Examen del capítulo I.5 (Tema 5)

1) a) En un plano afín considérese un cuadrivértice (A, B, C, D). Sean P la intersección de $\overline{AD}$ con la paralela a $\overline{CD}$ por B, y Q la intersección de $\overline{BC}$ con la paralela a $\overline{AB}$ por D. Utilícese el teorema de Pappus para probar que $\overline{PQ}$ es paralela a $\overline{AC}$.

b) Sean ahora (A, B, C, D) un cuadrivértice de un plano proyectivo, M un punto arbitrario de la recta $\overline{CD}$ distinto de C y de D, y N un punto arbitrario de la recta $\overline{AB}$ distinto de A y de B. Trácense $P = \overline{MB} \cap \overline{AD}$ y $Q = \overline{ND} \cap \overline{BC}$. Recúrrase al apartado anterior para justificar el hecho de que las rectas $\overline{PQ}$, $\overline{AC}$ y $\overline{MN}$ concurren.

c) Enúnciese la propiedad dual del apartado b) y dibújese un gráfico que la ilustre. ¿Puede dualizarse la propiedad del apartado a)?

2) Se suponen dados tres puntos no colineales A, A' y B del plano $\mathbb{R}^2$ de forma que la recta $\overline{AB}$, por alguna razón que no viene al caso, no se puede dibujar.

a) Trácese la paralela a $\overline{AB}$ por A' utilizando el Teorema de Desargues o su recíproco.

b) Trácese la paralela a $\overline{AB}$ por A' utilizando el Teorema de Pappus o su recíproco.

c) Trácese la mediana del triángulo (A, A', B) correspondiente al vértice A'.

Razónense las anteriores construcciones gráficas.

3) Supóngase que cuatro puntos A, B, C y D de un plano proyectivo se sitúan de forma que no haya tres de ellos alineados y que las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son accesibles.

a) Dese un método de obtención del punto $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ usando el directo (y no el recíproco) del Teorema de Desargues.

b) Dese un método de obtención del punto $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ usando el Teorema de Pappus.

b) Dese un método de obtención del cuarto armónico de la terna (E, A, B) distinguiendo los casos en que la característica del cuerpo sea 2 o distinta de 2.

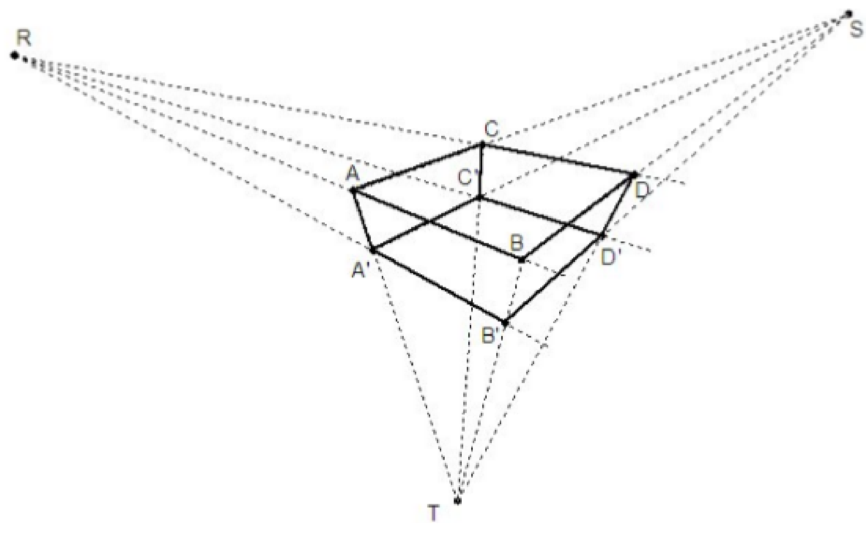
4) De un plano proyectivo se dice que satisface la *condición de Sylvester-Gallai* si dados n puntos cualesquiera $(n > 3)$ no todos alineados, existe al menos una recta que contiene exactamente a dos de ellos, o, dicho de otra forma, dos de los n puntos determinan una recta que no pasa por ninguno de los demás.

a) Enúnciese la condición dual a la de Sylvester-Gallai.

b) Pruébese que si el plano $\mathcal{P}_2(K)$ satisface la condición de Sylvester-Gallai, entonces K no puede tener característica 2.

5) Dos cuadrivérices (A, B, C, D) y (A', B', C', D') de un plano proyectivo están situados de forma que comparten los puntos diagonales

$$R = \overline{AB} \cap \overline{CD} = \overline{A'B'} \cap \overline{C'D'} \text{ y } S = \overline{AC} \cap \overline{BD} = \overline{A'C'} \cap \overline{B'D'}.$$



a) Pruébese que si $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en un punto T, entonces la recta $\overline{DD'}$ pasa también por T (teorema de Reidemeister). Indicación: se precisan dos aplicaciones del teorema de Desargues.

b) Enúnciese el dual del teorema de Reidemeister.