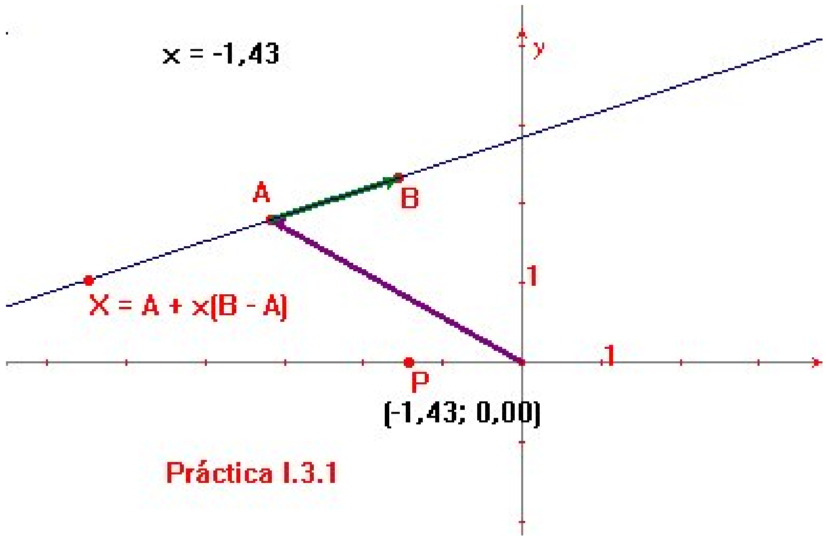
Prácticas del capítulo I.3

Índice

Práctica I.3.1

Parametrización de una recta afín

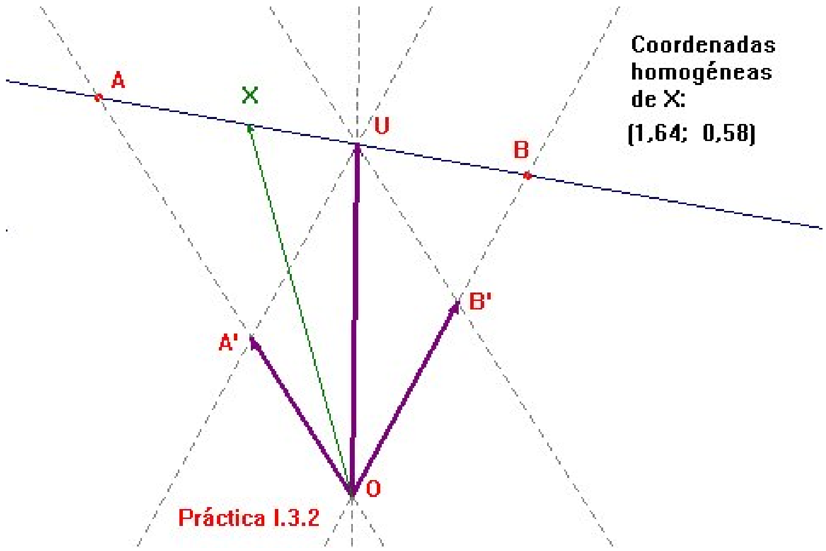


Enunciado Dados los puntos A y B del plano, represéntese la recta afín $X = A + x(B - A)$ de forma que, variando por algún mecanismo el valor del escalar x, se obtengan todos los puntos de la recta.

Indicaciones La recta pedida es la determinada por A y B. Se trata entnces de hallar las imágenes de B por las homotecias de centro A y razón x. Al objeto de establecer el mecanismo de variación de estas razones de homotecia, sitúese, por ejemplo, un punto P sobre el eje de las equis y tómese su abscisa como dicho escalar. Desplazando P por el eje se obtendrán todos los puntos de la recta afín.

Práctica I.3.2

Coordenadas homogéneas en una recta



Enunciado Dado el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; U\}$ de una recta proyectiva, encuéntrense las coordenadas homogéneas de cualquier otro punto X de la recta.

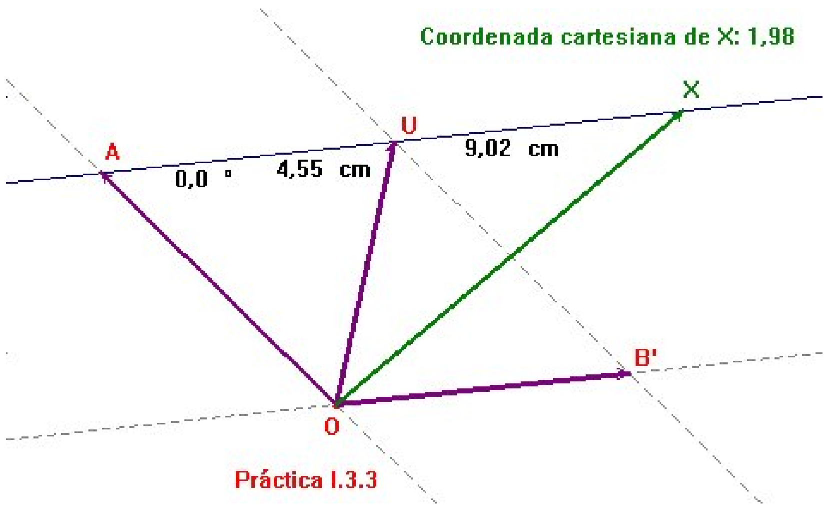
Indicaciones Situados A, B, U y X sobre la recta, elíjase cualquier punto $O \notin \overline{AB}$ que haga de origen. Considérense A engendrado por $A - O$, B por $B - O$, y U por $U - O$. El que U sea el punto unidad, obliga a escojer de forma especial a los vectores generadores de los puntos base. Si la paralela a $\overline{OB}$ por U corta a $\overline{OA}$ en A', y B' es la intersección con $\overline{OB}$ de la paralela por U a $\overline{OA}$, entonces la elección $A =< A' - O >$, $B =< B' - O >$ es la correcta pues en ella el vector que engendra a U es suma de los vectores que engendran a A y B.

Ahora puede recurrirse a la macro de la práctica I.2.1 para hallar las coordenadas de X.

Bien desplazando X, bien redefiniendo el punto mediante la herramienta *Redefinir objeto*, el lector debería comprobar que las respectivas coordenadas homogéneas de A, B y C son $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$. Adviértase también que la posición de O no altera las coordenadas de X.

Práctica I.3.3

Coordenadas cartesianas en una recta

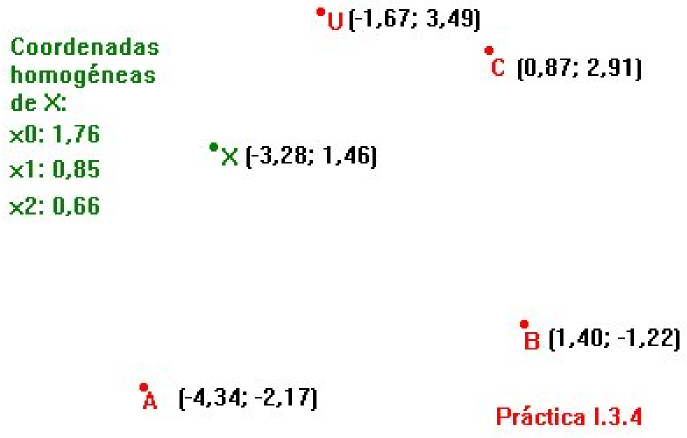


Enunciado Se considera la recta afín $\overline{AU}$, a cuyo punto del infinito se le denota por B. Dado el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; U\}$ de tal recta proyectiva, encuéntrese la *abscisa* (coordenada cartesiana) de cualquier punto $X \in \overline{AU}$.

Indicaciones Al igual que en la práctica anterior, podría escogerse cualquier origen O fuera de $\overline{AU}$, y elegir convenientes generadores de A y B tal cual se muestra en la figura de arriba. En este caso se tiene $A' = A$. Sin embargo, como la componente de X que corresponde a B siempre va a ser 0, hay un método más directo de resolver la cuestión, pues solo se necesita encontrar el escalar por el que hay que multiplicar $U - A$ para que dé $X - A$. En definitiva, el resultado buscado no es sino el cociente de las distancias $\frac{d(A,X)}{d(A,U)}$ afectado de signo positivo o negativo según $X - A$ tenga el mismo sentido que $U - A$ o sentido contrario. Para ello debería recurrirse a la misma estratagema que la utilizada en la práctica I.2.1.

Práctica I.3.4

Coordenadas homogéneas en el plano



Enunciado Escríbase una macro que proporcione las coordenadas de cualquier punto X del plano a partir de un sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B, C; U\}$, todos ellos en el afín.

Indicaciones En este caso CABRI no permite realizar una elección directa de un punto origen O como se hizo en la práctica I.3.2, pues en estas circunstancias habría que tomarlo fuera del plano. Pero si se usa la herramienta *Ecuación y coordenadas* se pueden encontrar vectores $a = (1, \alpha_1, \alpha_2)$, $b = (1, \beta_1, \beta_2)$, $c = (1, \gamma_1, \gamma_2)$, $u = (1, \delta_1, \delta_2)$ y $x = (1, \lambda_1, \lambda_2)$ tales que $A =< a >$, $B =< b >$, $C =< c >$, $U =< u >$ y $X =< x >$. Para calcular la base de $\mathbb{R}^3$ en la que hay que expresar x hay que resolver la ecuación vectorial

$$(1, \delta_1, \delta_2) = \alpha(1, \alpha_1, \alpha_2) + \beta(1, \beta_1, \beta_2) + \gamma(1, \gamma_1, \gamma_2),$$

la cual plantea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = 1 \\ \alpha\alpha_1 & + & \beta\beta_1 & + & \gamma\gamma_1 & = \delta_1 \\ \alpha\alpha_2 & + & \beta\beta_2 & + & \gamma\gamma_2 & = \delta_2 \end{array} \right\}.$$

Como A, B, y C no están alineados, ha de tratarse de un sistema de Cramer. Y ninguna de las soluciones se anula ya que U no está en ninguna de las rectas determinadas por parejas de puntos base. En cualquier caso, los valores de α, β y γ vienen dados por

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}, \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}.$$

Ahora, las coordenadas de X serán las soluciones de la ecuación vectorial

$$(1, \lambda_1, \lambda_2) = x_0\alpha(1, \alpha_1, \alpha_2) + x_1\beta(1, \beta_1, \beta_2) + x_2\gamma(1, \gamma_1, \gamma_2),$$

que da lugar al sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x_0 & + & \beta x_1 & + & \gamma x_2 & = 1 \\ \alpha\alpha_1 x_0 & + & \beta\beta_1 x_1 & + & \gamma\gamma_1 x_2 & = \lambda_1 \\ \alpha\alpha_2 x_0 & + & \beta\beta_2 x_1 & + & \gamma\gamma_2 x_2 & = \lambda_2 \end{array} \right\}.$$

Se sigue estando en un sistema de Cramer pues su determinante es $\alpha\beta\gamma(\neq 0)$ multiplicado por el determinante del sistema anterior. Se tiene,

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ \lambda_1 & \beta\beta_1 & \gamma\gamma_1 \\ \lambda_2 & \beta\beta_2 & \gamma\gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha\alpha_1 & \beta\beta_1 & \gamma\gamma_1 \\ \alpha\alpha_2 & \beta\beta_2 & \gamma\gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{\beta\gamma\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\alpha\beta\gamma\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}},$$

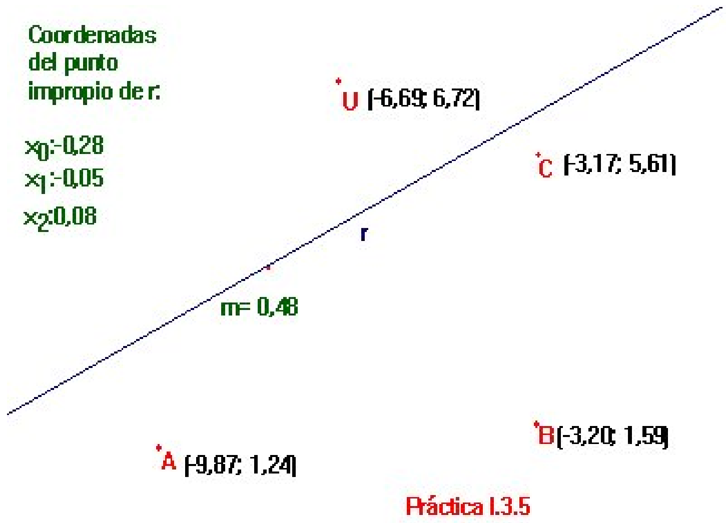
donde la última igualdad se obtiene de recordar el valor de α. Del mismo modo se calcularían las coordenadas x_1 y x_2.

Resuelto el problema algebraico, se entiende que facilitaría mucho el trabajo escribir una macro que dé el determinante de una matriz 3×3. Con ella se hallarán las coordenadas de X. Se advierte que para definir la macro pedida, esto es, la que proporcionará las coordenadas homogéneas de X como objetos finales si se indican con el ratón los datos A, B, C, U y X, hay que incluir también como objetos iniciales a los ejes coordenados, ya que CABRI realiza sus cálculos internos en función de estos. No obstante, el lector puede experimentar cambiando los ejes de posición o de ángulo y observar cómo las coordenadas homogéneas de la macro permanecen invariables.

Compruebe el lector que su macro funciona hallando las coordenadas de los puntos base y del punto unidad, ya sea desplazando X o mediante la herramienta *Redefinir objeto*.

Práctica I.3.5

Coordenadas homogéneas de un punto impropio



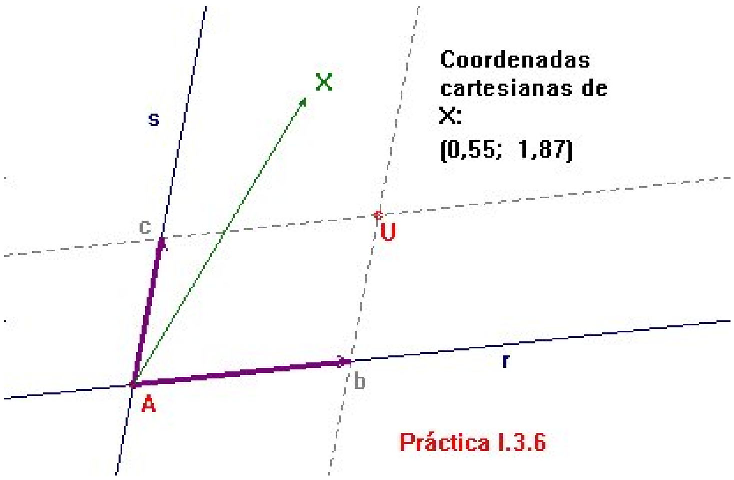
Enunciado Escríbase una macro que proporcione las coordenadas homogéneas del punto impropio de cualquier recta r del plano a partir de un sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B, C; U\}$, todos ellos en el afín.

Indicaciones Con la herramienta *Pendiente*, se visualiza la pendiente m de la recta r. Todas las rectas $y = mx + b$ pasan por el mismo punto impropio, en particular, la $y = mx$, que, escrita en coordenadas homogéneas, queda en la forma $mx_1 - x_2 = 0$. El punto impropio P de r es entonces el de coordenadas $(0, 1, m)$ respecto al sistema de coordenadas canónico.

Pueden seguirse ahora las indicaciones de la práctica I.3.4 para escribir la macro pedida. Al igual que entonces, habrá que incluir a los ejes coordenados entre los objetos iniciales, aun cuando el resultado no dependa de ellos.

Práctica I.3.6

Coordenadas cartesianas en el plano



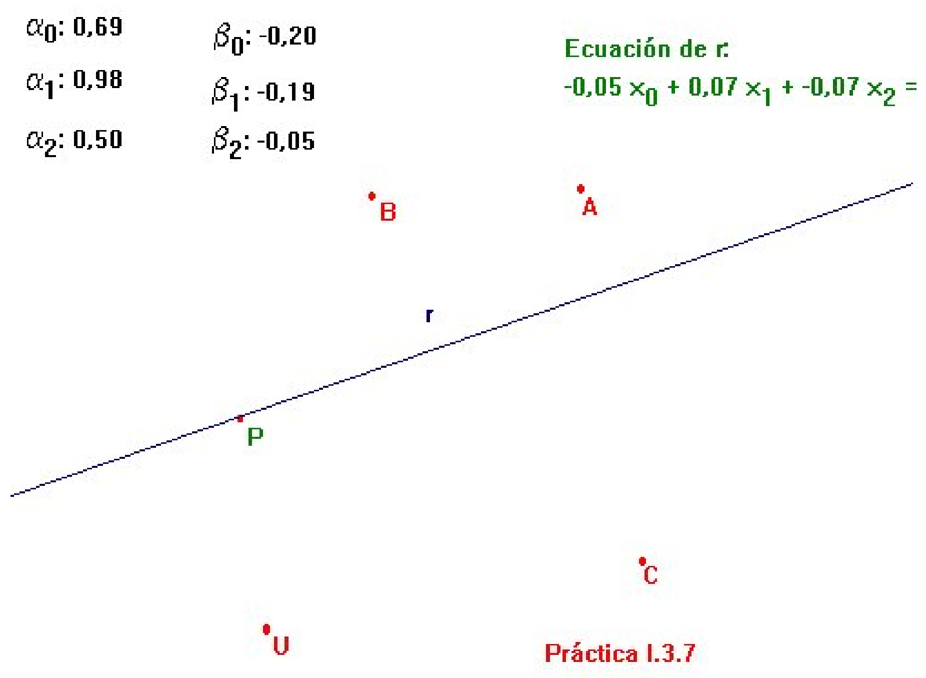
Enunciado En el plano afín se dan dos puntos distintos A y U, y dos rectas distintas r y s que pasen por A, pero no por U. Se denotan por P y Q a los respectivos puntos impropios de r y s. Respecto al sistema de coordenadas homogéneas $\{A, P, Q; U\}$, hállense las coordenadas cartesianas de cualquier punto X del plano afín.

Indicaciones Aquí puede obrarse como en la práctica I.3.3 sin necesidad de recurrir a dimensiones superiores. En efecto, al pasar al afín tras quitar la recta del infinito, el punto A quedará como origen de coordenadas (vector de coordenadas $(0, 0)$), y el vector $U - A$ deberá ser suma de los dos vectores de la base b y c, con $B =< b >$ y $C =< c >$. De ahí que el extremo de b sea la intersección de r con la paralela a s por U, y el de c, el punto en que se encuentran s y la paralela a r por U.

El uso de la macro construida en la práctica I.3.1 acabará por resolver el problema.

Práctica I.3.7

Ecuación de una recta



Enunciado Dese la ecuación de una recta arbitraria r del plano, que pase por un punto P del afín, respecto de un sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B, C; U\}$.

Indicaciones Utilizando las macros de las prácticas I.3.4 y I.3.5, pueden hallarse las coordenadas homogéneas $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ de P, y $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ del punto del infinito de r. Ahora hay que resolver el problema algebraico de determinar la ecuación $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ de r sabiendo que pasa por tales puntos. Esto plantea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_0\lambda_0 & + & \alpha_1\lambda_1 & + & \alpha_2\lambda_2 & = 0 \\ \beta_0\lambda_0 & + & \beta_1\lambda_1 & + & \beta_2\lambda_2 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Multiplicando por β_0 la primera ecuación y sumándosela a la segunda multiplicada por $-\alpha_0$, resulta

$$(\beta_0\alpha_1 - \alpha_0\beta_1)\lambda_1 + (\beta_0\alpha_2 - \alpha_0\beta_2)\lambda_2 = 0,$$

lo que da $\lambda_1 = \beta_0\alpha_2 - \alpha_0\beta_2$ y $\lambda_2 = \alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1$. Sustituyendo en la primera ecuación y operando, queda

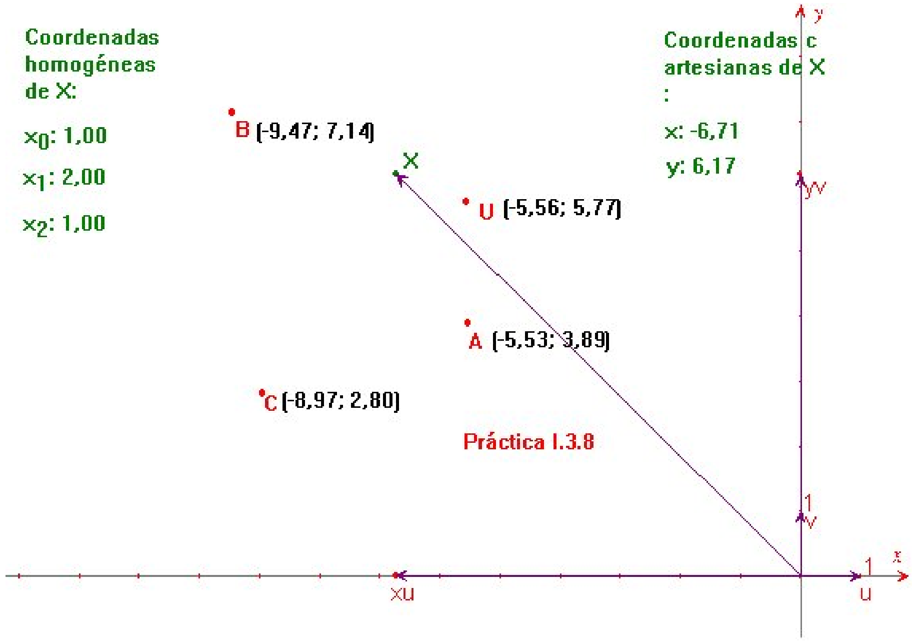
$$\alpha_0\lambda_0 = \alpha_0\alpha_1\beta_2 - \beta_0\alpha_1\alpha_2 + \beta_0\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\beta_1\alpha_2 = \alpha_0(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2).$$

Ahora bien, como $\alpha_0 \neq 0$ (¿por qué?), está permitido simplificar por él ambos miembros y se tiene $\lambda_0 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$.

Una vez escrita la macro, el lector debería comprobar que funciona correctamente hallando la ecuación de alguna recta conocida, por ejemplo $\overline{AB} \equiv x_2 = 0$ o $\overline{AC} \equiv x_1 - x_2 = 0$.

Práctica I.3.8

Trazado de un punto por sus coordenadas



Enunciado Dadas las coordenadas homogéneas (x_0, x_1, x_2) del punto X referidas a un sistema $\{A, B, C; U\}$, trácese X.

Indicaciones Como se describe en la práctica I.3.4, pueden hallarse con las herramientas CABRI vectores a, b y c tales que $A =< a >$, $B =< b >$, $C =< c >$ y $U =< a+b+c >$. Con ellos se encuentra la expresión del vector w que genera a $X =< w >$ mediante

$$w = x_0 a + x_1 b + x_2 c.$$

Así, las coordenadas cartesianas (x, y) de X vendrán dadas por $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$.

Para trazar X, se puede recurrir al siguiente procedimiento. Sobre los ejes coordenados a los que se refieren las coordenadas cartesianas, se colocan los vectores de la base canónica u y v. Se hallan los vectores homotéticos xu

de u, y yv de v mediante la herramienta *Homotecia*. Por último, la *Suma de vectores* proporcionará el vector de posición $w = xu + yv$ buscado.

De nuevo el lector puede advertir que desplazando o moviendo los ejes, el punto X no altera su posición a pesar de que CABRI ha precisado de aquellos para sus propios cálculos. Compruebe también lo correcto de la construcción dando las coordenadas de algunos puntos base o del punto unidad.