§Ejercicios del capítulo I.3 (Tema 3)

1) En el plano proyectivo real, hállese la ecuación del cambio de coordenadas homogéneas del sistema U_i al U'_i de puntos base $U'_0 = (-1, 1, 2)$, $U'_1 = (1, -1, 0)$, $U'_2 = (1, 0, 1)$ y punto unidad $U' = (2, 1, -1)$, donde estas coordenadas están referidas al primero de los sistemas.

2) En un plano proyectivo se considera el sistema de coordenadas homogéneas $\{O_1, O_2, O_3; I\}$. Hállese la ecuación del cambio al sistema de coordenadas $\{O_1, I, O_2; O_3\}$.

3) En un plano proyectivo, los vértices de un cuadrilátero, esto es, cuatro puntos tales que no haya tres de ellos alineados, pueden tomarse como puntos de un sistema de coordenadas homogéneas. En tal sistema, obténganse las ecuaciones de las 6 rectas determinadas por las parejas de vértices distintos.

4) Dese el punto de intersección de las rectas $ix_0 + 2x_1 - x_2 = 0$ y $(2-i)x_0 + 3x_1 + (1+i)x_2 = 0$ del plano proyectivo complejo.

*** 5)** Sea $\{O_1, O_2, O_3, I\}$ un cuadrilátero de un plano proyectivo y sean A y B los puntos obtenidos como intersección de las diagonales $\overline{O_2O_3}$ con $\overline{O_1I}$, y $\overline{O_1O_2}$ con $\overline{O_3I}$ respectivamente. Sean $C = \overline{AB} \cap \overline{O_1O_3}$ y $Q = \overline{O_2O_3} \cap \overline{CI}$. Trácese por A una recta r distinta de $\overline{O_1I}$ que corta a $\overline{O_1O_3}$ en M y a $\overline{O_1O_2}$ en N. Sea P el punto de intersección de $\overline{O_3N}$ con $\overline{O_1I}$. Demuéstrese que $\overline{MP}$ pasa siempre por Q, cualquiera que sea la recta r elegida. Indicación: tómense los puntos del cuadrilátero como un sistema de coordenadas homogéneas.

6) Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y V^* su espacio vectorial dual. Sea S un subespacio de V (resp. de V^*). Recuérdese que el *ortogonal* S^* de S es el subespacio de V^* (resp. de V) dado por $S^* = \{f \in V^* : f(S) = 0\}$ (resp. $S^* = \bigcap_{f\in S} \ker f$). Pruébese que $S \mapsto S^*$ es un antiisomorfismo de retículos, esto es, transforma sumas en intersecciones y vice versa. Además, $S^{**} = S$ y $\dim S = n - \dim S^*$ para cada subespacio S de V (resp. de V^*).

7) En un plano proyectivo $\mathcal{P}(V)$ se considera el sistema de coordenadas homogéneas (base de V) $B = \{v_0, v_1, v_2\}$. Si $B^* = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ es la base dual de B en el espacio vectorial V^*. Pruébese que cada punto $A =< v >\in \mathcal{P}(V)$, de coordenadas homogéneas $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ en el sistema B, se transforma por la correlación estándar en la recta de $\mathcal{P}(V^*)$ de ecuación $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ referida al sistema B^*.

8) Sean r y s dos rectas de un plano proyectivo. Encuéntrese alguna biyección $f : r \to s$ tal que para cada $A \in r$, los puntos A, $f(A)$ y O están alineados para un cierto punto fijo O.

Con mayor generalidad, si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son dos hiperplanos de un espacio proyectivo de dimensión $n > k$, dese alguna biyección $f : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que A, $f(A)$ y O sean colineales para cada $A \in \mathcal{H}_1$, con O un punto del espacio.

9) Si K es un cuerpo de q elementos, ¿cuántos elementos tiene el espacio afín n-dimensional sobre K?

10) En un plano proyectivo sobre un cuerpo K, establézcase una biyección entre el conjunto de puntos de una recta r y el conjunto de rectas que pasan por un punto $A \notin r$. Si K consta de q elementos, ¿cuántas rectas pasan por un punto?

11) En el plano afín K^2 con K de cardinal q, cuéntese el número de puntos de cada recta, el de rectas que pasan por un punto y el de rectas paralelas a una dada.

12) Si K tiene q escalares, ¿cuántos puntos, rectas y planos hay en $\mathcal{P}_3(K)$? Para un plano π del espacio afín K^3 y un punto $A \notin \pi$, ¿cuántas rectas paralelas a π pasan por A?