Examen resuelto del capítulo II.3 (Tema 8)

1) a) Entre todas las cónicas afines reales de la familia

$$\mathcal{Q}_\lambda \cong -(\lambda+1)x^2 + (\lambda+9)y^2 + (2\lambda-6)y + \lambda + 1 = 0,$$

¿para qué valores de λ se obtienen parábolas?

b) Pruébese que $\mathcal{Q}_0$ degenera en dos rectas secantes.

Solución a) La matriz de la cónica $\mathcal{Q}_\lambda$ es

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & -(\lambda+1) & 0 \\ \lambda-3 & 0 & \lambda+9 \end{pmatrix}.$$

Se trata de ver para qué valores de λ la matriz tiene rango 3, mientras que $r_0 = 1$. Esto último es evidente que sucede si $\lambda \in \{-1, -9\}$. Pero para $\lambda = -1$, la matriz

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Sin embargo si $\lambda = -9$ entonces es $r = 3$ y $r_0 = 1$, luego 9 es el valor buscado.

Para la parte b), la cónica $\mathcal{Q}_0$ tiene de ecuación

$$-x^2 + 9y^2 - 6y + 1 = 0.$$

Lo más cómodo aquí es reducirla a suma de cuadrados observando que $9y^2 - 6y + 1$ ya es un cuadrado perfecto, luego

$$\mathcal{Q}_0 \equiv -x^2 + (3y-1)^2 = 0$$

y entonces degenera en las rectas $3y-1=x$ y $3y-1=-x$. Por supuesto que también podría haberse procedido a su clasificación mediante el cálculo de los invariantes r, r_0, i e i_0, pero en este caso tan simple, se hace más complicado.

2) Dos diámetros (rectas polares de puntos del infinito) de una cónica con centro se dice que son *conjugados* si cada uno contiene al polo del otro. Considérese una hipérbola $\mathcal{Q}$ del plano afín real de asíntotas (tangentes en el infinito) a y b.

a) Dados dos diámetros conjugados d y d' distintos de las asíntotas, pruébese que (a, b, d, d') constituye un lápiz armónico (1 punto).

b) Pruébese que cada $M \in \mathcal{Q}$ es el punto medio del segmento P y Q con $P = r \cap a$, $Q = r \cap b$ y r la tangente a la hipérbola en M.

Solución a) Sean A y B los puntos del infinito de las asíntotas a y b, y D y D' los respectivos puntos impropios de los diámetros conjugados d y d'. Llamemos C al centro de la hipérbola (polo de la recta del infinito respecto de la cónica proyectiva de la cual procede la hipérbola). Como d es un diámetro, entonces $C \in d$. De ahí que $d^{\perp} \in C^{\perp}$ y d tenga su polo en la recta del infinito. Además, $d^{\perp} \in d'$ al tratarse de diámetros conjugados. Ambas condiciones implican que $d^{\perp} = D'$. Del mismo modo se obtendría que $(d')^{\perp} = D$, y D y D' son puntos conjugados respecto de la extensión proyectiva de la hipérbola. Juntando todo ello, resulta que la recta impropia corta a esta última cónica en A y B y pasa por dos puntos conjugados D y D', de donde se deduce que (A, B, D, D') están en cuaterna armónica. Pero estos no son sino los puntos de intersección con la recta impropia del lápiz (a, b, d, d'), es decir, $(abdd') = -1$.

b) Con idéntica notación que la empleada en el apartado anterior, la recta $d' = \overline{CM}$ es un diámetro conjugado de la recta paralela a r por C que llamaremos d. En efecto, el polo de d' se obtiene como la intersección de la polar de C (la recta del infinito) con la polar de M, la cual no es otra que r. Por eso el polo de d' pertenece a d ya que d y r comparten punto impropio (son paralelas). Ahora basta aplicar la parte a para concluir con que (d, d', a, b) constituye un lápiz armónico. Las intersecciones de este lápiz con r dan D, M, A y B, con D en el infinito, luego, al encontrarse (D, M, A, B) en cuaterna armónica, se tiene que $M = \frac{A+B}{2}$ en el afín.

3) En un plano afín se consideran una cónica no degenerada $\mathcal{Q}_1$ y una recta r secante a $\mathcal{Q}_1$ en A y B. Sea M el punto medio entre A y B.

i) Pruébese que la polar de M es paralela a $\overline{AB}$.

ii) Trácense por M otras 2 rectas distintas que intersecan a $\mathcal{Q}_1$ en puntos C, D, E y F. Denótense por P y Q a los respectivos cuartos armónicos de las ternas (E, F, M) y (C, D, M). ¿Por qué es $\overline{PQ}$ la polar de M?

iii) Elíjase una cónica arbitraria no degenerada $\mathcal{Q}_2$ que pase por C, D, E y F y que corte a r en A' y B'. Demuéstrese que M es también el punto medio entre A' y B'. (Este resultado se conoce como el *teorema generalizado de la mariposa*.)

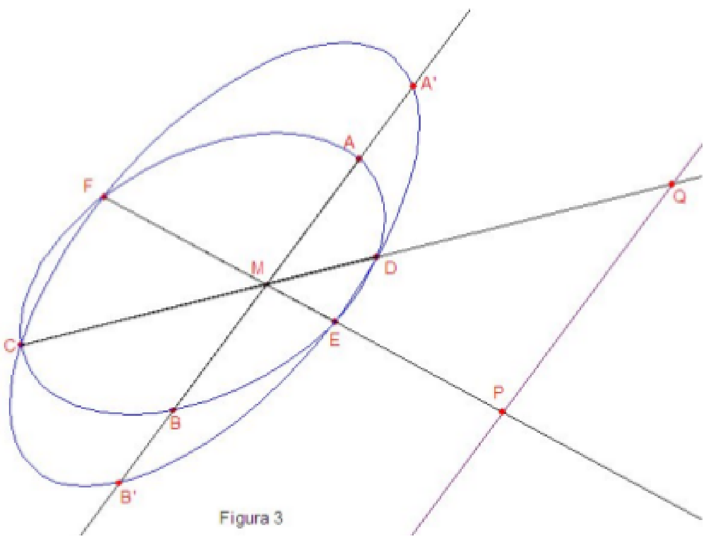

Figura 3

Solución: En la envolvente proyectiva del plano afín, denótese por X al punto del infinito de $\overline{AB}$. Como $M = \frac{A+B}{2}$ en el afín, en el proyectivo se tendrá $(XMAB) = -1$, lo que implica $X \in M^{\perp}$. (Se ha aplicado el teorema II.2.6 de los apuntes.) Ahora bien, que X sea el punto impropio de la polar de $\overline{AB}$ implica que ambas rectas sean, en el afín, paralelas, pues ambas comparten punto del infinito.

Para la parte ii), el hecho de que (Q, M) sean conjugados armónicos de (C, D), con estos dos puntos en $\mathcal{Q}_1$, implica que Q y M son conjugados respecto de la cónica, o sea, $Q \in M^\perp$. Por la misma razón, P pertenece a la polar de M, luego $M^\perp = \overline{PQ}$.

Por último, el mismo razonamiento del apartado anterior aplicado a la segunda cónica lleva a concluir con que $\overline{PQ}$ también es la polar de M respecto de $\mathcal{Q}_2$. Entonces (X, M) (con X el punto impropio de la primera parte) son conjugados armónicos de (A', B'), luego M es el punto medio entre A' y B'.

Es preciso advertir que se ha deslizado una omisión en el enunciado del ejercicio. Y es que M podría caer justo en el centro de $\mathcal{Q}_1$ (si es que esta cónica tiene centro), o, de modo equivalente, la recta $\overline{AB}$ fuera un diámetro. En tal caso, la polar de M sería la propia recta del infinito. No obstante, el teorema generalizado de la mariposa sigue satisfaciéndose en este caso. Se deja ya al lector la modificación correspondiente de los razonamientos de arriba.