Examen resuelto del capítulo I.5) (Tema 5)

1) Para el diseño de las células de memoria de un prototipo de ordenador óptico se precisa ubicar 9 fotodiodos sobre 10 líneas rectas de forma que en cada una de esas 10 rectas haya exactamente 3 fotodiodos. Por fortuna, el ingeniero que desarrolla el proyecto cursó estudios de geometría proyectiva en la Universidad de Málaga, por lo que una simple aplicación del teorema de Pappus le resolvió el problema. ¿Cómo lo hizo?

Más adelante se necesitó colocar 25 fotodiodos en 10 rectas tales que cada una ha de pasar por exactamente 6 de ellos. ¿Es esto posible?

Resolución. La configuración de Pappus da de partida 9 rectas y 9 puntos con 3 puntos sobre cada recta. Se trata pues de forzar a que otros 3 puntos de entre esos 9 estén alineados. Hay varias formas de resolverlo. En una de ellas pártase de un cuadrivértice (A, C, P, R). Sea Y la intersección de $\overline{AR}$ con $\overline{CP}$. Trácese por Y una recta arbitraria r, que cortará a $\overline{AC}$ en B, y a $\overline{PR}$ en Q. Sean $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$ y $Z = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$. Por el teorema de Pappus, la recta $\overline{XZ}$ pasa por Y. De esta forma se han obtenido 10 rectas y 9 puntos con 3 puntos sobre cada recta.

Otra forma habría sido partir de un punto Y, de dos rectas r y s distintas que no pasan por Y y de una tercera recta t por Y que corta a r en B, y a s en Q. Elíjanse rectas a y b por Y de forma que $A = r \cap a$, $C = r \cap b$, $P = s \cap a$ y $R = s \cap b$. Al igual que antes, ahora tocaría aplicar el teorema de Pappus.

Para la segunda parte dibújese la configuración de desargues, esto es, dos triángulos no degenerados (A, B, C) y (A', B', C') con $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurrentes en un punto O. Trácense los puntos $P = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $Q =$

$\overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$. El teorema de Desargues afirma que P, Q y R están sobre la misma recta. Al trazar esta recta se tienen, por el momento, 10 rectas y 10 puntos (O, A, B, C, A', B', C', P, Q y r). Ahora bien, las 10 rectas se cortan entre sí en otros 15 puntos de modo que se tienen un total de 25 puntos, con cada una de las 10 rectas pasando por exactamente 6 de entre esos puntos. Eso es precisamente lo que se pretendía.

2) De un plano proyectivo se dice que satisface la *condición de Sylvester-Gallai* si dados n puntos cualesquiera ($n > 3$) no todos alineados, existe al menos una recta que contiene exactamente a dos de ellos, o, dicho de otra forma, si hay dos de los n puntos que determinan una recta que no pasa por ninguno de los demás.

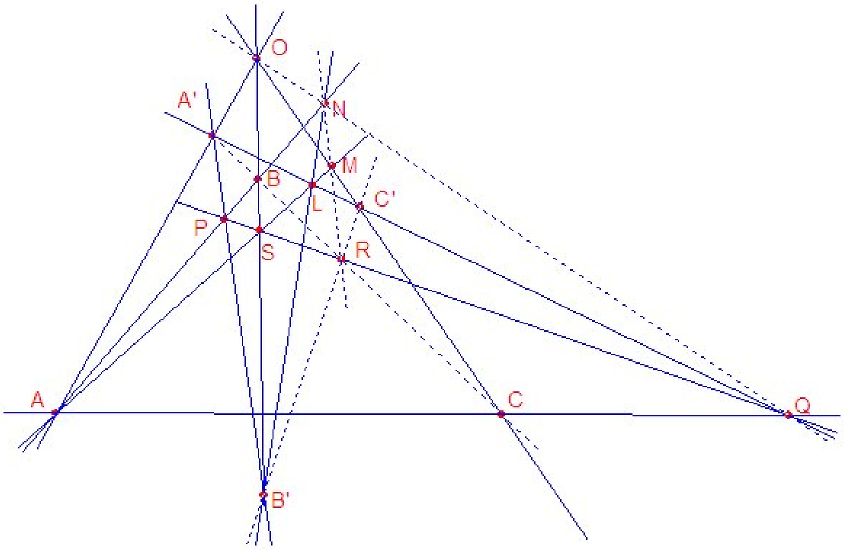
a) Enúnciese la condición dual a la de Sylvester-Gallai.

b) Pruébese que si el plano $\mathcal{P}_2(K)$ satisface la condición de Sylvester-Gallai, entonces K no puede tener característica 2.

Solución a) Un plano proyectivo satisface la condición dual de Sylverter-Gallai si dadas n rectas cualesquiera ($n > 3$) no todas concurrentes, existe al menos un punto contenido exactamente en dos de ellas o, de forma equivalente, si algún par de rectas de entre las n se cortan en un punto por el que no pasan las $n - 2$ restantes.

Para la parte b), supóngase que K es un cuerpo de característica 2. Tómese en $\mathcal{P}_2(K)$ un cuadrivértice (A, B, C, D) de puntos diagonales E, F y G. El teorema de Fano asegura que E, F y G están alineados. Pues bien, la condición de Sylvester-Gallai no se satisface para el conjunto de 7 puntos $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ pues cualquiera de las rectas determinadas por dos de esos puntos pasa por un tercero de entre los siete. Nótese que si uno se queda sólo con el conjunto $\{A, B, C, D\}$ de los cuatro vértices, entonces la condición de Sylvester-Gallai se satisface en tal caso, no obteniéndose contradicción.

3) Obténgase el teorema de Desargues mediante tres aplicaciones del teorema de Pappus. Indicaciones: Constrúyase razonadamente cada uno de los puntos auxiliares de la siguiente figura:



Utilizando el teorema de Pappus, demuéstrese que N pertenece a a la recta $\overline{OQ}$. Un segundo uso del teorema de Pappus probará que la recta $\overline{B'C'}$ pasa por R y, un tercero, que $R \in \overline{BC}$.

Solución Sean (A, B, C) y (A', B', C') dos triángulos en la configuración de Desargues con O el punto donde concurren las rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Siguiendo las indicaciones, construimos los puntos $P = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $Q = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$, $S = \overline{PQ} \cap \overline{OB}$, $M = \overline{AS} \cap \overline{OC}$, $L = \overline{AS} \cap \overline{A'C'}$ y $N = \overline{AB} \cap \overline{B'L}$. Haciendo $R = \overline{MN} \cap \overline{PQ}$, se trata de ver que R es también la intersección de $\overline{BC}$ con $\overline{B'C'}$, con lo que se llegaría a lo afirmado en la tesis del teorema de Desargues.

Pues bien, aplicando el teorema de Pappus a las ternas (B', A', P) y (A, S, L) resulta que $O = \overline{B'S} \cap \overline{AA'}$, $N = \overline{B'L} \cap \overline{AP}$ y $Q = \overline{A'L} \cap \overline{PS}$ están alineados. Ahora se aplica de nuevo a las ternas (M, L, S) Y (Q, O, N) y $C' = \overline{OM} \cap \overline{LQ}$, $R = \overline{MN} \cap \overline{SQ}$ y $B' = \overline{LN} \cap \overline{OS}$ están alineados. Por último, el teorema de Pappus referido a (A, M, S) y (O, Q, N) da que $R \in \overline{BC}$, lo que acaba la demostración.

El anterior resultado lo obtuvo Hesemberg en 1905. En 1980, Heyting proporcionó otra prueba de índole más técnica, aunque con la peculiaridad de utilizar la propiedad de Pappus una sola vez.

Castellón Serrano, Alberto (2012) Geometría afín y proyectiva.
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0 ES