Examen resuelto del capítulo I.4 (Tema 4)

1) En una recta proyectiva r sobre el cuerpo de los números racionales se fija un sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; C\}$, con A en el infinito para el paso a abscisas.

i) Si D es el cuarto armónico de la terna (A, B, C), dese la abscisa del cuarto armónico E de la terna (B, C, D). (0.5 puntos.)

ii) Hállese la ecuación general de la proyectividad $\sigma : r \to r$ que tiene a B como punto doble, transforma C en D, y A en E.

iii) Clasifíquese σ atendiendo al número de puntos dobles.

iv) Calcúlense los puntos límite de σ.

v) Encuéntrese alguna proyectividad τ, distinta de σ^{-1}, tal que $\sigma \circ \tau$ sea una involución.

Resolución. Para el apartado i) basta usar la fórmula que da la razón doble de cuatro puntos alineados conocidas sus respectivas abscisas respecto de un sistema de coordenadas homogéneas. En el sistema $\{A, B; C\}$, la abscisa de B es 0, la de C es 1, la de D es -1 y la de E es, en principio, desconocida. Denótese a esta por x. Entonces la expresión $(BCDE) = -1$ plantea la ecuación

$$\frac{(-1-0)(x-1)}{(-1-1)(x-0)} = -1,$$

cuya solución es $x = \frac{1}{3}$.

La ecuación general de la proyectividad σ responde al esquema

$$\lambda x x' + \mu x + \nu x' + \zeta = 0.$$

Como el punto B es doble, para $x = 0$ ha de ser $x' = 0$, lo que implica $\zeta = 0$. La condición $\sigma(C) = D$ implica que para $x = 1$ debe ser $x' = -1$, lo que plantea la ecuación

$$-\lambda + \mu - \nu = 0.$$

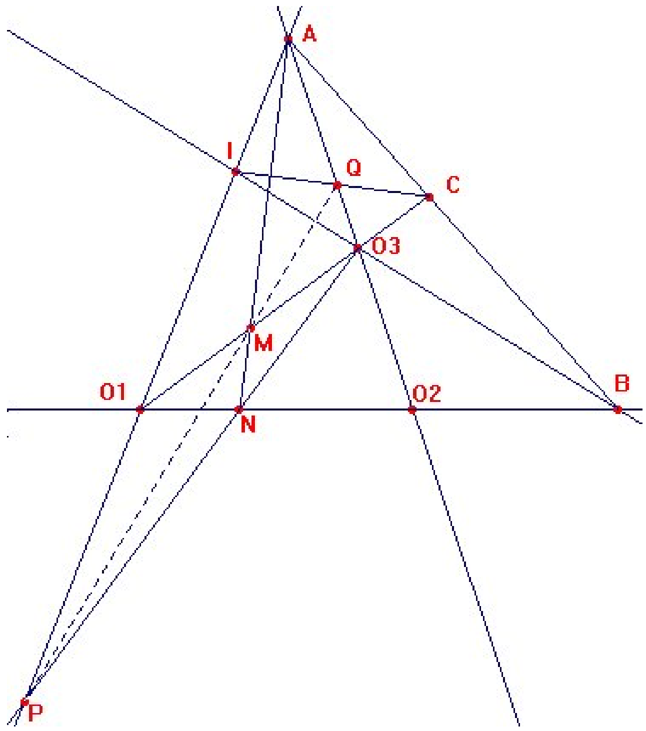
Por último, que A se transforme en E indica que $x' = \frac{1}{3}$ es un punto límite. De la correspondiente fórmula para los puntos límite $x' = -\frac{\mu}{\lambda}$ se obtiene una segunda ecuación $\lambda = -3\mu$. Resolviendo el sistema para, por ejemplo, $\lambda = 1$ se encuentra la ecuación de σ:

$$-3xx' + x + 4x' = 0.$$

Los puntos dobles se hallan haciendo $x = x'$, que plantea la ecuación $-3x + 5x = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ (el punto B) y $x = -\frac{3}{5}$. Se trata entonces de una proyectividad hiperbólica. Un punto límite ya es conocido (el E con abscisa $x' = \frac{1}{3}$). El otro se calcula mediante la fórmula $x = -\frac{\nu}{\lambda}$ obteniéndose que es el punto de abscisa $x = \frac{4}{3}$ el que se transforma en el del infinito A.

Para finalizar, es suficiente con recurrir al lema I.4.1 y mostrar una proyectividad τ con las características necesarias. Por ejemplo, si τ transforma D en A, B en sí mismo, y E en C (basta dar la imagen de 3 puntos distintos para que τ esté determinada), la composición $\sigma \circ \tau$ aplica D sobre E, y E sobre D, luego es una involución.

2) Considérese un símplex $\{O_1, O_2, O_3, I\}$ de un plano proyectivo con A y B los puntos diagonales $A = \overline{O_2O_3} \cap \overline{O_1I}$, y $B = \overline{O_1O_2} \cap \overline{O_3I}$. Constrúyanse los puntos $C = \overline{AB} \cap \overline{O_1O_3}$ y $Q = \overline{O_2O_3} \cap \overline{CI}$. Trácese por A una recta r distinta de $\overline{O_1I}$ que corta a $\overline{O_1O_3}$ en M y a $\overline{O_1O_2}$ en N. Denótese por P al punto de intersección de $\overline{O_3N}$ con $\overline{O_1I}$.



i) Usando métodos analíticos en el sistema de coordenadas homogéneas $\{O_1, O_2, O_3; I\}$, demuéstrese que $\overline{MP}$ pasa siempre por Q, cualquiera que sea la recta r elegida.

ii) Enúnciese la proposición dual del apartado anterior.

iii) Pruébese que i) no es sino una consecuencia directa del teorema de Desargues.

iv) Si se consideran las perspectividades

$$\pi_A : \overline{O_1C} \to \overline{O_1B} \quad \text{y} \quad \pi_{O_3} : \overline{O_1B} \to \overline{O_1A},$$

¿por qué es $\sigma = \pi_{O_3} \circ \pi_A$ otra perspectividad? Hállese el centro de σ calculando las imágenes de C y O_3 y utilícese el resultado para dar una demostración alternativa del apartado i).

v) Justifíquese la veracidad de las dos siguientes afirmaciones:

- **a)** Si una homología τ no deja invariable a una recta r, entonces el punto $r \cap \tau(r)$ es doble.
- **b)** Una homología no tiene más puntos dobles que el centro y los pertenecientes al eje.

Obténgase i) de las proposiciones a) y b) aplicadas a la homología de centro B y eje $\overline{PQ}$ que transforma I en O_3.

vi) En planos sobre cuerpos de característica 2, dedúzcase i) sin más herramientas que el teorema de Fano.

Solución a i) El el sistema de coordenadas homogéneas $\{O_1, O_2, O_3; I\}$, se tiene $O_1 = (1,0,0)$, $O_2 = (0,1,0)$, $O_3 = (0,0,1)$, $I = (1,1,1)$, $\overline{O_1O_2} \equiv x_2 = 0$, $\overline{O_1O_3} \equiv x_1 = 0$, $\overline{O_2O_3} \equiv x_0 = 0$, $\overline{O_1I} \equiv x_1 - x_2 = 0$ y $\overline{O_3I} \equiv x_0 - x_1 = 0$. Así, los puntos A y B tendrán por coordenadas $A = (0,1,1)$, $B = (1,1,0)$, de donde

$$\overline{AB} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{de donde} \quad \overline{AB} \equiv -x_0 + x_1 + x_2 = 0,$$

y $C = (1,0,-1)$. Por otro lado,

$$\overline{CI} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o} \quad \overline{CI} \equiv x_0 - 2x_1 + x_2 = 0.$$

Esto da $Q = (0,1,2)$. El punto M, situado sobre la recta $\overline{O_1O_3}$, tendrá unas coordenadas del tipo $M = (\lambda, 0, \mu)$, pero la condición $\overline{AM} = r \neq \overline{O_1I}$ implica $\mu \neq 0$, con lo que es lícito escribir $M = (\alpha, 0, 1)$ para algún escalar α. Es entonces

$$r = \overline{AM} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad r \equiv x_0 + \alpha x_1 - \alpha x_2 = 0.$$

De aquí $N = (\alpha, -1, 0)$. Por último, la recta $\overline{MN}$ tiene por ecuación

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \alpha & 0 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

y se comprueba directamente que las coordenadas de Q satisfacen la ecuación $\overline{MP} \equiv -x_0 - 2\alpha x_1 + \alpha x_2 = 0$, cualquiera que sea el escalar α.

Solución a ii) Considérese un cuadrilátero $\{o_1, o_2, o_3, i\}$ de rectas diagonales $a = \overline{(o_2 \cap o_3)(o_i \cap i)}$ y $b = \overline{(o_1 \cap o_2)(o_3 \cap i)}$. Sean $c = \overline{(a \cap b)(o_1 \cap o_3)}$

y $q = \overline{(o_2 \cap o_3)(c \cap i)}$. Escójase en la recta a un punto arbitrario R distinto de $o_1 \cap i$, y trácense por él las rectas $m = \overline{R(o_1 \cap o_3)}$ y $n = \overline{R(o_1 \cap o_2)}$. Sea $p = \overline{(o_3 \cap n)(o_1 \cap i)}$. Entonces m, p y q concurren en un punto.

Solución a iii) Los triángulos (C, I, O_1) y (A, O_3, N) se encuentran en la configuración de Desargues pues $B \in \overline{CA} \cap \overline{IO_3} \cap \overline{O_1N}$. De ahí que los puntos $Q = \overline{CI} \cap \overline{AO_3}$, $M = \overline{CO_1} \cap \overline{AN}$ y $P = \overline{IO_1} \cap \overline{O_3N}$ estén alineados.

Solución a iv) La aplicación $\sigma : \overline{O_1C} \to \overline{O_1A}$ es una proyectividad al obtenerse por composición de perspectividades. Ahora bien, como el punto O_1 de intersección de las rectas dominio e imagen es doble, la proyectividad σ ha de ser una perspectividad (teorema I.4.3). Por otro lado,

$$\sigma(C) = (\pi_{O_3} \circ \pi_A)(C) = \pi_{O_3}(B) = I$$

$$\text{y} \quad \sigma(O_3) = (\pi_{O_3} \circ \pi_A)(O_3) = \pi_{O_3}(O_2) = A,$$

luego el centro de la perspectividad σ es $\overline{CI} \cap \overline{O_3A} = Q$. Ahora bien,

$$\sigma(M) = (\pi_{O_3} \circ \pi_A)(M) = \pi_{O_3}(N) = P,$$

implica que $Q \in \overline{MP}$. (En toda perspectividad, cada recta determinada por un punto y su transformado pasa por el centro de la perspectiva.)

Solución a v) Supóngase que la holomogía τ tiene centro C, y denótese por X al punto $r \cap \tau(r)$. Puede escribirse $X = \overline{CX} \cap \tau(r)$. Ahora bien, $\tau(X) \in \overline{CX}$ pues toda recta por el centro es doble, y $\tau(X) \in \tau(r)$ ya que $X \in r$. Ambas circunstancias dan $\tau(X) = \overline{CX} \cap \tau(r) = X$. Esto justifica la parte a).

Para la parte b), admítase que X es un punto doble de la homología τ distinto del centro y fuera del eje. Tómese una recta s arbitraria por X. Como s cortará al eje en algún punto Y, se tiene que $s = \overline{XY}$ pasa por dos puntos dobles y es, por consiguiente, doble. Esto convierte a X en un segundo centro (toda recta por él es doble), mientras que no hay más proyectividad central con dos centros distintos que la identidad. Contradicción. (Una homología es, por definición, distinta de la identidad.)

Considérese ahora la homología τ de centro B y eje $\overline{PQ}$ que transforma I en O_3. Entonces $\tau(C) = \overline{BC} \cap \overline{QO_3} = A$ y $\tau(O_1) = \overline{BO_1} \cap \overline{PO_3} = N$. Esto proporciona $\tau(\overline{O_1C}) = \overline{NA}$, luego, por la parte a), $M = \overline{O_1C} \cap \overline{NA}$ es doble. La parte b) implica ahora que $M \in \overline{PQ}$.

Solución a vi) En característica 2, cada punto diagonal pertenece a la recta determinada por los otros dos (teorema de fano). Esto lleva a concluir con que C es el tercer punto diagonal tras A y B, esto es, $C = \overline{O_1O_3} \cap \overline{O_2I}$. En particular, $O_2 \in \overline{CI}$. De ahí que $Q = O_2$. Considérese ahora el cuadrivértice (O_1, Q, O_3, N), cuyos puntos diagonales $P = \overline{O_1A} \cap \overline{O_3N}$, $M = \overline{O_1O_3} \cap \overline{AN}$ y $O_2 = Q = \overline{O_1N} \cap \overline{AO_3}$ ha de ser colineales.

iii) En una recta proyectiva puede introducirse una suma y un producto de puntos en la forma que se describe a continuación. Fíjense en la recta tres puntos que se denotarán por P_∞, P_0 y P_1. Dados A y B distintos de P_∞, se define el punto $A + B$ como la imagen de P_0 por la involución que deja fijo a P_∞ y transforma A en B, mientras que si $P_0, P_\infty \notin \{A, B\}$, el punto $A \times B$ se obtiene como la imagen de P_1 por la involución que transforma A en B y P_0 en P_∞.

Pruébese que si α y β son las respectivas abscisas de A y B en el sistema de coordenadas $\{P_\infty, P_0; P_1\}$ con P_∞ como punto impropio para el paso a cartesianas, entonces $\alpha + \beta$ es la abscisa de $A + B$ y $\alpha\beta$ la de $A \times B$ (1 punto).

Solución Sea σ la involución que transforma A en B y P_∞ en sí mismo. La ecuación general de σ tomará la forma

$$\sigma \equiv \lambda x x' + \mu x + \mu x' + \nu = 0.$$

Recuérdese que el hecho de que el punto impropio sea doble equivale a que el coeficiente de segundo grado se anule. Así, $\lambda = 0$. Por otro lado, μ no puede ser cero, por lo que no hay inconveniente en suponer $\mu = 1$. Por último, $x = \alpha$ implica $x' = \beta$, con lo que $\nu = -\alpha - \beta$ y queda

$$\sigma \equiv x + x' - \alpha - \beta = 0.$$

De aquí se deduce que si $x = 0$ es $x' = \alpha + beta$ y el punto origen se aplica en $A + B$.

Sea ahora τ la involución que transforma A en B y P_0 en P_∞. Escribamos

$$\tau \equiv \lambda x x' + \mu x + \mu x' + \nu = 0.$$

Que 0 sea la abscisa del punto límite implica $\mu = 0$. Como antes, λ no puede anularse, por lo que hacemos $\lambda = 1$. Imponiendo que la imagen del punto de abscisa α sea el de abscisa β se obtiene

$$\tau \equiv x x' - \alpha\beta = 0.$$

Y ahora, para $x = 1$ se obtiene $x' = \alpha\beta$, de donde $\sigma(P_1) = A \times B$.