Examen resuelto del capítulo II.2 (Tema 7)

1) En un plano proyectivo se considera un cuadrivértice $\{A, B, C, D\}$ inscrito en una cónica no degenerada $\mathcal{Q}$, con punto diagonal $X = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. Para un punto arbitrario $E \neq C$ sobre $\mathcal{Q}$, se construyen los puntos $Y = A^{\perp} \cap \overline{BE}$ y $Z = \overline{CE} \cap \overline{XY}$.

i) Pruébese que A, D y Z están alineados.

ii) Enúnciese el dual del resultado anterior.

Resolución. Hágase $Z' = \overline{AD} \cap \overline{CE}$, $Q = \overline{BE} \cap \overline{AC}$ y $P = A^{\perp} \cap \overline{CE}$. Hay que demostrar que $Z = Z'$. Ello se sigue de la siguiente serie de igualdades entre razones dobles:

$$(CEPZ') = (\overline{AC}\ \overline{AE} A^{\perp} \overline{AD}) = (\overline{BC}\ \overline{BE}\ \overline{BA}\ \overline{BD}) = (CQAX) = CEPZ),$$

donde se ha aplicado que la razón doble de un lápiz coincide con la de los puntos en los que corta a una recta, el teorema de Steiner y el hecho la perspectividad de centro Y conserva razones dobles.

Este resultado puede verse como un caso límite del teorema de Pascal con dos puntos, de los 6 inscritos en la cónica, confundidos. En efecto, si se consideran (B, A, C) y (A', E, D) dos ternas de puntos sobre una cónica no degenerada, con $Y = \overline{BE} \cap \overline{AA'}$, $X = \overline{A'C} \cap \overline{BD}$ y $Z = \overline{AD} \cap \overline{CE}$, el teorema de Pascal asegura que X, Y y Z están alineados. Si se "desplaza" A' hacia A, la recta $\overline{AA'}$ "tendería a identificarse" con la tangente a la cónica en A, que no es sino la polar de A. De ahí la afirmación anterior. (El entrecomillado se ha utilizado para indicar términos intuitivos.)

Para el dual hay que recordar que, en caso no degenerado, cuádrica dualiza en cuádrica, puntos sobre una cuádrica en hiperplano tangente a una cuádrica y viceversa, así como hiperplano polar de un punto dualiza en polo de un hiperplano y viceversa. Entonces el enunciado se dualiza en los siguientes términos:

Si a, b, c y d son cuatro rectas tangentes a una cónica no degenerada con $x = \overline{(a \cap c)(b \cap d)}$, y para una recta arbitraria e tangente a la cónica se contruyen las rectas $y = \overline{a^{\perp}(b \cap e)}$ y $z = \overline{(c \cap e)(x \cap y)}$ (donde $a^{\perp}$ es el polo de la recta a), entonces las rectas a, d y z son concurrentes.

2) En el plano proyectivo real se dan los puntos $A = (1, 0, -1)$ y $B = (0, -1, 2)$, y las rectas $r, s, t, u \in A^*$ y $r', s', t' \in B^*$ de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrc} r \equiv & x_1 = 0, & r' \equiv & 2x_1 + x_2 = 0 \\ s \equiv & x_0 - 3x_1 + x_2 = 0, & s' \equiv & 2x_0 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ t \equiv & 2x_0 - x_1 + 2x_2 = 0, & t' \equiv & x_0 = 0 \\ u \equiv & x_0 - x_1 + x_2 = 0. & & \end{array}$$

i) Justifíquese por qué las rectas

$$\overline{(r \cap s')(r' \cap s)}, \ \overline{(r \cap t')(r' \cap t)} \ \text{ y } \ \overline{(s \cap t')(s' \cap t)}$$

concurren, sin calcular las ecuaciones de ninguna de las tres.

ii) Sea $\sigma : A^* \to B^*$ la proyectividad entre haces que transforma r en r', s en s' y t en t'. Hállese la ecuación de $u' = \sigma(u)$.

iii) Dése la ecuación de la cónica

$$\mathcal{Q}(q) \ = \ \{v \cap \sigma(v) \ : \ v \in A^*\},$$

y clasifíquese.

Solución a i) Solo es preciso aplicar el dual del teorema de Pappus a las ternas de rectas concurrentes (r, s, t) y (r', s', t').

Solución a ii) Un primer método puede usarse aprovechando que las proyectividades conservan razones dobles. Así, para calcular la razón doble

$(rstu)$, se trabajaría en el sistema de coordenadas homogéneas $\{r, s; t\}$, con r en el infinito. Esto plantea la identidad

$$2x_0 - x_1 + 2x_2 = \alpha x_1 + \beta(x_0 - 3x_1 + x_2).$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema en α, β se obtiene $\alpha = 5$, $\beta = 2$, luego se toma

$$r \equiv 5x_1 = 0 \quad \text{y} \quad s \equiv 2x_0 - 6x_1 + 2x_2 = 0.$$

La relación

$$x_0 - x_1 + x_2 = \alpha(5x_1) + \beta(2x_0 - 6x_1 + 2x_2)$$

implica $\alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = \frac{1}{2}$, luego

$$(rstu) = \frac{2/5}{1/2} = \frac{4}{5}.$$

Si se escribe $t' \equiv 2x_0 = 0$, no es preciso tocar las ecuaciones de r' y t' en el sistema de coordenadas $\{r', s'; t'\}$. Por tanto, de $(r's't'u') = \frac{4}{5}$ se deduce

$$u' \equiv \frac{4}{5}(2x_1 + x_2) + 2x_0 - x_1 - x_2 = 0, \quad \text{o sea} \quad u' \equiv 10x_0 - 2x_1 - x_2 = 0.$$

Si al lector le molesta el uso de ecuaciones de rectas en vez de coordenadas de puntos, podría haber trasladado el problema a uno de proyectividades entre rectas. En efecto, para cada recta v que no pase por los puntos base de los haces, σ induce una proyectividad $\tau : v \to v$ que transforma cada punto $X \in v$ en el punto $v \cap \sigma(\overline{AX})$. Tomando una recta cómoda, por ejemplo, la $v \equiv x_2 = 0$, la proyectividad τ transforma R, R', S en S' y T en T', con $R = r \cap v = (1, 0, 0)$, $S = s \cap v = (3, 1, 0)$, $T = t \cap v = (1, 2, 0)$, $R' = r' \cap v = (1, 0, 0)$, $S' = s' \cap v = (1, 1, 0)$, $T' = t' \cap v = (0, 1, 0)$.

Otra opción habría sido la de factorizar σ como composición de perspectividades siguiendo el método gráfico.

Solución a iii) Bastaría con imponer a una cónica que pase por los 5 puntos A, B, $C = r \cap r' = (1, 0, 0)$, $D = s \cap s' = (5, 3, 4)$ y $E = t \cap t' = (0, 2, 1)$ y resolver el sistema correspondiente. No obstante, se intuye una simplificación en los cálculos si se toma como nuevo sistema de coordenadas homogéneas el formado por $\{A, B, C; D\}$, y se dirime en él la cuestión para luego deshacer el cambio al sistema de coordenadas canónico.

Entonces, para que D sea el punto unidad, se plantea la ecuación vectorial

$$(5, 3, 4) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, -1, 2) + \gamma(1, 0, 0),$$

que da $\alpha = -10$, $\beta = -3$ y $\gamma = 15$. Tómese pues $A = (-10, 0, 10)$, $B = (0, 3, -6)$ y $C = (15, 0, 0)$. El cálculo de las coordenadas de E en el nuevo sistema lleva a escribir

$$(0, 2, 1) = \alpha(-10, 0, 10) + \beta(0, 3, -6) + \gamma(15, 0, 0),$$

y $E = (3, 4, 2)$ en el sistema $\{A, B, C; D\}$. Siguiendo el razonamiento de la sección §II.2.2 (previo al lema II.2.1), la matriz de la forma cuadrática q adquiere en el sistema elegido el aspecto

$$q \sim N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix},$$

con $\lambda + \mu + \nu = 0$ y $6\lambda + 3\mu + 4\nu = 0$, es decir,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se observa que $\mathcal{Q}(q)$ es no degenerada ($|N| \neq 0$), y no es vacía pues tiene puntos. Se trata entonces de una *elipse real*. Por último, un mínimo deber de cortesía para con quien propone el ejercicio obliga a devolver las soluciones en el mismo formato en el que se proporcionaron los datos. De ahí que se deba deshacer el cambio de coordenadas. La matriz

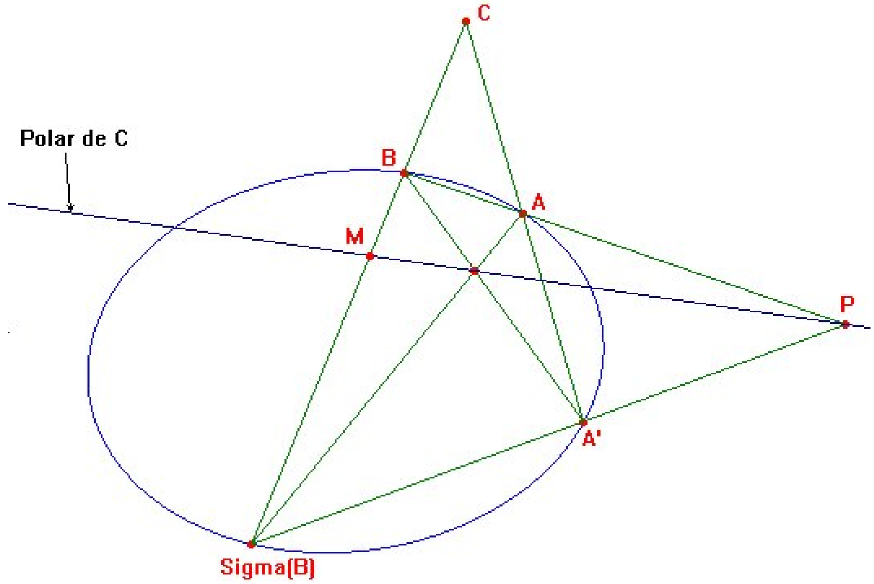
$$P = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -6 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ del cambio tiene por inversa a } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{10} & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

La matriz $M = QNQ^t$ de q en el sistema canónico da la ecuación pedida

$$\mathcal{Q} \equiv -6x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = 0.$$

3) Sean $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(q)$ una cónica no degenerada de un plano proyectivo $\mathcal{P}(V)$ y C un punto de ese plano fuera de $\mathcal{Q}$.

i) Si r es una recta por C que corta a $\mathcal{Q}$ en A y A' ($A \neq A'$), pruébese que la homología σ de centro C y eje $C^\perp$ que transforma A en A' deja invariante a $\mathcal{Q}$.



ii) De una cónica no degenerada se conocen cuatro puntos A, B, C y D, y el polo $E = r^\perp$ de una recta r que no contiene a los cuatro primeros. Si se diera la circunstancia de que $\overline{BD}$ pasara por E, descríbase un método gráfico que permita trazar la cónica.

Solución a i) Para cada punto B de la cónica distinto de las intersecciones con el eje (que son, recuérdese, los puntos de tangencia de las tangentes a $\mathcal{Q}$ por C), la recta $\overline{CB}$ corta a $C^\perp$ en un punto M. La imagen de B por la homología se calcula mediante $\sigma(B) = \overline{CB} \cap \overline{PA'}$, con $P = \overline{AB} \cap C^\perp$. Por otro lado, es sabido (teorema II.2.6) que si $\overline{CB}$ corta a $\mathcal{Q}$ en B y B', entonces $(CMBB') = -1$. Pero C es el punto diagonal del cuadrivértice $(A, B, A', \sigma(B))$ en el que $\overline{PM}$ es la recta que pasa por los otros dos puntos diagonales. Es entonces M el cuarto armónico de la terna $(B, \sigma(B), C)$. Por último,

$$-1 = (B\sigma(B)CM) = (CMB\sigma(B))$$

implica $\sigma(B) = B'$ y la cónica es invariante por σ.

El caso restante (B sobre el eje de la homología) es trivial.

Solución a ii) La homología de centro E y eje r transforma, por ejemplo, A en otro punto A' de la cónica. No es otra cosa lo que afirma el apartado anterior. Ahora se dispone de cinco puntos de la cónica y puede recurrirse a cualquiera de los métodos de trazado gráfico conocidos.