

Examen del capítulo I.4 (Tema 4)

1) En la recta proyectiva sobre \mathbb{Z}_5 se fija el sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; C\}$, con A en el infinito para el paso a coordenadas cartesianas (abscisas). Sea σ la involución que deja fijo al punto unidad y transforma el origen en el punto de abscisa 2. Encuéntrese la ecuación general de σ así como el punto límite y el otro punto doble, si lo hubiere.

2) Fijado un sistema de coordenadas homogéneas $\{A, B; C\}$ de la recta proyectiva racional y tomando A en el infinito para el paso a coordenadas cartesianas, cierta involución $\sigma : \mathcal{P}_1(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{Q})$ transforma el punto B en el cuarto armónico D de la terna (A, B, C) y tiene como punto límite al de abscisa $\frac{1}{2}$.

- a) Hállese la ecuación general de σ .
- b) Clasifíquese σ .
- c) Dése la matriz de sigma en el sistema de coordenadas $\{A, B; C\}$.
- d) ¿Cuál sería la ecuación general de σ en el sistema de coordenadas $\{C, A; B\}$ con C en el infinito?.
- e) Si τ es la proyectividad de ecuación $xx' = 1$, calcúlese la razón doble $(PQRS)$, donde P, Q, R y S son las imágenes por $\tau \circ \sigma$ de los puntos de abscisas 0, 1, 2 y 2 respectivamente.

3) En el plano afín \mathbb{Q}^2 se considera la homotecia h de centro $C = (-1, -2)$ y razón 2.

- a) Hállense $h(0, 0)$ y $h(1, 1)$.

Examen de geometría afín y proyectiva

b) En el sistema canónico de coordenadas homogéneas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{Q})$ escríbase la ecuación de la homología σ cuya restricción al afín coincide con h .

4) Dados dos planos distintos \mathcal{S} y \mathcal{T} de un espacio proyectivo \mathcal{P} de dimensión 3 y un punto $O \in \mathcal{P}$ que no pertenece ni a \mathcal{S} ni a \mathcal{T} , se define la *perspectividad* de centro O de \mathcal{S} sobre \mathcal{T} como la aplicación $\pi_O : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ dada por $\pi_O(X) = \overline{OX} \cap \mathcal{T}$.

a) ¿por qué $r = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ es una recta?

b) Pruébese que π_O es una proyectividad entre planos proyectivos tal que todo punto de r es doble.

c) Recíprocamente, si $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ es una proyectividad con la recta intersección r llena de puntos dobles, demuéstrese que σ es una perspectividad de \mathcal{S} sobre \mathcal{T} .

d) Factorícese cualquier homología $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, cuyo eje no pase por el centro, como composición de dos perspectividades entre planos de \mathcal{P} .



Castellón Serrano, Alberto (2012) Geometría afín y proyectiva.

OCW- Universidad de Málaga <http://ocw.uma.es>

Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0 ES

