Ejercicios del capítulo I.4 (tema 4)

*** 1)** Encuéntrese, en relación al sistema de coordenadas homogéneo canónico $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1);(1,1,1)\}$, la ecuación de la proyectividad σ del plano proyectivo real en sí mismo que transforma

$$\begin{array}{ccc} (1,1,0) & \mapsto & (-1,0,2) \\ (0,1,2) & \mapsto & (1,1,2) \\ (0,1,0) & \mapsto & (-1,1,0) \\ (2,2,2) & \mapsto & (0,0,4) \end{array}.$$

2) Demuéstrese que el conjunto de las colineaciones de un espacio proyectivo en sí mismo es un grupo (*el grupo proyectivo*).

3) Expresando las afinidades de K^n en sí mismo como composición de automorfismos lineales con traslaciones, pruébese que la totalidad de ellas constituyen un grupo (*el grupo afín*[1]).

4) En el espacio afín $\mathbb{Q}^3$, se considera la afinidad $\sigma = \tau_a \circ f$ donde $a = (-1,0,2)$ y f es la aplicación lineal dada por

$$f(x,y,z) = (x - y + z, 2x + z, y - 2z).$$

Dese la proyectividad ϕ cuya restricción al afín coincide con σ.

5) Hállese la ecuación de la proyectividad $\sigma : \mathcal{P}_1(\mathbb{Z}_7) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{Z}_7)$ que aplica los puntos de abscisas 2, 4 y 0 sobre los puntos de abscisas 1, 3 y 2 respectivamente. Reconstrúyase la matriz 2×2 de la proyectividad.

6) Pruébese que toda proyectividad de una recta en sí misma factoriza como composición de, a lo sumo, dos involuciones y, por consiguiente, las

[1] *Siguiendo el programa de Erlangen, la geometría proyectiva se definiría como aquella que estudia las propiedades conservadas por elementos del grupo proyectivo, mientras que la afín se dedica a las que son invariantes por elementos del grupo afín.*

involuciones constituyen un conjunto de generadores del grupo proyectivo en dimensión 1. Indicación: si $\sigma : r \to r$ es una proyectividad para la que existen puntos distintos $A, A', A'' \in r$ con $A' = \sigma(A)$, $A'' = \sigma(A')$ y $A''' = \sigma(A'')$, considérense las proyectividades τ_1 y τ_2 determinadas por

$$\begin{array}{ccccc} & \tau_1 & & \tau_2 & \\ A & \longmapsto & A'' & \longmapsto & A' \\ A' & \longmapsto & A' & \longmapsto & A'' \\ A'' & \longmapsto & A & \longmapsto & A''' \end{array}.$$

7) Calcúlense los puntos dobles y los puntos límite de la proyectividad de la recta real en sí misma dada por $1 \mapsto 0$, $-2 \mapsto 2$ y $0 \mapsto 1$. Descompóngase tal proyectividad en producto de involuciones.

8) De una proyectividad de una recta en sí misma se conocen las imágenes A', B' y C' de tres puntos distintos A, B y C. Descríbase un método gráfico para obtener los puntos límite.

9) a) Cuando se quiso describir a una biyección σ entre rectas r y s sobre el mismo cuerpo K con la propiedad de conservar razones dobles, se fijaron sistemas de coordenadas $\{A, B; C\}$ en r y $\{A', B'; C'\}$ en s con la condición $\sigma(A) \neq A'$. A la postre, σ resultaba ser una proyectividad. Pues bien, elimínese la restricción $\sigma(A) \neq A'$ y obténgase, en tal caso, la ecuación explícita de σ.

b) Interprétese la ausencia de coeficiente de segundo grado en la ecuación general de una proyectividad entre rectas. Dicho de otra forma, ¿qué sucede cuando una proyectividad σ entre rectas proyectivas posee ecuación general del tipo $\mu x + \nu x' + \zeta = 0$?

10) Sea $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$ un conjunto de tres puntos de una recta proyectiva r. Encuéntrense, en el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; C\}$, las ecuaciones de las 6 proyectividades de r a r que dejan a $\mathcal{S}$ invariante.

11) En $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, considérese la familia de proyectividades cuya ecuación toma la forma

$$\lambda x x' + (2 + \lambda)x + x' - 4 = 0$$

para algún real λ. Atendiendo a los valores del parámetro λ, clasifíquense las proyectividades de la familia. La clasificación se entiende en decir cuáles son hiperbólicas, cuáles parabólicas y cuáles elípticas.

12) Finalícese la demostración del teorema I.4.4 dando una prueba sintética (que no precise de coordenadas) de al menos una de las igualdades distinta de la expuesta en el texto.

13) Enúnciese el dual del teorema I.4.5.

14) Examínese la veracidad de la siguiente afirmación: una involución queda determinada por completo dando las imágenes de dos puntos.

15) Supónganse conocidas las imágenes P' y Q' de dos puntos P y Q por una involución σ de una recta r contenida en un plano. Si al menos uno de los dos puntos P y Q no es doble, utilícese el teorema I.4.5. para describir un método gráfico que permita el trazado de $\sigma(X)$ cualquiera que sea $X \in r$.

16) Trazando el mínimo número de rectas, calcúlese el cuarto armónico de una terna (a, b, c) de rectas distintas de un plano.

17) Dense los pormenores de las demostraciones de los teorema I.4.7 y teorema I.4.8.

18) En un plano proyectivo, cierta biyección $\tau : r \to P^*$ entre los puntos de una recta r y el haz de rectas que pasan por un punto P tiene la propiedad de conservar razones dobles, es decir, $(ABCD) = (\tau(A)\tau(B)\tau(C)\tau(D))$ para cualesquiera $A, B, C, D \in r$ con $A \neq B \neq C \neq A \neq D$.

a) Si se conocen las rectas imágenes de tres puntos, descríbase un método gráfico que permita el trazado de la recta imagen de cualquier otro punto de r.

b) Recíprocamente, dados los transformados de tres rectas distintas de P^*, obténgase un procedimiento para el cálculo de la imagen de cualquier otra recta del haz.

c) Si se pasa al afín con P fuera de la recta del infinito y esta distinta de r, la aplicación τ dejaría de ser biyectiva pues se ha eliminado de su imagen la recta transformada del punto impropio de r . ¿Cómo se trazaría esta?

d) Examínese la situación cuando P está en el infinito.

19) Sean A, B, C y D cuatro puntos alineados de una recta proyectiva r tales que $A \neq B \neq C \neq A \neq D$. Pruébese que $(ABCD) = \lambda$ si y solo si $D - B = \lambda(C - B)$ en la recta afín $r - \{A\}$ que tiene a A como punto del infinito [2].

20) Demuéstrese que un cuerpo K tiene característica 3 si y solo si cada permutación de cuatro puntos en cuaterna armónica de un espacio proyectivo sobre K da lugar a nuevas cuaternas armónicas.

[2] *En un espacio afín, se define la* razón simple $(BCD)=\lambda$ *de tres puntos alineados* B, C *y* D, *con* $B \neq C$, *precisamente de esta forma, es decir, como el escalar* λ *tal que* $D-B=\lambda(C-B)$.