, pero ahora con la involución τ que induce el haz sobre la recta \overline{AC} , se calculan nuevos puntos $N = \tau(N)$ y $R = \tau(R)$.

Por otro lado, la propia recta $\overline{X_1X_2}$ se integra en el haz como cónica degenerada pues $\overline{X_1X_2}$ corta a cada t_i en un único punto y es, por lo tanto, tangente a ambas rectas. Así, la intersección (única) de $\overline{X_1X_2}$ con \overline{AB} debe coincidir con uno de los puntos dobles L ó M . Del mismo modo, $\overline{X_1X_2} \cap \overline{AC}$ ha de pasar por N o por R . En definitiva, $\overline{X_1X_2}$ ha de ser una de las rectas

\overline{LN} , \overline{LR} , \overline{MN} ó \overline{MR} . Con cada una de las, a lo sumo, cuatro posibilidades se obtendrían los puntos X_1 y X_2 mediante corte con t_1 y t_2 de líneas ya conocidas.

En conclusión, con los ingredientes proporcionados, existen cuatro soluciones si σ y τ son hiperbólicas, dos, con una de las involuciones hiperbólica y la otra parabólica, sólo una con ambas parabólicas y la irresolubilidad se produce con alguna de ellas elíptica. En la [figura II.4.12](#) se ilustra el caso de cuatro soluciones. Los puntos de tangencia están etiquetados como X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 , Z_1 , Z_2 , T_1 y T_2 .

