Ejercicios del capítulo I.5 (Tema 5)

1) Complétese la demostración del lema I.5.1.

2) Pruébese que si σ es una proyectividad de un plano distinta de la identidad y con toda una recta r de puntos dobles, entonces σ es una homología. Indicación: realícese el razonamiento dual al expuesto en la demostración del teorema I.5.1.

3) Demuéstrese que una homología de un plano no tiene más puntos dobles que el centro y el eje, ni más rectas dobles que el eje y las que pasan por el centro.

4) Sea $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ una proyectividad con $\dim \mathcal{P} \geq 2$. Demuéstrese que si hay en $\mathcal{P}$ dos hiperplanos distintos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ compuestos por puntos dobles, entonces $\sigma = 1_{\mathcal{P}}$.

5) Las definiciones de proyectividad central y homología pueden extenderse a espacios proyectivos de dimensión $n \geq 2$ de forma obvia: de una proyectividad $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ se diría que es *central* si existe un $C \in \mathcal{P}$ tal que cada hiperplano $\mathcal{H}$ que contenga a C es doble ($\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$). A la proyectividad central σ se la llamará *homología* cuando $\sigma \neq 1_{\mathcal{P}}$. Pues bien, si $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es una homología con $\dim \mathcal{P} \geq 2$, pruébense las siguientes propiedades:

i) Cada recta por el centro es doble.

ii) El centro C de σ es único.

iii) Cada hiperplano doble que no pasa por C está lleno de puntos dobles.

iv) Existe un único hiperplano compuesto por puntos dobles (esta es la generalización del teorema I.5.1).

6) En un plano proyectivo $\mathcal{P}$, sea σ una homología de centro C y eje r. En este ejercicio se estudiarán las restricciones de σ a un plano afín $\mathcal{A} = \mathcal{P} - s$, con s una recta distinta del eje. En tales circunstancias, ya se vio que C ha de quedarse en el infinito. Llámese τ a la restricción de σ al afín.

i) Demuéstrese que el conjunto

$$\{\overline{P\tau(P)} : P \neq \tau(P), P \in \mathcal{A}\}$$

constituye un haz de rectas paralelas.

ii) Si $C \notin r$, pruébese que τ opera en cada recta $\overline{A\tau(A)}$ como una homotecia, esto es, existe un escalar λ tal que $\tau(A) - P = \lambda(A - P)$ para cada punto A fuera del eje, con $P = \overline{A\tau(A)} \cap r$ [1]. Indicación: puede facilitar bastante el trabajo usar el ejercicio I.4.19 y el hecho de que la razón doble es invariante por perspectividades.

iii) Si $C \in r$, compruébese que τ restringida a cada recta paralela al eje es una traslación [2].

iv) Dense métodos gráficos para el cálculo de dilataciones y transvecciones conocidos el eje r y un par de puntos homólogos (A, A'), con $A \notin r$.

7) Enúnciese el dual del teorema de Pappus [3]. Si es posible, hágase lo propio con el teorema menor de Pappus.

8) Compruébese que en un plano afín la composición de dos homotecias del mismo centro C y razones respectivas λ y μ es otra homotecia de centro C y razón $\lambda\mu$. Utilícese este hecho y el teorema I.5.5 para dar una demostración alternativa del teorema de Pappus.

9) Sean $r, s, t, a, b, c, a', b', c'$ nueve rectas distintas de un plano proyectivo tales que $a \cap a' \in s$, $b \cap b' \in s$, $c \cap c' \in s$, $c \cap b' \in r$, $a \cap c' \in r$, $b \cap a' \in r$, $b' \cap a \in t$ y $a' \cap c \in t$. Demuéstrese que $c' \cap b \in t$.

10) El teorema de Desargues ha sido comprobado en espacios proyectivos bidimensionales. Examínese la prueba para eliminar de ella las restric-

---

[1] *En tal situación, se dice de τ que es una dilatación de razón λ.*

[2] *A τ se la llama entonces una transvección.*

[3] *En cierta literatura lo llaman el teorema de Brianchon*

ciones sobre la dimensión. Dicho de otra forma, pruébese que dos triángulos homólogos y no coplanarios de un espacio proyectivo de dimensión mayor o igual que 2 son tales que sus lados homólogos, además de cortarse, lo cual no resulta automático en estas dimensiones, lo hacen según puntos de la misma recta.

11) Sean (A, B, C, D) y (A', B', C', D') dos tetraedros dados por sus vértices de un espacio proyectivo tridimensional tales que las rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ pasan todas por un punto O distinto de los ocho primeros.

i) Pruébese que las parejas de caras homólogas se cortan según rectas coplanarias. El término homólogo se entiende en sentido obvio, por ejemplo, la cara $A' + B' + C'$ es la homóloga de la cara $A + B + C$. La anterior es una analogía tridimensional del teorema de Desargues.

ii) Demuéstrese el recíproco, esto es, si dos tetraedros de un espacio tridimensional satisfacen que sus parejas de caras homólogas se cortan según tres rectas del mismo plano, entonces las rectas determinadas por parejas de vértices homólogos concurren en un punto.

iii) Enúnciese alguna otra analogía en dimensión cuatro.

12) Demuéstrese que si en un plano proyectivo el triángulo (A, B, C) es homólogo con el (A', B', C') y con el (B', C', A'), entonces también lo es con el (C', A', B').

13) Obténgase el recíproco de la propiedad de Pappus aplicando el directo a convenientes ternas de puntos. Con mayor concreción, en un plano proyectivo sean A, B y C tres puntos de una recta, y P, Q y R otros tres puntos arbitrarios. Considérense los puntos $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$, $Y = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$ y $Z = \overline{AR} \cap \overline{CP}$. Pruébese que si X, Y y Z están alineados, entonces el punto R ha de pertenecer a la recta $\overline{PQ}$.

14) Si tres triángulos de un plano son homólogos dos a dos respecto a mismo centro de homología, compruébese que los ejes de homología concurren en un punto.

*** 15)** En un plano afín considérese un cuadrivértice (A, B, C, D). Sean

P la intersección de $\overline{AD}$ con la paralela a $\overline{CD}$ por B, y Q, el punto de corte de $\overline{BC}$ con la paralela a $\overline{AB}$ por D. Utilícese el teorema de Pappus para demostrar que $\overline{PQ}$ y $\overline{AC}$ son rectas paralelas [4].

16) Sean A, B, C, D cuatro puntos y a, b, c, d cuatro rectas de un plano tales que $b \cap c \in \overline{AD}$, $c \cap a \in \overline{BD}$, $a \cap b \in \overline{CD}$, $a \cap d \in \overline{BC}$ y $b \cap d \in \overline{AC}$. Pruébese que $c \cap d \in \overline{AB}$.

17) Resuélvase el ejercicio I.3.5 utilizando tan solo el teorema de Desargues.

18) Dado un pentágono (A, B, C, D, E) de un plano, sean $F = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y $M = \overline{AD} \cap \overline{EF}$. Demuéstrese que los puntos $P = \overline{AE} \cap \overline{BM}$, $Q = \overline{DE} \cap \overline{CM}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{AD}$ están alineados.

19) En un plano afín supóngase que tanto (A, B, C, D) como (A, B', C, D') son paralelogramos. Pruébese que (B, B', D, D') es otro paralelogramo.

20) Obténgase una demostración analítica (es decir, que haga uso de las coordenadas homogéneas) del teorema I.5.9. Indicación: Si A, B y C son los vértices de un triángulo (no degenerado, claro), P es el punto del infinito de $\overline{AB}$, y Q, el de $\overline{AC}$, tómese un sistema de coordenadas homogéneas del tipo $\{A, P, Q; U\}$, para cualquier U que haga las veces de punto unidad. En él, A tiene coordenadas $(1, 0, 0)$, mientras que las de B son $(1, \beta, 0)$, y $(1, 0, \gamma)$ las de C.

21) En un plano afín sobre un cuerpo de carcaterística 3 se considera el cuadrivértice $\{A, B, C, D\}$ de puntos diagonales $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $F = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ y $G = \overline{AD} \cap \overline{BC}$. Sea H la intersección de la diagonal $\overline{FG}$ con el lado $\overline{CD}$. Demuéstrese que las rectas $\overline{AH}$, $\overline{EF}$ y $\overline{BC}$ concurren. Inténtese una argumentación sintética que utilice el ejercicio I.4.20. Si no se consigue, se permite al lector recurrir a coordenadas.

22) Pruébese el recíproco de la segunda parte del teorema I.5.9, es decir, que en característica 3, las medianas de un triángulo son rectas paralelas. De nuevo debería acometerse un razonamiento sintético apoyado en el ejercicio

[4] *A este hecho se le conoce como* propiedad especial de Pappus*.*

anterior, y solo acabar usando coordenadas en caso de desesperación.