§Ejercicios del capítulo II.3 (Tema 8)

1) Pruébese que si un diámetro corta a una cónica en dos puntos distintos A y B, entonces se trata de una cuádrica con centro. Además, el punto medio $M = \frac{A+B}{2}$ está en el centro de la cuádrica.

2) Sea (A, B, C, D) un trapecio inscrito en una cónica $\mathcal{Q}$, con $\overline{AC} \| \overline{BD}$, de puntos diagonales $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y $F = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ situados en el afín. Supóngase que $\mathcal{Q}$ no llena el plano. ¿Qué puede decirse de la recta $\overline{EF}$. Indicación: distínganse los casos en que la cónica tenga centro o sea un paraboloide.

3) Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica no degenerada y no vacía de un espacio afín de dimensión n.

i) Si $\mathcal{Q}$ tiene centro O, razónese por qué cualquier conjunto de n rectas por O conjugadas dos a dos constituye un sistema de ejes de la cuádrica.

ii) Si $\mathcal{Q}$ es un paraboloide, demuéstrese que todos los posibles ejes de simetría son paralelos a una recta r. Además, elegido un punto cualquiera V de $\mathcal{Q}$, el conjunto formado por la paralela a r por V más $n-1$ rectas tangentes a $\mathcal{Q}$ en V y conjugadas entre sí constituye un sistema de ejes del paraboloide.

4) Demuéstrense los lemas II.3.1 y II.3.2.

5) Descríbanse todas las cuádricas de un espacio proyectivo de dimensión 4 contenidas en la unión de dos hiperplanos.

6) En un espacio afín de dimensión 3, dese algún ejemplo de una cuádrica vacía que posea una extensión proyectiva no degenerada y otra de rango 1.

*** 7)** En el espacio proyectivo $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ considérese la familia de planos

$$\{\pi_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha\beta \neq 0\} \text{ con } \pi_{\alpha,\beta} \equiv 2\beta x_0 + \alpha x_1 + \alpha x_3 = 0.$$

Dada la cuádrica proyectiva

$$\mathcal{Q}(q) \equiv -x_0^2 + 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3 = 0,$$

clasifíquense las cuádricas afines $\mathcal{Q}(q, \pi_{\alpha,\beta})$ según los valores de α y β.

8) Dada la familia de cónicas reales $2\lambda - 1 + 2x + (2\lambda - 1)x^2 + y^2 = 0$,

i) Dese la clasificación afín en función de λ.

ii) Para $\lambda = -1$, hállense las asíntotas y el centro.

iii) ¿Es siempre el centro de una hipérbola la intersección de las dos asíntotas?

9) Calcúlense los ejes y la ecuación referida a ellos de la cuádrica real

$$-1 + 4z - 2xy + 2xz - y^2 + 2yz - z^2 = 0.$$

10) ¿Qué valor hay que dar al parámetro λ para que la cónica

$$x^2 - \lambda xy + 2y^2 - x - 2 = 0$$

esté formada por dos rectas?

11) Hállense las ecuaciones de las tangentes desde el origen de coordenadas a la cónica $y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0$. Dese el centro (si existe) y la tangente en el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.

12) Se considera la cónica

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{01}x + 2\alpha_{02}y + \alpha_{00} = 0.$$

i) Demuéstrese que las coordenadas del centro son las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{01} = 0 \\ \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{02} = 0 \end{array}\right\}.$$

ii) Compruébese que las cónicas de centro (α, β) son las de la familia

$$\lambda(x-\alpha)^2 + \mu(y-\beta)^2 + \nu(x-\alpha)(y-\beta) + \zeta = 0.$$

13) Hállese el lugar geométrico de los polos de la recta $x + y = 0$ con respecto a la familia de cónicas reales $x^2 + 2\lambda y - 2y^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

14) Descríbase el lugar geométrico de los puntos del plano afín real tales que sus polares respecto a las cónicas

$$y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0,$$

con λ un real no nulo, pasen por $(-1, 1)$ y se mantengan paralelas a $y = 2x$.

15) Calcúlese la ecuación del cono real que tiene por vértice el punto $(1, 2, 2)$ y por directriz la hipérbola contenida en el plano $y = 0$ que satisface

$$\frac{z^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

. **16)** Clasifíquese la familia de cuádricas de $\mathbb{R}^3$

$$\mu x^2 + (1+\mu)y^2 + (1+\mu)z^2 + 2\mu xy + 2\mu xz + 2\mu yz - 2y + \lambda + 1 = 0.$$

17) En un plano afín sobre un cuerpo con q elementos, ¿de cuántos puntos puede constar una cónica no degenerada?

18) Clasifíquense las cónicas del plano afín sobre $\mathbb{Z}_3$.

19) Utilícese el ejercicio II.2.13 para enunciar una propiedad acerca de la hipérbola que permita construir un punto de ella conocidas sus asíntotas y otro de sus puntos.

20) Demuéstrese que los ejes de una cuádrica con centro son ejes de simetría de la cuádrica, mientras que de los ejes de un paraboloide, uno funciona como eje de simetría, y los demás se sitúan tangentes al paraboloide por el vértice. Entiéndase aquí la simetría en el mismo sentido que se le dio en la sección §1, es decir, si $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ es un sistema de coordenadas homogéneas con $< u_1, \ldots, u_n >$ el hiperplano impropio, entonces el simétrico del punto $P = (y_1, \ldots, y_n)$ respecto del eje $< u_0, u_j >$ será el punto de coordenadas

$$(y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, -y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n).$$

21) De una parábola se conocen dos puntos A y B y sus respectivos simétricos A' y B' respecto del eje de simetría de la parábola. Utilícese el recíproco del teorema de Pascal (teorema II.2.10) para obtener otro punto más de la parábola.

22) En este ejercicio se construirá un contraejemplo al recíproco de la primera parte del teorema II.3.5. Considérense las cónicas

$$\mathcal{Q} \equiv x^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{Q}' \equiv x^2 + 2y^2 = 1$$

del plano racional $\mathbb{Q}^2$.

i) Pruébese que ambas cónicas son no vacías, y no están incluidas en hiperplanos. Esto, tras recordar el comentario previo al teorema citado, permite plantearse la pregunta de si $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$ son afínmente equivalentes.

ii) Compruébese que el conjunto de invariantes $\{r, r_0, i, i_0\}$ de $\mathcal{Q}$ (rangos e índices de la extensión proyectiva única de $\mathcal{Q}$, y de la cuádrica del infinito) son los mismos que los de $\mathcal{Q}'$.

iii) Razónese por qué no puede darse la equivalencia afín entre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$.

23) Hállense todas las hipérbolas del plano afín real de asíntotas $y = x+2$ y $x = -1$.

El lector ha de intentar resolver este último ejercicio con lo desarrollado en los apuntes. Sin embargo, se hace notar que también es factible abordarlo con los conocimientos del bachillerato. En efecto, cualquier paralela a una asíntota corta a una hipérbola en exactamente un punto (¿por qué?). Ello permite, en este caso en el que una de las asíntotas es vertical, concebir a la cónica como la traza de una función racional del tipo $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$ un polinomio de segundo grado y $q(x)$ el polinomio $x + 1$ (medítese la razón). El cálculo de los coeficientes de $p(x)$ se reduce ahora a aplicar las recetillas que se les enseña a los alumnos de secundaria para obtener las asíntotas inclinadas de una función real de variable real. Si ninguna de las asíntotas fuese vertical (esta no es la situación), con un giro del tipo $(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, se colocaría a una de ellas en posición vertical para situarse en las condiciones anteriores. Ahora se operaría conforme al procedimiento de arriba, para luego deshacer el giro.