Ejercicios del capítulo II-2 (Tema 7)

1) Razónese por qué, en dimensión mayor que -1, el vacío no constituye ninguna cuádrica en espacios proyectivos sobre cuerpos algebraicamente cerrados.

2) Demuéstrese el teorema II.2.5.

3) Demuéstrese que una cónica no degenerada y no vacía en un plano proyectivo tiene tantos puntos como cualquier recta.

4) Es sabido que una cónica no degenerada $\mathcal{Q}$ induce sobre cada recta r del plano una involución $\sigma : r \to r$, de forma que las parejas $(P, \sigma(P))$ de puntos homónimos son conjugados respecto de $\mathcal{Q}$. Dualícese este hecho dando las definiciones adecuadas, así como los resultados pertinentes. Entre estos, enúnciese el dual del teorema II.2.7.

5) ¿Por qué cualquier biyección entre rectas proyectivas sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ es una proyectividad? Úsese la verdad anterior para finalizar la prueba de la parte ii) del teorema II.2.7 en el plano proyectivo $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}_3)$.

6) Complétese el final de la demostración del teorema II.2.8 (teorema de Steiner), es decir, para cinco puntos A, B, C, D y X sobre una cónica degenerada, se tiene la igualdad

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}) = (A^{\perp}\ \overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}),$$

siempre que tenga sentido escribirla.

7) Este ejercicio está encaminado a obtener una demostración alternativa del teorema de Steiner. Para ello, considérese la cónica no degenerada $\mathcal{Q}(q)$ y, sobre ella, cinco puntos distintos A, B, C, D y X.

i) ¿Por qué $\{A, B, C; D\}$ constituye un sistema de coordenadas homogéneas?

ii) Si en tal sistema X tiene como coordenadas $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, dense las ecuaciones de las rectas $\overline{AB}$, $\overline{XA}$, $\overline{XB}$, $\overline{XC}$ y $\overline{XD}$.

iii) Escríbase la matriz M de la forma cuadrática q y hállense relaciones entre sus elementos.

iv) Encuéntrense las coordenadas de $C' = \overline{AB} \cap \overline{XC}$ y $D' = \overline{AB} \cap \overline{XD}$.

v) Hállese la razón doble

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}) = (ABC'D'),$$

y pruébese que no depende de las coordenadas de X.

vi) Realícense las modificaciones adecuadas para demostrar que

$$(\overline{XA}\ \overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}) = (A^{\perp}\overline{XB}\ \overline{XC}\ \overline{XD}).$$

8) En el caso no degenerado, obténgase el teorema II.2.7 a partir del teorema II.2.8, y derívese este del teorema II.2.9.

9) Examínese la validez de los teoremas teorema II.2.7 y teorema II.2.10 para cónicas degeneradas.

10) Para cónicas no degeneradas, enúnciese el dual del teorema de Pascal (teorema II.2.9), conocido aquel como teorema de Brianchon [1]. ¿Qué sentido tendría un teorema de Brianchon en cónicas degeneradas?

11) Estúdiese la veracidad de la siguiente afirmación: para cinco puntos A, B, C, D y D' sobre una cónica, con los tres primeros distintos entre sí, y $D \neq A \neq D'$, la igualdad $(ABCD) = (ABCD')$ implica $D = D'$.

12) Sea $\{A, B, C, D\}$ un cuadrivértice inscrito en una cónica no degenerada $\mathcal{Q}$, con punto diagonal $X = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. Para un punto arbitrario $E \neq C$ sobre $\mathcal{Q}$, se construyen los puntos $Y = A^{\perp} \cap \overline{BE}$ y $Z = \overline{CE} \cap \overline{XY}$. Pruébese que A, D y Z están alineados.

[1] *En una nota a pie de página anterior ya se mencionó que Brianchon obtuvo su teorema precisamente por el método propuesto en el ejercicio, esto es, aplicando al teorema de Pascal el principio de dualidad recién descubierto por Poncelet.*

13) i) Supóngase que los puntos M, N y A de un plano se sitúan sobre una cónica no degenerada $\mathcal{Q}(q)$, de forma que las rectas tangentes a $\mathcal{Q}(q)$ en M y en N se cortan en un punto O. Tómese un punto arbitrario P de la recta $\overline{AM}$ distinto de A y de M. Sean P' la intersección de $\overline{OP}$ con $\overline{AN}$ y $B = \overline{MP'} \cap \overline{NP}$. Demuéstrese que el punto B siempre cae sobre la cónica. Indicación: Haciendo $B' = \overline{NP} \cap \mathcal{Q}$, inténtese deducir la superposición de B y B' por medio de alguna serie de igualdades entre razones dobles. Si no se consigue nada con el método anterior, se sutoriza al lector a dar una prueba analítica en el sistema de coordenadas $\{A, M, N; O\}$.

ii) Enúnciese el dual del apartado anterior.

14) Cuéntense todas las cónicas, sean o no proyectivamente equivalentes, del plano $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}_3)$.

15) Clasifíquense todas las cónicas no degeneradas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}_5)$.

*** 16)** Considérense las cónicas proyectivas reales siguientes:

$$3x_1^2 - x_0x_1 + x_0x_2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0 \quad \text{y}$$

$$x_0^2 - x_1^2 + x_0x_2 + x_2^2 = 0.$$

i) Clasifíquense.

ii) Obténgase, en cada caso, la recta polar del punto $A = (1, 0, 0)$.

iii) Determínese cuáles de las anteriores cónicas son tangentes a la recta $r \equiv x_0 - x_1 + x_2 = 0$.

iv) Hállese la ecuación tangencial de cada una de las cónicas y verifíquese, por medio de ella, si la recta $x_0 = 0$ es tangente.

v) Calcúlense los polos de la recta $r \equiv -2x_0 + x_1 + x_2 = 0$ respecto de cada una de las cónicas.

vi) Escríbanse las ecuaciones reducidas de las cónicas anteriores dando las bases en las que se expresan.

17) Según los valores del parámetro λ, clasifíquese la familia de cónicas proyectivas reales

$$-(1+3\lambda)x_0^2+(2+\lambda)x_1^2-x_2^2+4x_0x_2=0.$$

18) Clasifíquense las siguientes cuádricas proyectivas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

i) $2x_1^2-2x_3^2-3x_1x_2+3x_2x_3-x_0x_1+x_0x_3=0$,

ii) $x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_0x_1+8x_0x_2+5x_0^2=0$,

iii) $2x_1^2+x_2^2-2x_3^2+2x_2x_3-4x_0x_1+2x_0x_2-4x_0x_3+6x_0^2=0$.

¿Cuál sería su clasificación como cuádricas proyectivas complejas?

20) En $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$, obténgase la ecuación del lugar geométrico integrado por las rectas que pasan por el punto $A=(0,1,0,-2)$ y son tangentes a la cuádrica

$$-x_1^2+x_2^2-2x_0x_1+2x_0x_3+2x_1x_3=0.$$

Compruébese que tal lugar geométrico no es sino un cono real.

21) Descríbanse las cuádricas degeneradas de un espacio proyectivo tridimensional.

22) Dadas dos cónicas no degeneradas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de un plano proyectivo, pruébese que existe una única cónica $\mathcal{C}_3$ tal que las polares de sus puntos respecto de $\mathcal{C}_2$ son tangentes a $\mathcal{C}_1$. Indicación: Eligiendo convenientes puntos sobre la primera de las cónicas, utilícense el dual del teorema II.2.7 y los teoremas de Pascal II.2.7 y de Brianchon (ejercicio II.2.10) más sus respectivos recíprocos.

Open Course Ware
Castellón Serrano, Alberto (2012) Geometría afín y proyectiva.
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0 ES