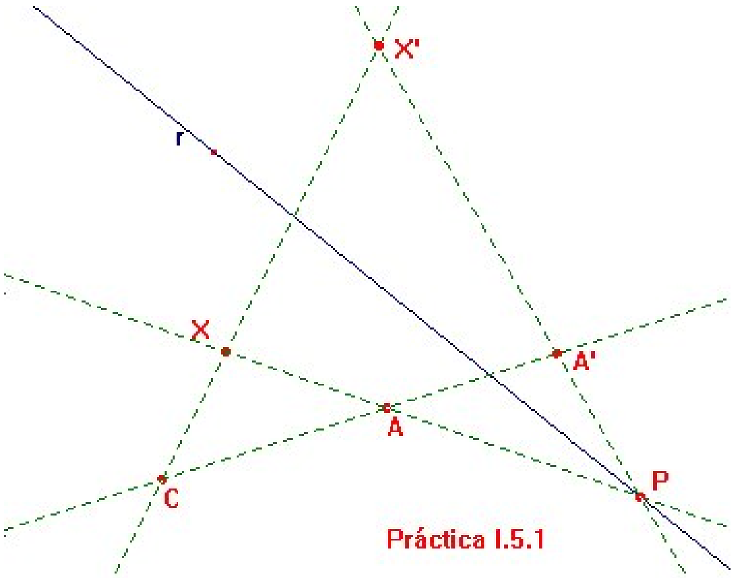
# Prácticas del capítulo I.5 (Tema 5)

## Índice

# Práctica I.5.1

## Homologías en el plano



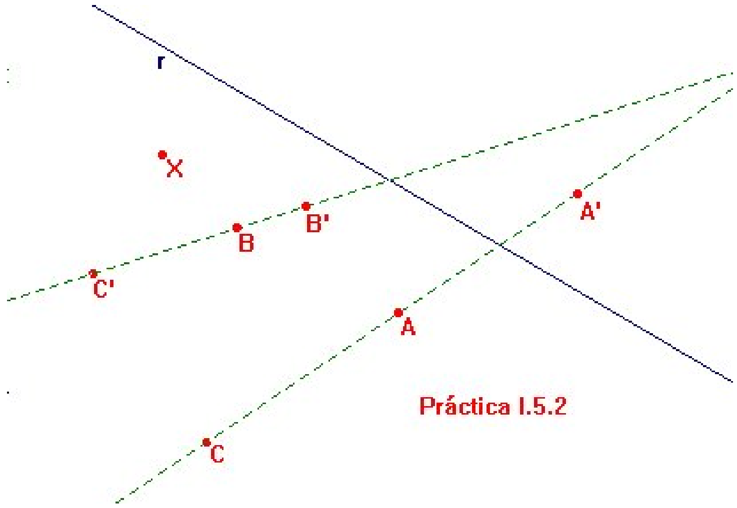

**Enunciado** De una homología se conocen su centro $C$, su eje $r$ y un par de puntos homólogos $A' = \sigma(A)$ con $A \neq A'$. Escríbanse macros que den la imagen de cualquier otro punto $X$ del plano.

**Indicaciones** Si $\overline{AX}$ corta al eje en $P$, entonces la imagen $X'$ de $X$ ha de reposar sobre la recta $\sigma(\overline{AP}) = \overline{A'P}$, pero también está en la recta $\overline{CX}$, la cual, al pasar por el centro, es doble.

Adviértase que esta macro no funciona ni para puntos $X \in \overline{CA}$ ni para los puntos impropios de rectas. El lector podría redactar otras macros que contemplen estos casos especiales.

# Práctica I.5.2

## Conmutatividad de homologías

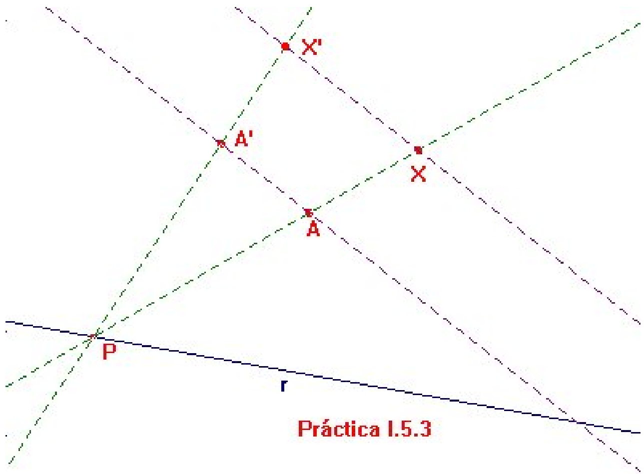



**Enunciado** Del teorema I.5.5 se desprende que cualquier par de homologías del plano real con los mismos centros y ejes han de conmutar. Examínese qué sucede en otras circunstancias, esto es, para homologías, de centros o ejes distintos.

**Indicaciones** Hágase uso de la macro de la práctica anterior para llegar a alguna conclusión.

# Práctica I.5.3

## Dilataciones y transvecciones



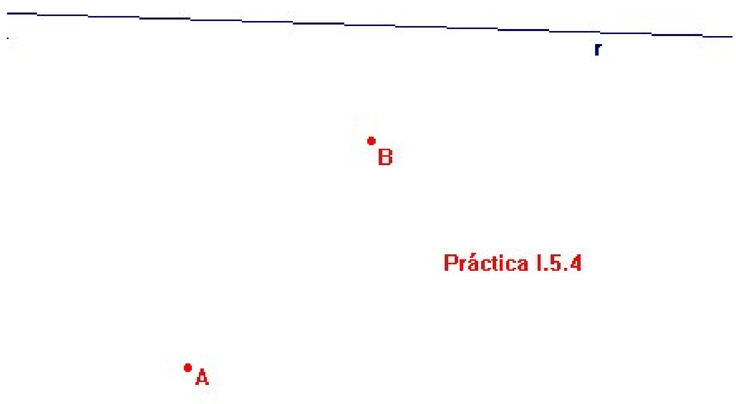

**Enunciado** De una dilatación[1] $\delta$ se conocen su eje $r$ y un par de puntos homólogos $A$ y $A' = \delta(A)$ $(A \neq A')$. Escríbase una macro que trace el dilatado $X' = \delta(X)$ de cualquier otro punto $X$. Compruébese que si $\delta$ es una transvección, o sea, $\overline{AA'} \| r$, entonces su restricción a cada recta paralela al eje es una traslación.

**Indicaciones** Para la macro basta recordar que $\delta$ es la restricción al plano afín de una homología de eje $r$ y centro el punto impropio de la recta $\overline{AA'}$, por lo que solo se precisa adaptar el razonamiento de la práctica I.5.1.

[1] *Véase el ejercicio* I.5.5

# Práctica I.5.4

## Intersección de dos rectas sin trazar una




**Enunciado** Sin trazar la recta $\overline{AB}$, hállese el punto en el que ella corta a $r$ en cada una de las siguientes circunstancias:

**i)** Usando el teorema de Pappus.

**ii)** Usando el teorema de Desargues.

**Indicaciones** Antes que nada hay que aclarar que la restricción impuesta de no trazar $\overline{AB}$ no es un simple capricho. Aparte de su interés matemático, una situación semejante puede presentarse en el ejercicio de la actividad humana. Piénsese, por ejemplo, en que $r$ represente una línea eléctrica de alta tensión y $A$ y $B$ sean dos postes de otra línea entre los que se interpone algún obstáculo.

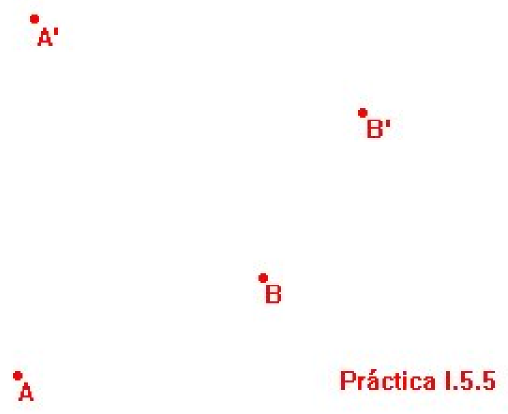
Para i), habrá que construir dos ternas $(P, Q, R)$ y $(X, Y, Z)$ de puntos alineados con $Q, Z \in r$ tales que $A = \overline{PY} \cap \overline{QX}$ y $B = \overline{PZ} \cap \overline{RX}$. De esa forma, si $C = r \cap \overline{RY} = \overline{QZ} \cap \overline{RY}$, el teorema de Pappus asegura $C$ está alineado con $A$ y $B$, con lo que el punto buscado es $C$.

Si lo que hay que usar es el teorema de Desargues, trácense dos triángulos $(A, A', A'')$ y $(B, B', B'')$ tales que $A', B' \in r$, y los puntos $P = \overline{AA'} \cap \overline{BB'}$, $Q = \overline{AA''} \cap \overline{BB''}$ y $R = \overline{A'A''} \cap \overline{B'B''}$ estén alineados. Las rectas determinadas por parejas de vértices homólogos habrán de concurrir, por lo que

$$\overline{AB} \cap \overline{A''B''} = \overline{A'B'} \cap \overline{A''B''} = r \cap \overline{A''B''}.$$

# Práctica I.5.5

## Intersección de dos rectas sin trazarlas



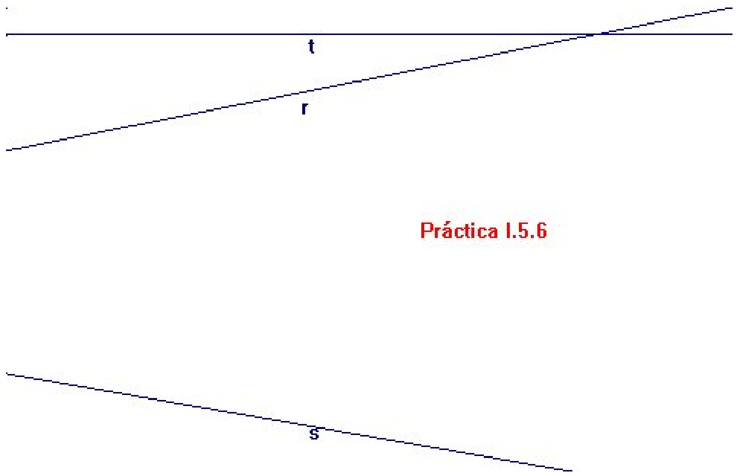

**Enunciado** Encuéntrese el punto de intersección de las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ sin trazar ninguna de las dos.

**Indicaciones** Se trata de construir dos triángulos homólogos $(A, B, C)$ y $(A', B', C')$ con centro de homología $O = \overline{AA'} \cap \overline{BB'}$. Para ello, bastaría con elegir $C$ y $C'$ arbitrarios en cualquier recta que pase por $O$. Una vez hecho esto, el teorema de Desargues asegura que la intersección $P$ buscada pertenece a la recta $\overline{QR}$ con $Q = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$.

Escríbase una macro provisional de objetos inciales $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ y $C'$, y objeto final $\overline{QR}$. Escogiendo otros $C$ y $C'$ distintos y usando la macro anterior quedará trazado un segundo eje de homología cuya intersección con el primero acaba por resolver el problema.

# Práctica I.5.6

## Paralela a una recta por una intersección inaccesible



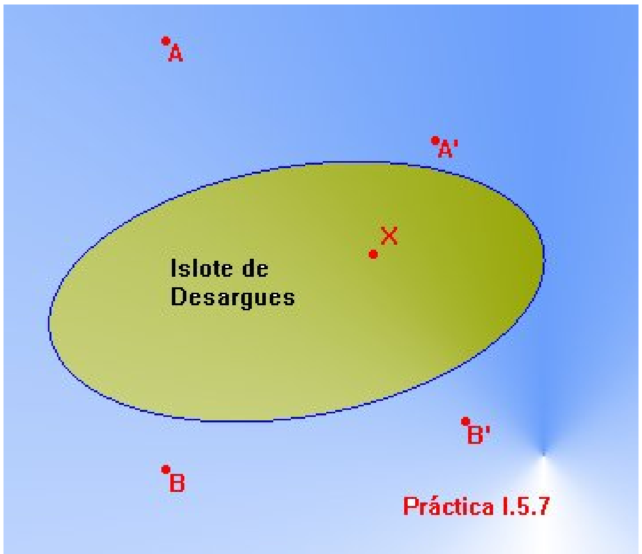

**Enunciado** Sin acceder a la intersección de $r$ con $s$, trácese por ese punto una paralela a $t$.

**Indicaciones** La manera más fácil de zanjar la cuestión es utilizar el teorema I.5.7.ii). Allí se afirmaba que si dos triángulos $(A, B, C)$ y $(A', B', C')$ son homólogos con centro de homología $O$, y $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$, entonces $\overline{QR}$ también es paralela a $\overline{AB}$ con $Q = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$.

Así, tomando $r = \overline{AC}$ y $s = \overline{A'C'}$ , los puntos $B$ y $B'$ habrán de situarse en una recta por $O = \overline{AA'} \cap \overline{CC'}$ y con $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ paralelas a $t$.

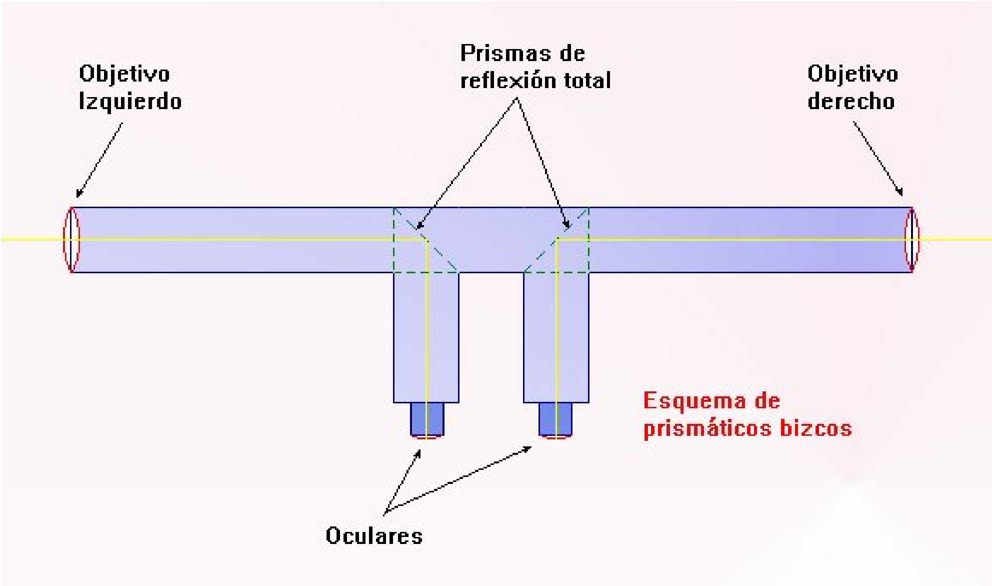
# Práctica I.5.7

## El islote de Desargues




**Enunciado** Dos rectas hipotéticas se señalizan en el mar por medio de cuatro balizas $A$, $A'$, $B$ y $B'$. ¿Será uno capaz de jalonar sobre la isla una recta que atraviese el punto $X$ y se dirija a la intersección de $\overline{AA'}$ con $\overline{BB'}$ sin poner un pie en el agua?

**Indicaciones** La respuesta es, evidentemente, sí. Pero antes que nada, hay que reflexionar sobre qué se desprende de la restricción "sin poner un pie en el agua". Por ejemplo, ¿es factible hallar la intersección de alguna de las rectas determinadas por parejas de balizas con segmentos rectilíneos sobre tierra firme? Inspirados en los instrumentos de navegación, que permiten lanzar visuales a dos objetos a la vez, habría que apañarse un artilugio como el de la figura:

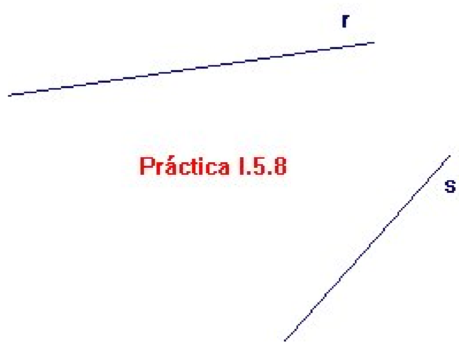



Gracias a él, se podrá caminar en línea recta sin perder de vista con el ojo izquierdo una de las boyas. En el momento en que se vea aparecer por el ocular derecho a la otra boya se estará en el punto de corte buscado.

Ahora hay que resolver el problema geométrico. Si, por ejemplo, se pudiera señalizar sobre la isla otro punto $Y$ tal que el triángulo $(A, B, X)$ fuese homólogo del $(A', B', Y)$, la solución sería $\overline{XY} \cap \{\text{interior de la isla}\}$. Pero ello exige la alineación de los puntos $P$, $Q$ y $R$, con $P = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $Q = \overline{AX} \cap \overline{A'Y}$ y $R = \overline{BX} \cap \overline{B'Y}$. Obsérvese que $P$ cae en el océano, luego hay que abordar un nuevo problema, el de encontrar dos puntos $Q$ y $R$ sobre la isla tales que $\overline{QR}$ pase por $P$.

# Práctica I.5.8

## Intersección inaccesible de dos rectas

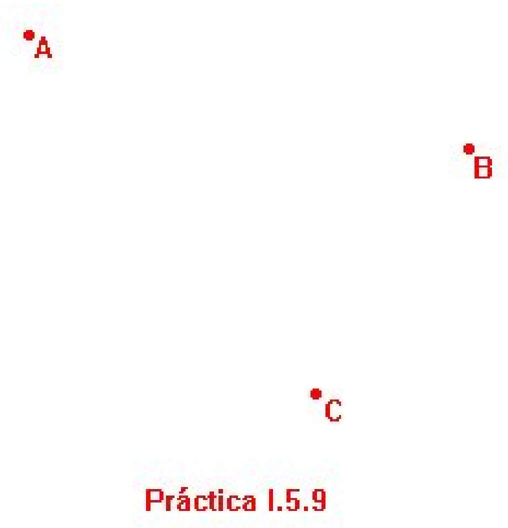



**Enunciado** Sin prolongar las rectas $r$ y $s$, trácese su intersección.

**Indicaciones** Recúrrase a las ideas de la práctica I.5.5.

# Práctica I.5.9

## Paralela a una recta sin trazar esta




**Enunciado** Sin dibujar la recta $\overline{AB}$, trácese la paralela a ella por $C$ en cada una de las siguientes circunstancias:

i) Usando el teorema de Desargues.

ii) Usando el teorema de Pappus.

**Indicaciones** A estas alturas el lector debería afrontar él solito la solución.