Examen del capítulo I.4 (Tema 4)

1) En un plano proyectivo se considera el cuadrilátero $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA})$ y una recta arbitraria $r \equiv x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ (distinta de la $x_0 = 0$). Para lo que sigue, establézcase $\{A, B, C; D\}$ como sistema de coordenadas homogéneas.

a) Escríbanse las ecuaciones de las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$ del cuadrilátero, donde $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y $F = \overline{AD} \cap \overline{BC}$.

b) Hállense las coordenadas de las intersecciones $P = r \cap \overline{AC}$, $Q = r \cap \overline{BD}$ y $R = r \cap \overline{EF}$ de la recta r con las diagonales del cuadrilátero.

c) Calcúlense las coordenadas de los respectivos cuartos armónicos P', Q' y R' de las ternas (A, C, P), (B, D, Q) y (E, F, R), y compruébese que P', Q' y R' son colineales (1 punto).

2) Fijado un sistema de coordenadas $\{A, B; C\}$ en $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ (con A en el infinito para el paso a abscisas), se sabe de una proyectividad σ que transforma C en el cuarto armónico de la terna (A, B, C), el punto de abscisa 2 en el de abscisa -5, y A en el de abscisa 3.

a) Compruébese que

$$x' = \frac{3x - 1}{x - 3}$$

es la ecuación explícita de σ.

b) Dense las ecuaciones general y matricial de σ.

c) Hállense los puntos dobles y los puntos límite de σ. Clasifíquese.

d) ¿Es σ una involución? ¿Por qué?

3) Considérese la proyectividad σ del plano proyectivo real en sí mismo dada por las ecuaciones

$$\begin{array}{rcccc} \lambda x_0' = & x_0 & - & x_1 & \\ \lambda x_1' = & x_0 & + & 3x_1 & \\ \lambda x_2' = & & & & -2x_2 \end{array}.$$

a) Dense los elementos unidos (puntos y rectas dobles) de la proyectividad σ. Para no complicar en exceso los cálculos, se informa de que, en este caso, el polinomio mínimo coincide con el característico. b) Como puede observarse a simple vista, la recta r de ecuación $x_2 = 0$ resulta ser una recta doble. Sea $\tau : r \to r$ la restricción de σ a dicha recta. Calcúlense las ecuaciones explícita y general de τ. c) Obténganse los puntos dobles y los puntos límite de τ.

4) a) En el plano proyectivo real sea σ una biyección entre la recta r y el haz de rectas que pasan por $P(\notin r)$ de modo que los puntos (distintos) A, B y C de r se transforman respectivamente en las rectas a, b y c (distintas) del haz P^*. Supóngase que σ satisface la propiedad de conservar razones dobles, esto es, la razón doble $(P_1P_2P_3P_4)$ de cada cuaterna de puntos de r coincide con la razón doble del lápiz $(\sigma(P_1)\sigma(P_2)\sigma(P_3)\sigma(P_4))$. Trácese razonadamente la imagen de otro punto D de r distinto de los tres dados.