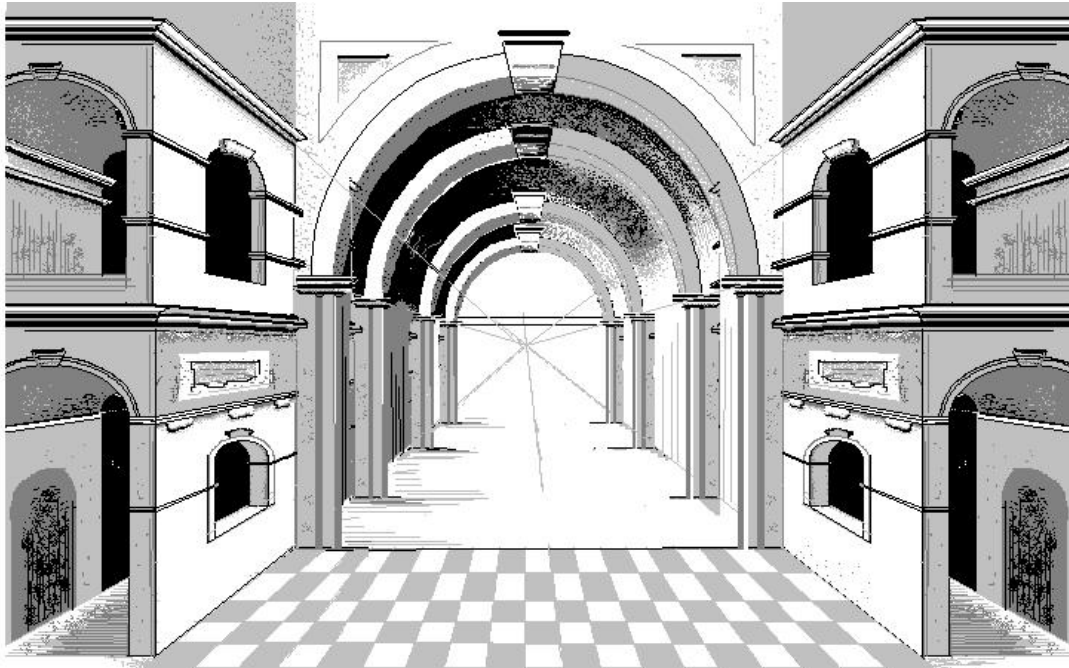


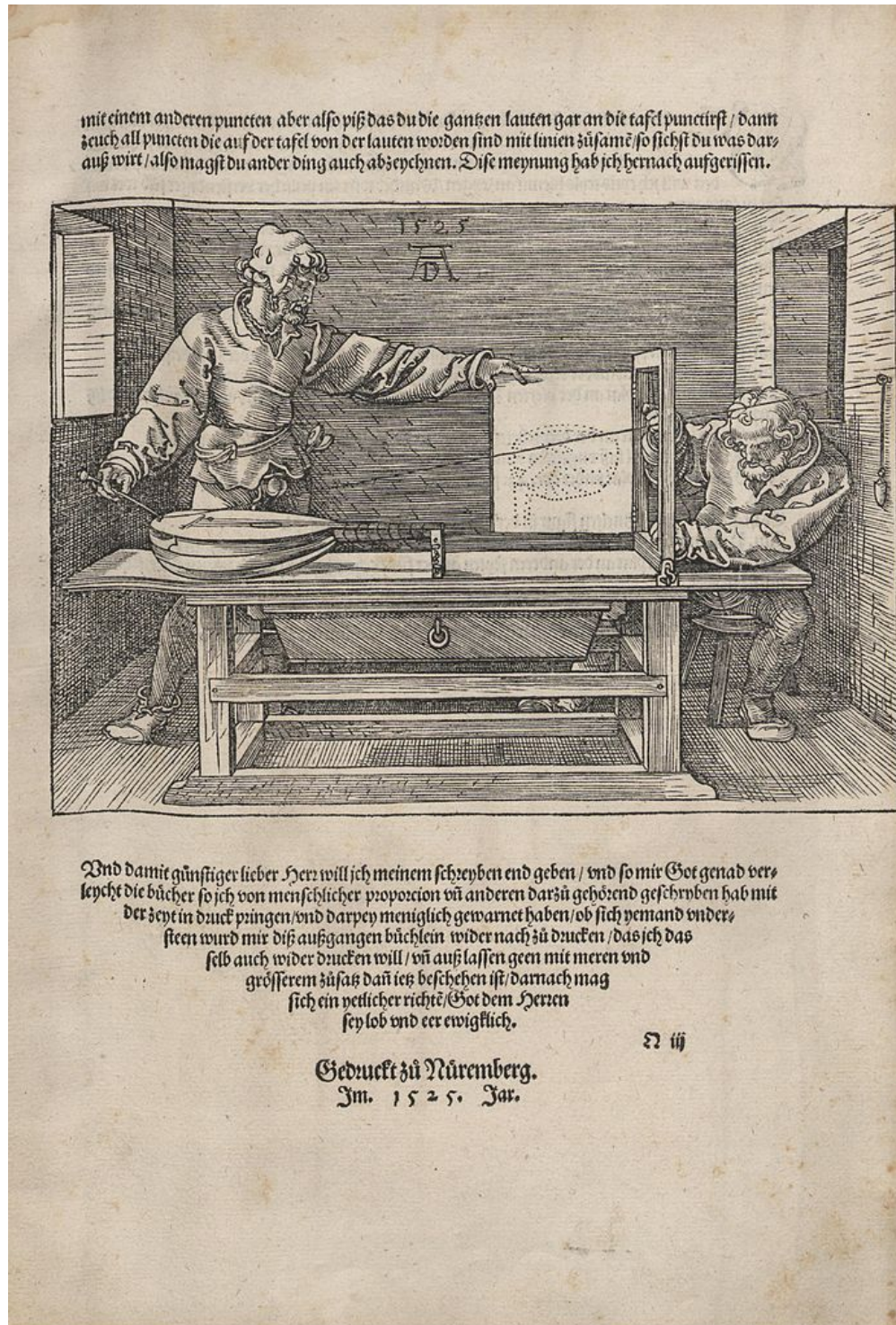
### §III.1 Aplicaciones a la perspectiva cónica



De entre los distintos modos de representación de cuerpos espaciales en un plano, el sistema cónico de perspectiva es el que responde a un mayor verismo al basarse en los mismos principios de la visión humana, la fotografía o la pintura realista. En esencia, la idea se genera en el hecho de que si se contempla una escena desde un punto fijo  $V$ , todos los rayos de luz que alcanzan a  $V$  no son sino líneas rectas convergiendo en  $V$ . Escogiendo un plano  $\pi$  que no contenga a  $V$ , cada una de aquellas rectas cortará a  $\pi$  según un punto. El conjunto de estos puntos constituye una proyección de los objetos observados que el cerebro interpretará con tanta facilidad como el modelo original. Y ello es fácil de entender pues si se prescinde ahora del paisaje para mirar su proyección sobre  $\pi$  y se sitúa el ojo en igual posición relativa respecto al plano, habrán de confluír en la retina las mismas rectas que las primitivas y procedentes de idénticas direcciones. En el caso de una instantánea, el objetivo de la cámara juega el papel del centro de la perspectiva  $V$ , mientras

## Aplicaciones a la perspectiva cónica

que la película o el panel de células fotosensibles definen al plano  $\pi$ . En el arte pictórico, son la pupila del dibujante y el lienzo los que determinan el punto  $V$  y el plano  $\pi$ .



Tales mecanismos ya eran conocidos por los pintores del renacimiento, quienes llegaron a concebir una nutrida gama de ingeniosas máquinas que reproducían el fenómeno de la proyección. El lector interesado en el particular puede consultar los grabados de Alberto Durero en la exposición virtual sobre geometría proyectiva hacia la que hay un enlace en esta misma plataforma (material complementario).

El grabado<sup>1</sup> de la página anterior es una de las ilustraciones de *Underweysung der Messung*, Albrecht Dürer, Nürnberg, 1525. Muestra a un pintor y su ayudante dibujando un laúd en escorzo. Uno de los dos hombres señala con el puntero un punto del laúd. Al extremo del puntero hay fijada una cuerda que se mantiene en tensión gracias al peso que tira de ella a través de una polea anclada a la pared. El cordel simula los rayos luminosos que proceden del laúd. El otro hombre se encarga de marcar las intersecciones de esos rayos con el plano determinado por un bastidor vertical. En este caso el punto de vista  $V$  está ubicado en la polea, y el plano  $\pi$  es el del bastidor.

Sin embargo, el salto del nivel empírico al de la construcción de una base teórica rigurosa fue dado por el matemático marsellés Girard Desargues (1591-1661). Desargues comenzó advirtiendo que rectas paralelas del mundo real tal vez pierdan el paralelismo en el proceso de su representación. Imagínese, por ejemplo, que desde un puente sobre la vía férrea se divisa la trayectoria rectilínea de las vías. Los rieles, en principio paralelos, parecen converger en un punto de la lejanía clavado al horizonte. Y lo mismo sucede con las cornisas y zócalos de los edificios o los dinteles y umbrales de las puertas. A estos puntos de intersección no se accede en el mundo real, pero sí que tienen su correspondiente proyección sobre el plano de un cuadro. De ahí que, para que la correspondencia fuese total, Desargues maquinó el artificio de añadirlos por las bravas, lo que dio lugar precisamente al nacimiento de la geometría proyectiva según bien conoce el lector. La segunda idea clave de Desargues

---

<sup>1</sup> El fichero es de dominio público y ha sido bajado de Wikipedia: [http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Duerer\\_Underweysung\\_der\\_Messung\\_181.jpg](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Duerer_Underweysung_der_Messung_181.jpg).

## Aplicaciones a la perspectiva cónica

relacionada con la perspectiva fue la introducción del concepto de homología.

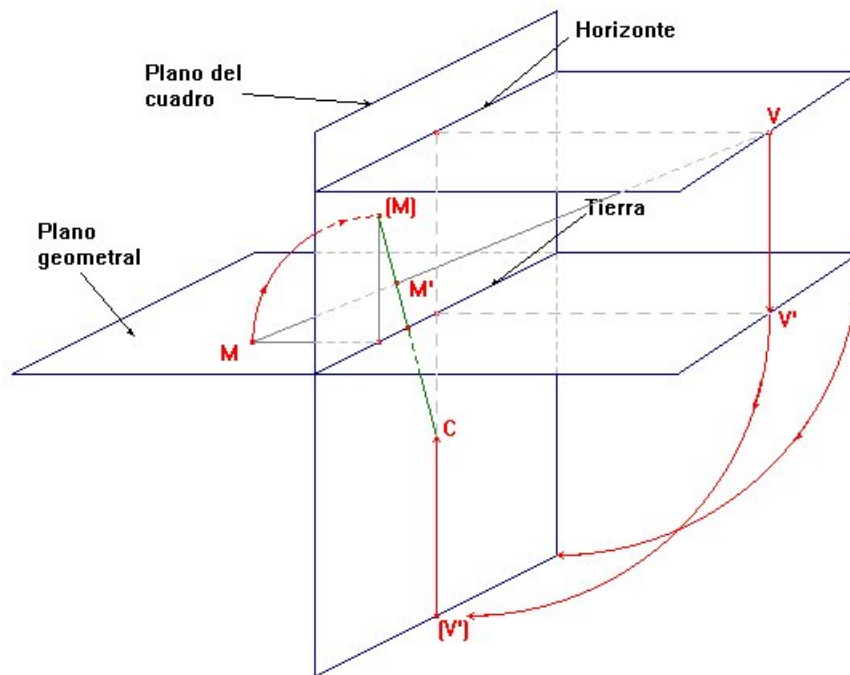
Para lo que resta, se recomienda al lector que escriba sendas macros para CABRI Géomètre que tracen la imagen de un punto por una homología (de centro en el afín) o de una dilatación. Para las primeras, los objetos iniciales debieran ser el centro, el eje, un par de puntos homólogos y el punto del que se quiere hallar su transformado, mientras que en las dilataciones no se incluiría al centro como objeto inicial. A continuación se expondrán los conceptos básicos utilizados en perspectiva cónica.

Los elementos imprescindibles para el sistema cónico de perspectiva son:

- i) un punto fijo  $V$ , que será el punto de vista del observador,
- ii) un plano que no pasa por  $V$  denominado *plano del cuadro* o *plano de proyección*, habitualmente colocado en vertical, y
- iii) un plano utilizado para referencias métricas llamado *geometral*, y que se acostumbra a colocar horizontal.

No obstante, son posibles otras disposiciones en cuanto a la inclinación de estos planos. Al plano que pasa por  $V$  y es paralelo al geometral se le conoce como *plano del horizonte*, el cual corta al plano del cuadro en la *línea del horizonte*. A la intersección del plano geometral con el plano del cuadro se le denomina *línea de tierra*. Se supondrá que los objetos situados sobre el plano geometral están representados a una escala fija, que es con la que se desea llevar a cabo su proyección sobre el plano del cuadro.

La idea básica de la representación en perspectiva ya fue anticipada párrafos arriba, pero ahora se tratará con rigor científico. Un punto  $M$  del plano geometral es visto desde  $V$  según la dirección de la recta  $\overline{MV}$ , la cual cortará al plano del cuadro en su proyección  $M'$ . Se trata de encontrar un método para el trazado de  $M'$ . La técnica más apropiada para ello pasa por abatir el plano geometral sobre el plano del cuadro mediante un giro alrededor de la línea de tierra. De esa forma se trabaja solo con un único plano en vez de con dos. Este abatimiento llevaría el punto  $M$  al punto que en la figura se ha denotado por  $(M)$ . ¿Qué punto debería realizar las funciones de  $V$  tras



este abatimiento? En primer lugar, habría que proyectar perpendicularmente el punto  $V$  sobre el plano geometral hasta un punto  $V'$ . La distancia  $d$  entre  $V$  y  $V'$  es la misma que la que media entre la línea del horizonte y la de tierra. Al abatir el plano geometral,  $V'$  aterriza en un punto  $(V')$ . Sin embargo, debería compensarse el desplazamiento inicial  $d$  de  $V$  hasta  $V'$ , por lo que habrá que considerar el punto  $C$  que se encuentra en la perpendicular a tierra por  $(V')$ , y a una distancia  $d$  de este.

Ahora son varias las circunstancias dignas de mención. Es evidente que rectas del plano geometral serán vistas desde  $V$  también como líneas rectas y tienen, por consiguiente, una proyección rectilínea en el plano del cuadro. De ahí que la biyección  $(M) \mapsto M'$  no sea otra cosa que una colineación. Los puntos situados sobre la línea de tierra no se mueven tras el abatimiento y se proyectan sobre sí mismos, luego la línea de tierra está compuesta por puntos dobles. Además, el punto  $(M)$  se observará desde  $C$  en el lugar  $M'$ . Dicho de otra forma, la recta  $\overline{C(M)}$  es doble. Basta recapacitar un instante para justificar estas aseveraciones y concluir con que la proyectividad de la que se está hablando es una homología de centro  $C$  y eje la línea de tierra. Según se

## Aplicaciones a la perspectiva cónica

vio en la sección §I.4, anterior, bastará conocer un par de puntos homólogos para tener resuelto el problema del trazado de la imagen de cualquier otro punto por la homología.

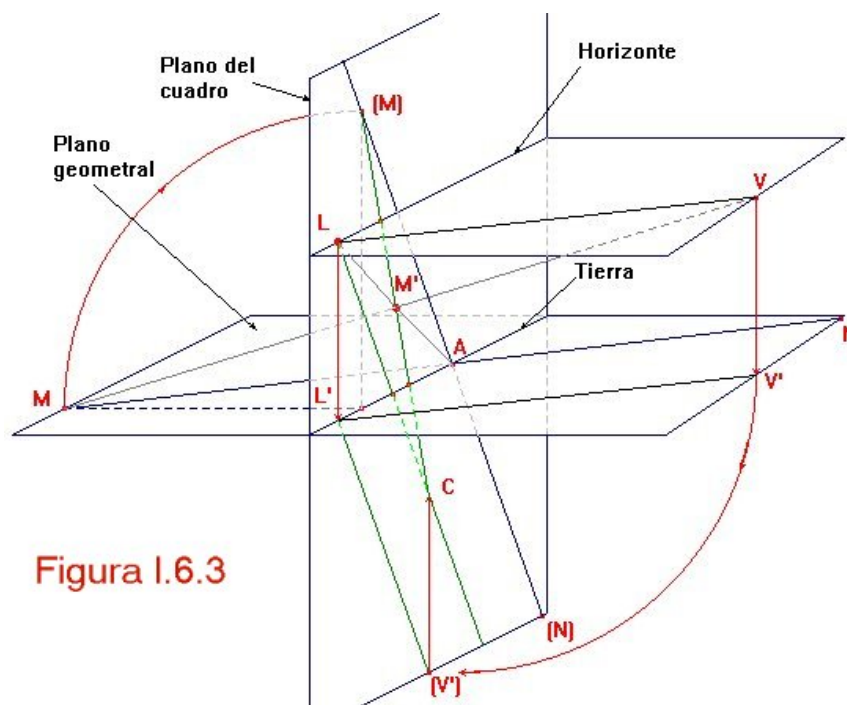


Figura I.6.3

Para ello, concébase una recta  $r = \overline{MN}$  del plano geometral que corta a tierra en  $A$ . (Sígase el razonamiento según la figura I.6.3.) Esta recta se abate sobre el cuadro según la recta  $\overline{(M)(N)}$  que sigue pasando por  $A$ . Visto  $M$  desde  $V$ , se localiza hacia la proyección  $M'$ . Supóngase ahora que  $M$  se desplaza sobre la recta alejándose cada vez más de tierra. Cuando  $M$  alcance el infinito, el observador lo contemplará proyectado en un punto  $L$  del horizonte, denominado *punto de fuga* de  $r$ , que no es más que la intersección de la línea del horizonte con el plano determinado por  $r$  y  $V$ . Adviértase que las rectas  $\overline{VL}$  y  $\overline{MN}$  son paralelas. Siguiendo el esquema de abatimientos y proyecciones descrito más arriba, la recta  $\overline{VL}$  se proyecta perpendicularmente sobre el plano geometral en la recta  $\overline{L'V'}$ , y se abate sobre el plano del cuadro según  $\overline{L'(V')}$ .

Por último, hay que compensar el desplazamiento  $d$  entre  $V$  y  $V'$  para transformar  $\overline{L'(V')}$  en la recta  $\overline{LC}$ . Todas estas manipulaciones no consiguen

deshacer el paralelismo original y  $\overline{LC}$  permanece paralela a  $\overline{(M)(N)}$ . Esto permite el trazado del punto de fuga  $L$ . En concreto, si  $A$  es la intersección de  $\overline{(M)(N)}$  con tierra, entonces el punto de fuga  $L$  de  $r$  se obtiene como la intersección con la línea del horizonte de la paralela a  $\overline{(M)(N)}$  por  $C$ . Y una vez hallado el punto de fuga, puede calcularse el homólogo  $M'$  de  $(M)$  mediante  $M' = \overline{AL} \cap \overline{CM}$ . Se ilustrará todo esto con un ejemplo práctico.

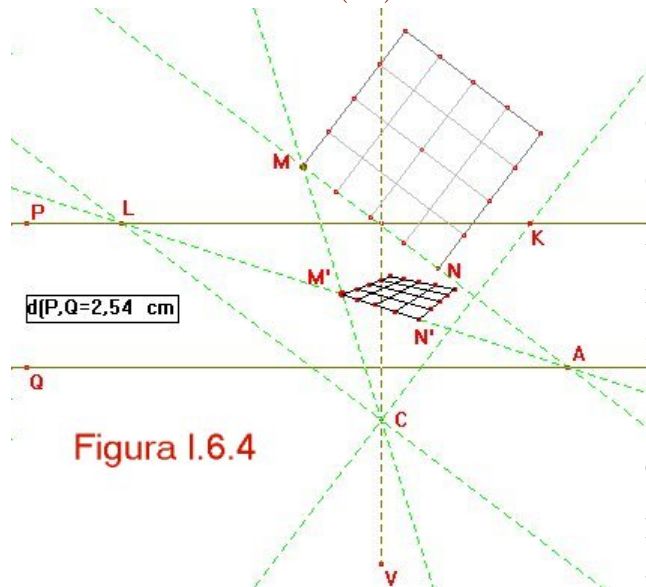


Figura I.6.4

Supóngase que se dispone del dibujo de la planta de un cuadrado cuadrícula (figura I.6.4). Trácese la línea del horizonte por un punto  $P$ , y la línea de tierra por  $Q$  paralela a la anterior. Sea  $d$  la distancia entre estas dos líneas. Elijase el punto de vista  $V$ , lo cual impone que el centro de la homología

$C$  se ubique en la semirrecta por  $V$  perpendicular a tierra, y a una distancia  $d$  de  $V$ . Si  $M$  y  $N$  son dos de los vértices del cuadrado, la recta  $\overline{MN}$  cortará a tierra en un cierto  $A$ . El punto de fuga  $L$  de  $\overline{MN}$  se obtiene como intersección con el horizonte de la paralela a  $\overline{MN}$  por  $C$ , mientras que  $M$  ha de proyectarse entonces en  $M' = \overline{AL} \cap \overline{CM}$ . Conocidos pues el centro  $C$ , el eje  $r$  y un par de puntos homólogos  $M$  y  $M'$  de la homología, es fácil abordar la proyección del resto de puntos de la cuadrícula mediante el uso de la macro CABRI correspondiente. Aunque no se ha precisado de él, en la figura se ha señalado también el punto de fuga  $K$  de lado del cuadrado perpendicular a  $\overline{MN}$ <sup>2</sup>.

Resuelto el problema para los objetos del plano geometral, a continuación

<sup>2</sup> A los delineantes se les alecciona para manejar distintos puntos de fuga, uno por cada haz de rectas paralelas del modelo. Sin embargo, el razonamiento matemático mostrado aquí, basado en homologías, muestra que esto solo es preciso realizarlo una primera y única vez, a fin de determinar la imagen de algún punto por esa homología.

## Aplicaciones a la perspectiva cónica

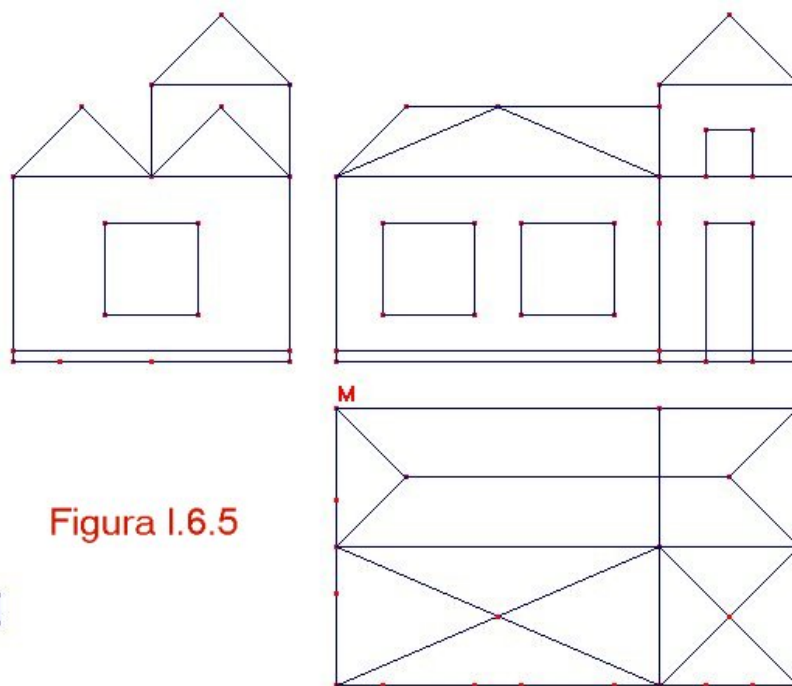
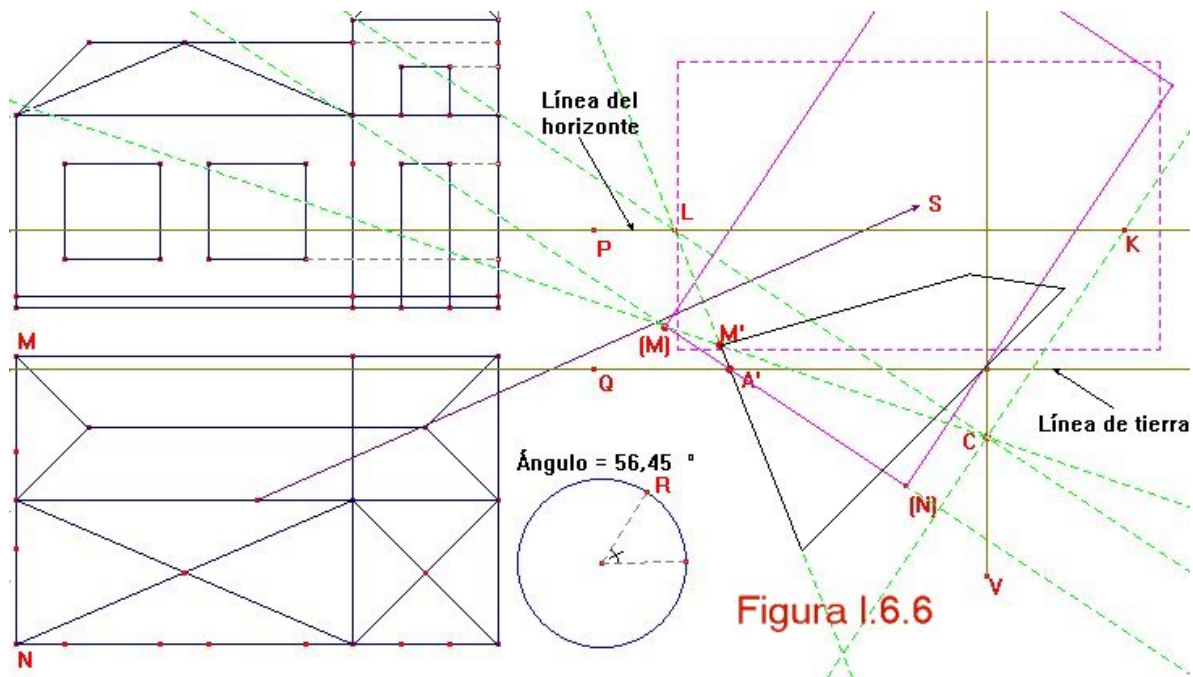


Figura I.6.5

se abordará cómo proyectar puntos que están fuera de aquel. Supóngase que son dadas la planta, el alzado y el perfil de un edificio tal cual se esquematiza en la figura I.6.5, y se quiere dibujarlo en perspectiva. Como se verá más adelante, en realidad el perfil es innecesario y solo se incluye aquí por facilitar la visualización completa del objeto a representar. Una buena idea para colocar la planta con exactitud en el espacio de trabajo de CABRI pasa por *Mostrar los ejes* y definir una *Rejilla* (las dos herramientas se encuentran en el icono 11). Tras haber usado ambas, se crea en el tablero una cuadrícula que sirve de plantilla para situar cada uno de los puntos y segmentos que determinan la planta y el alzado. Tal vez también sea preciso recurrir a *Punto medio* (icono 5).

Para que la simulación sea lo más general posible, trasládese el rectángulo de la planta según un vector de extremo  $S$  (en la figura I.6.6 se ha coloreado en violeta y trazo discontinuo) y gírese alrededor de  $S$  un ángulo que depende de la posición variable de un punto  $R$  sobre una circunferencia. Todo ello se resuelve con las herramientas *Traslación* (icono 6), *Círculo* (icono 4), *Punto sobre objeto* (icono 2), *Marcar un ángulo* (icono 10), *Medida de ángulo* (icono





9) y *Rotación* (icono 6). El resultado de este movimiento euclídeo<sup>3</sup> se ve en morado y con trazo continuo. Utilícense ahora los métodos expuestos para hallar los transformados de todos los puntos importantes de la planta. (Redactar una macro para ello sería muy buena idea.) En aras de la claridad, en la figura solo se han dejado visibles los extremos del rectángulo unidos por segmentos en negro. Pinchando en el punto *R* y deslizándolo por la circunferencia a la que está ligado, la proyección cónica de la planta del edificio girará del mismo modo.

¿Dónde irá a parar la esquina *N''* de la cornisa que se sitúa en la vertical *N'* de la planta? Desde luego que en la recta perpendicular al horizonte por *N'*, pero, ¿en qué punto concreto de esta recta? Para resolver la cuestión, sobre una recta del alzado indíquense las alturas *A*, *B*, *C*, ..., *I* de los puntos a representar (figura I.6.7).

<sup>3</sup> En la siguiente entrega se definirá lo que es un movimiento euclídeo. Por el momento, baste saber que se trata de una transformación geométrica del plano.

## Aplicaciones a la perspectiva cónica

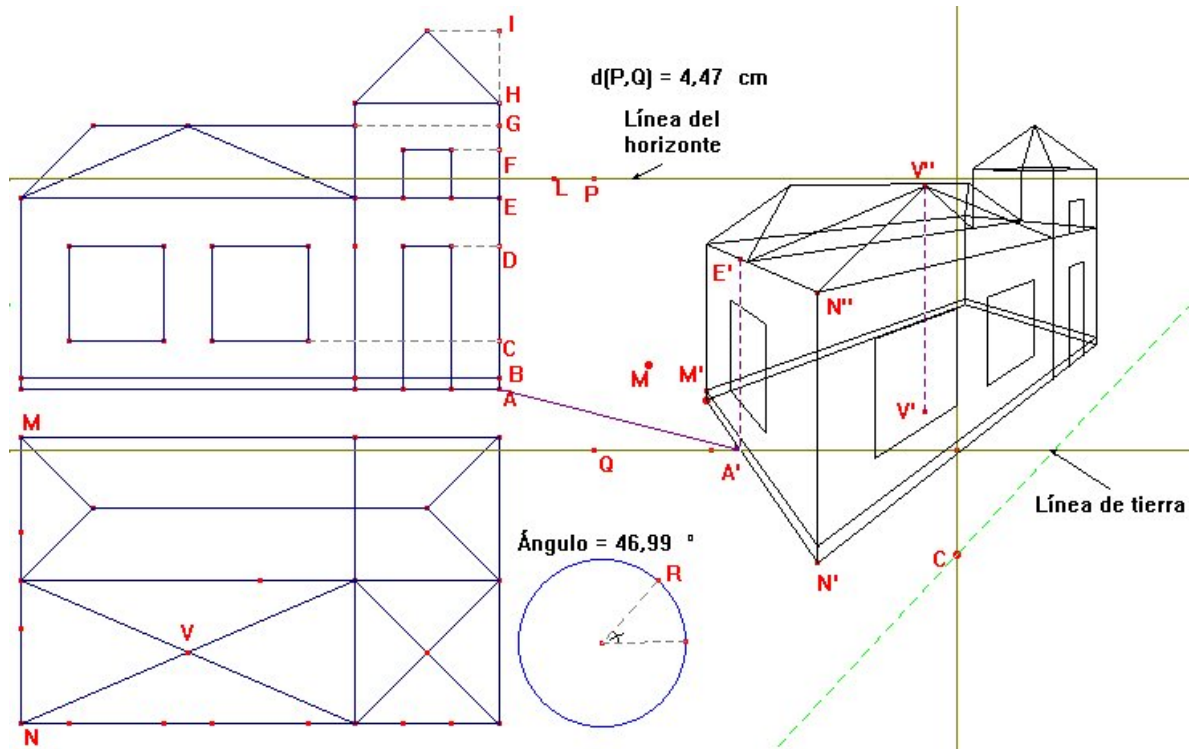


Figura I.6.7

Sea  $A'$  la intersección con tierra del lado transformado  $\overline{M'N'}$  de la planta. Se convino en que la escala del plano geométral era aquella con la que se dibujarían los cuerpos, luego si el segmento de extremos  $A$  y, por ejemplo  $E$ , se traslada a otro perpendicular a tierra con extremo en  $A'$ , su abatimiento sobre el plano del cuadro debería conservar la misma longitud  $h = d(A, E)$  que la original. Llévase entonces  $E$  a  $E'$  mediante la traslación de vector  $A' - A$ . La cornisa en la vertical de  $A'$  pasa por  $E'$  y es paralela (en la realidad, no en la perspectiva) a la línea  $\overline{MN}$  del suelo, luego  $N''$ ,  $E'$  y el punto de fuga  $L$  han de estar alineados por ser  $L$  la representación del punto del infinito de  $\overline{MN}$ . De ahí que  $N''$  pueda hallarse como corte de  $\overline{LE'}$  con la perpendicular a tierra por  $N'$ . Así se trazarían todos los puntos que están a la misma altura que  $E$ . La cuestión está solventada. Sin embargo, CABRI permite la construcción de un método más sistemático y sencillo que no requiere del auxilio de puntos de fuga.

Recuérdese que se denotó por  $h$  la altura a la que se encuentra el punto

$E$  del plano geometral, es decir,  $h = d(A, E)$ . Concíbese la transformación  $\delta$  que lleva cada punto de la perspectiva al que resultaría de proyectar su vertical a altura  $h$ . Se sabe que  $\delta(A') = E'$  y  $\delta(N') = N''$ . Es evidente que todos los puntos del horizonte serán dobles, puesto que se ven desde  $V$  en su sitio original, y que las rectas perpendiculares al horizonte también serán dobles, al obtenerse como intersección con el cuadro del plano determinado por ellas y el punto  $V$ . Se está pues ante una dilatación de eje la línea del horizonte de la que se conoce el par de puntos homólogos  $A'$  y  $E'$ . Usando la macro CABRI correspondiente a las dilataciones, cuya construcción se sugirió párrafos atrás, se escribiría ahora otra macro que admita entre sus objetos iniciales el punto del segmento  $AI$  que señala la altura, y que devuelva como objeto final la proyección en perspectiva de un punto en la vertical de la planta a esa altura. En la figura, para no embarrullarla, se han ocultado casi todos, salvo la cúspide  $V''$  de uno de los tejados, colocada a la altura indicada por  $G$  en la vertical de  $V'$ .

El lector puede comprobar el resultado de la simulación pinchando aquí.

Resumiendo, el uso de homologías y dilataciones resuelve por completo el problema de dibujar en perspectiva cónica un objeto del que se conocen su planta y alzado.



Castellón Serrano, Alberto (2012) Geometría afín y proyectiva.

OCW- Universidad de Málaga <http://ocw.uma.es>

Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0 ES

