



## Prácticas del capítulo II.4 (Tema 9)

---

### Índice

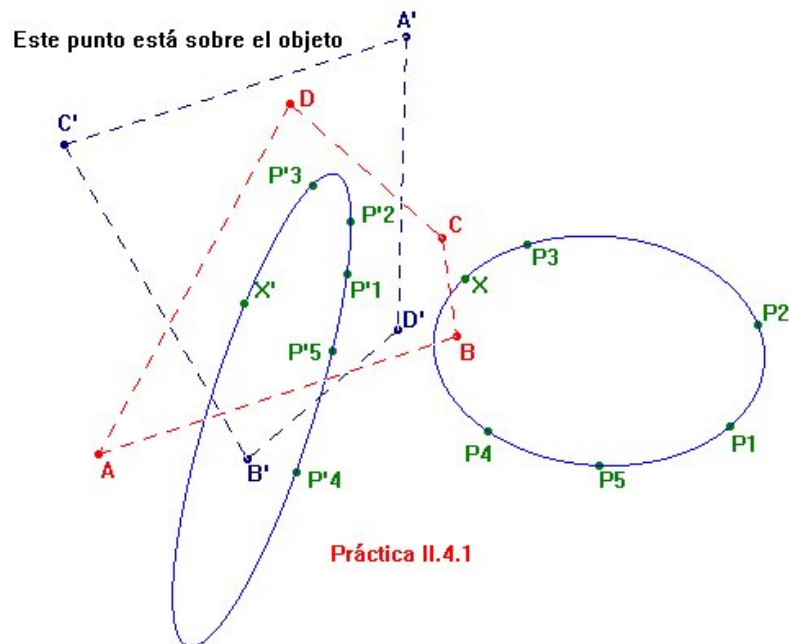
- §1 Imagen de una cónica por una proyectividad
  - §2 Proyectividades entre cónicas
  - §3 Invariancia de una cónica por una homología
  - §4 Homología entre cónicas secantes
  - §5 Puntos dobles de una proyectividad
  - §6 Puntos dobles de una involución
  - §7 Rectas dobles de una proyectividad
  - §8 Rectas dobles de una involución
  - §9 Asíntotas de una hipérbola
  - §10 Cónicas por cuatro puntos y una tangente
  - §11 Cónicas por tres puntos y dos tangentes
  - §12 Cónicas por dos puntos y tres tangentes
  - §13 Cónicas por un punto y cuatro tangentes
  - §14 Conjugado de un punto respecto de un haz
  - §15 Conjugada de una recta respecto de un haz
  - §16 La cónica de los once puntos
  - §17 El primer problema de Poncelet
  - §18 El segundo problema de Poncelet
- 





## Práctica II.3.4

### Imagen de una cónica por una proyectividad

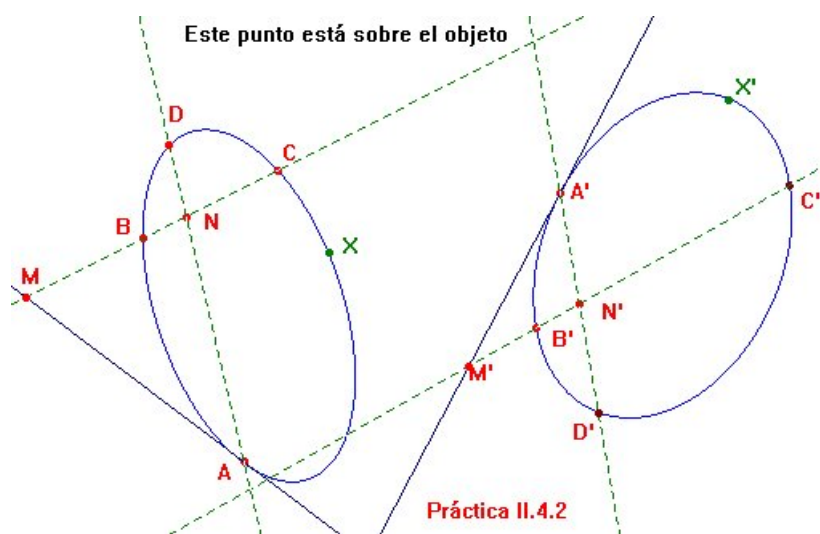


**Enunciado** Compruébese experimentalmente que una proyectividad del plano en sí mismo transforma una cónica en otra cónica.

**Indicaciones** Considérese la proyectividad  $\sigma$  que transforma el simplex  $(A, B, C, D)$  en el simplex  $(A', B', C', D')$ . Mediante la macro de la práctica I.4.7, trácense las respectivas imágenes  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$  y  $P'_5$  de los cinco puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$  que definen una cónica  $\mathcal{Q}$ . Sea  $\mathcal{Q}'$  la cónica determinada por los  $P'_i$ . Ahora CABRI permite saber si la imagen  $X'$  de un punto  $X$  que se *anima* sobre  $\mathcal{Q}$  *pertenece* a  $\mathcal{Q}'$ .

## Práctica II.4.2

### Projectividades entre cónicas

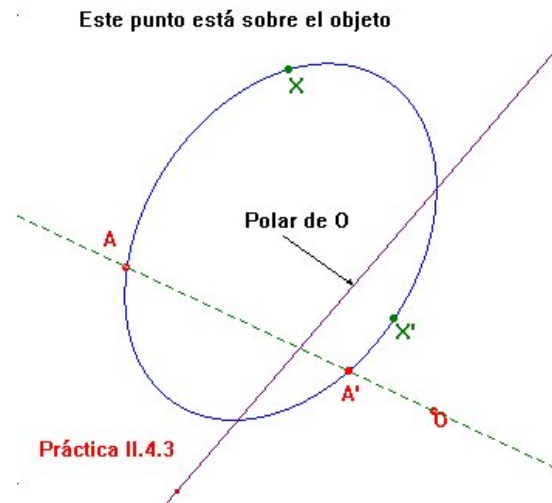


**Enunciado** De una proyectividad  $\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$  entre dos cónicas no degeneradas se conocen las respectivas imágenes  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Obténgase la imagen  $X'$  de cualquier otro punto  $X \in \mathcal{Q}$ .

**Indicaciones** De acuerdo con el teorema II.4.1, bastará con encontrar una proyectividad de todo el plano que extienda a  $\sigma$ . Sea esta  $\tau$ . Como  $\tau$  transforma tangentes en tangentes, debe llevar  $M = A^\perp \cap \overline{BC}$  a  $M' = (A')^\perp \cap \overline{B'C'}$ . De ahí que se pueda escoger  $\tau$  de forma que aplique el simplex  $(A, B, C, D)$  en el  $(A', B', C', D')$ , con  $D$  cualquier punto fijado sobre  $\mathcal{Q}$  distinto de  $A$ ,  $B$  y  $C$ ,  $N = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ ,  $D' = \overline{B'C'} \cap \overline{A'N'}$ , y  $N'$  el transformado de  $N$  por la restricción de  $\tau$  de dominio e imagen entre las rectas  $\overline{BC}$  y  $\overline{B'C'}$ , es decir, la proyectividad entre rectas que aplica  $B$  en  $B'$ ,  $C$  en  $C'$  y  $M$  en  $M'$ . Para resolver esta práctica solo hay entonces que cargar las macros de las prácticas I.4.2 y I.4.7.

## Práctica II.4.3

### Invariancia de una cónica por una homología

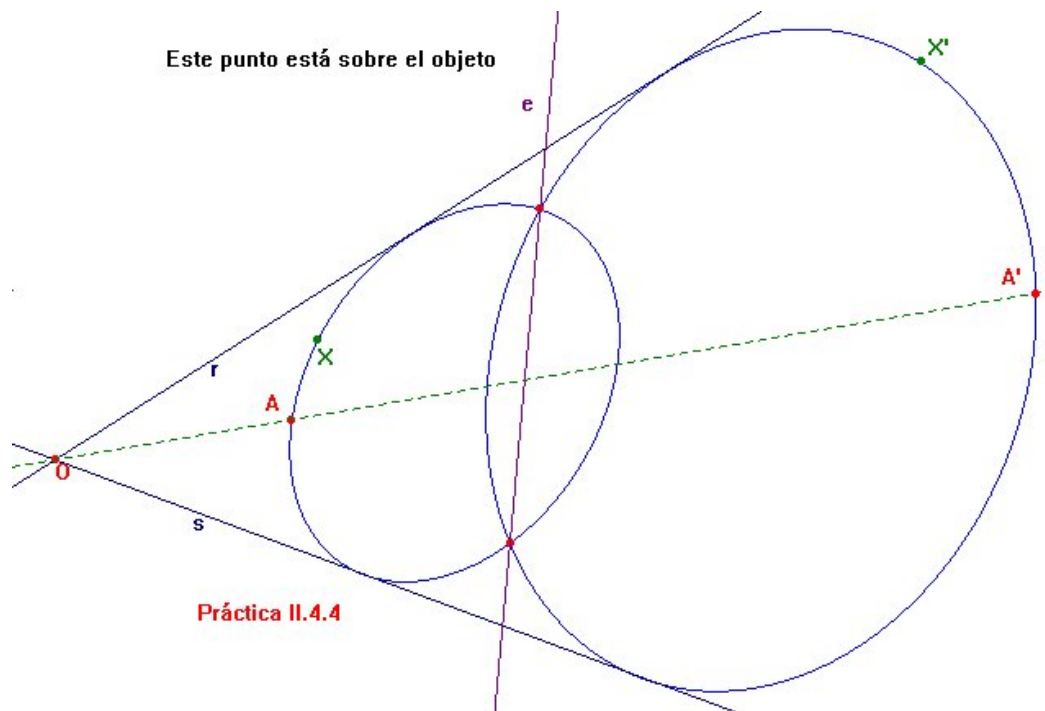


**Enunciado** Una recta por  $O$  corta a una cónica  $\mathcal{Q}$  en dos puntos distintos  $A$  y  $A'$ . Compruébese experimentalmente que la homología de centro  $O$  y eje  $O^\perp$  que transforma  $A$  en  $A'$  deja a la cónica invariante.

**Indicaciones** Úsense las macros de las prácticas I.5.1 y II.2.1.

## Práctica II.4.4

### Homología entre cónicas secantes

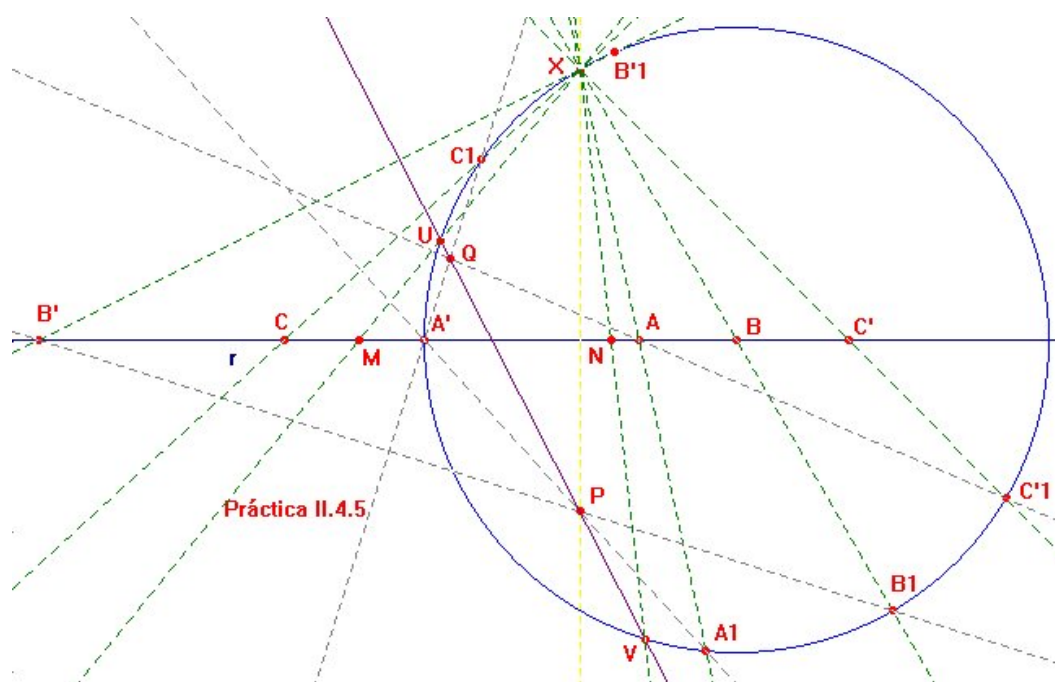


**Enunciado** Dos cónicas no degeneradas se cortan según un par de puntos que determinan la recta  $e$ . Encuéntrese alguna homología de eje  $e$  que transforme una cónica en la otra.

**Indicaciones** Un buen candidato para el centro de la homología es el punto de intersección de las tangentes comunes a las dos cónicas, pues tales rectas serían invariantes por ella. Recúrrase entonces a la macro de la [práctica II.2.14](#).

## Práctica II.4.5

### Puntos dobles de una proyectividad



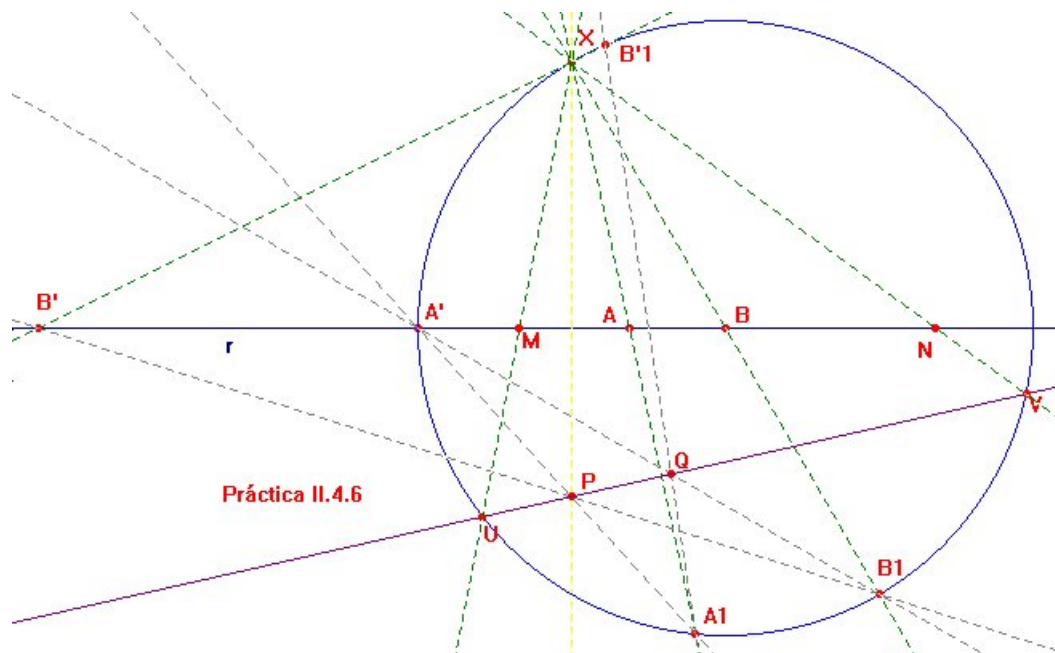
**Enunciado** Escribese una macro que dé los puntos dobles de una proyectividad  $\sigma : r \rightarrow r$  de la que se conocen los respectivos transformados  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  de tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la recta  $r$ .

**Indicaciones** El método, ya explicado en la §sección II.4.1 de los apuntes, requiere que haya alguna cónica ya trazada, y un punto  $X$  sobre ella. La más simple para redactar una macro CABRI es la *circunferencia*. Luego se trata, a fin de minimizar los *objetos iniciales* de la macro, de escoger de modo automático alguna circunferencia relacionada con los datos. En la figura, por ejemplo, se ha tomado la centrada en  $B$  que pasa por  $A'$ , y como punto  $X$  una de sus intersecciones con la mediatriz del segmento determinado por  $B$  y  $A'$ .

El resto del proceso ya fue descrito con detalle en su momento.

## Práctica II.4.6

### Puntos dobles de una involución



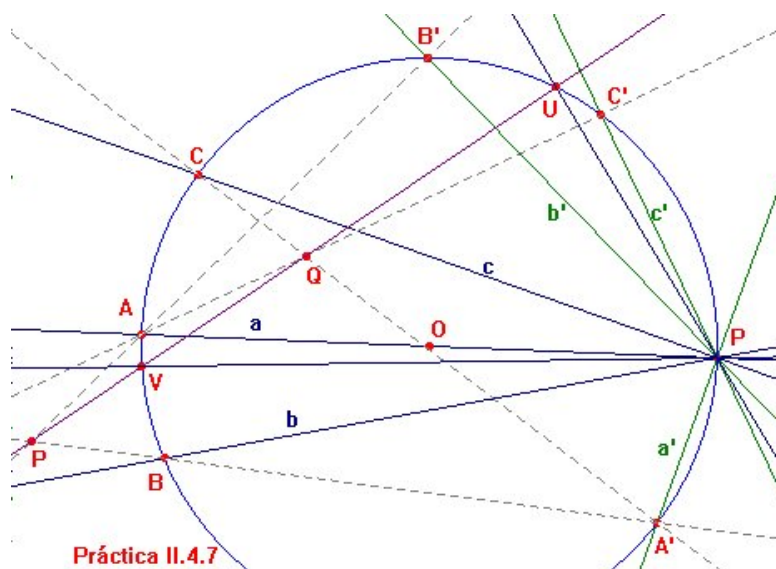
**Enunciado** Escribese una macro que dé los puntos dobles de una involución  $\sigma : r \rightarrow r$  de la que se conocen los respectivos transformados  $A'$  y  $B'$  de dos puntos  $A$  y  $B$  de la recta  $r$ .

**Indicaciones** Tras lo dicho en la práctica anterior, no se precisan indicaciones.



## Práctica II.4.7

### Rectas dobles de una proyectividad



**Enunciado** Redáctese una macro que trace las rectas dobles de la proyectividad  $\sigma : P^* \rightarrow P^*$  que transforma la recta  $a$  en la  $a'$ , la  $b$  en la  $b'$  y la  $c$  en la  $c'$ .

**Indicaciones** Como se anunció en los apuntes, una posibilidad de abordar este problema es realizando el proceso dual al descrito en la [práctica II.4.5](#). No obstante, también hay un método directo. Si se considera una cónica  $\mathcal{Q}$  no degenerada que pase por  $P$  y, en ella, los puntos  $A = (a \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$ ,  $A' = (a' \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$ ,  $B = (b \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$ ,  $B' = (b' \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$ ,  $C = (c \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$  y  $C' = (c' \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$ , entonces  $\sigma$  inducirá otra proyectividad en  $\mathcal{Q}$  que aplica  $A$  en  $A'$ ,  $B$  en  $B'$ , y  $C$  en  $C'$ . Los puntos dobles de esta última proyectividad vienen dados por las intersecciones (0, 1 ó 2) del eje de Steiner con  $\mathcal{Q}$ . Si estas son, por ejemplo,  $U$  y  $V$ , entonces las rectas dobles de  $\sigma$  no son otras que  $\overline{PU}$  y  $\overline{PV}$ .

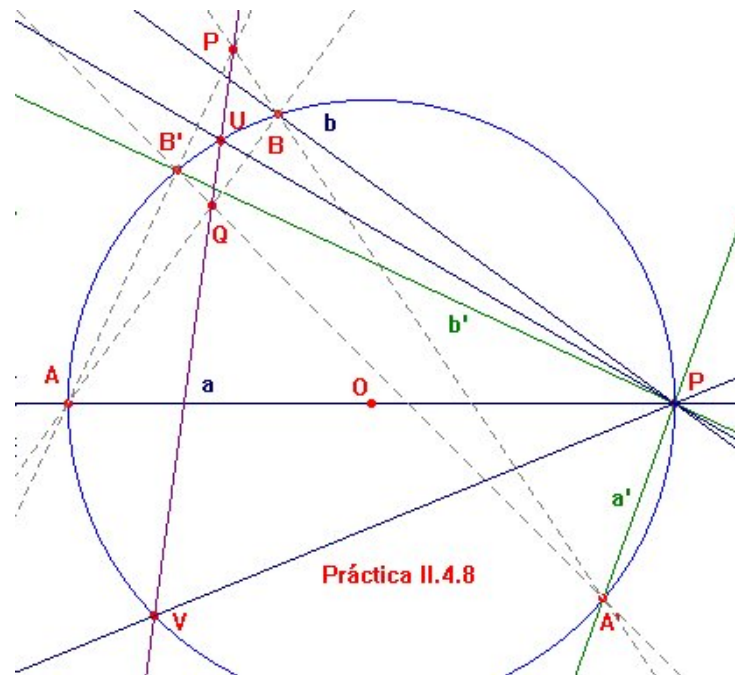
Para minimizar los *objetos iniciales* de la macro, se aconseja tomar para

## Cuaderno de prácticas

$Q$  una circunferencia que se trace en función de los datos. En la figura se ha escogido una centrada en la recta  $a$  y pasando por  $P$ .

## Práctica II.4.8

### Rectas dobles de una involución

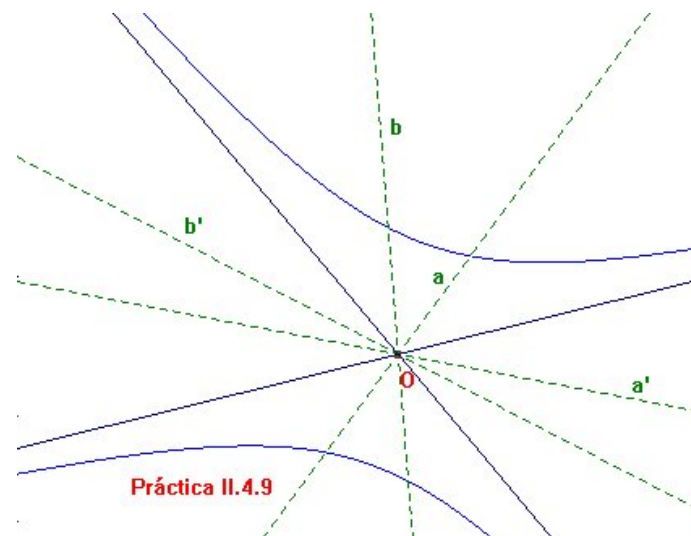


**Enunciado** Redáctese una macro que trace las rectas dobles de una involución  $\sigma : P^* \rightarrow P^*$ , conocidas las respectivas transformadas  $a'$  y  $b'$  de dos rectas  $a$  y  $b$  del haz  $P^*$ .

**Indicaciones** Si se ha realizado la práctica precedente, no se precisan indicaciones.

## Práctica II.4.9

### Asíntotas de una hipérbola

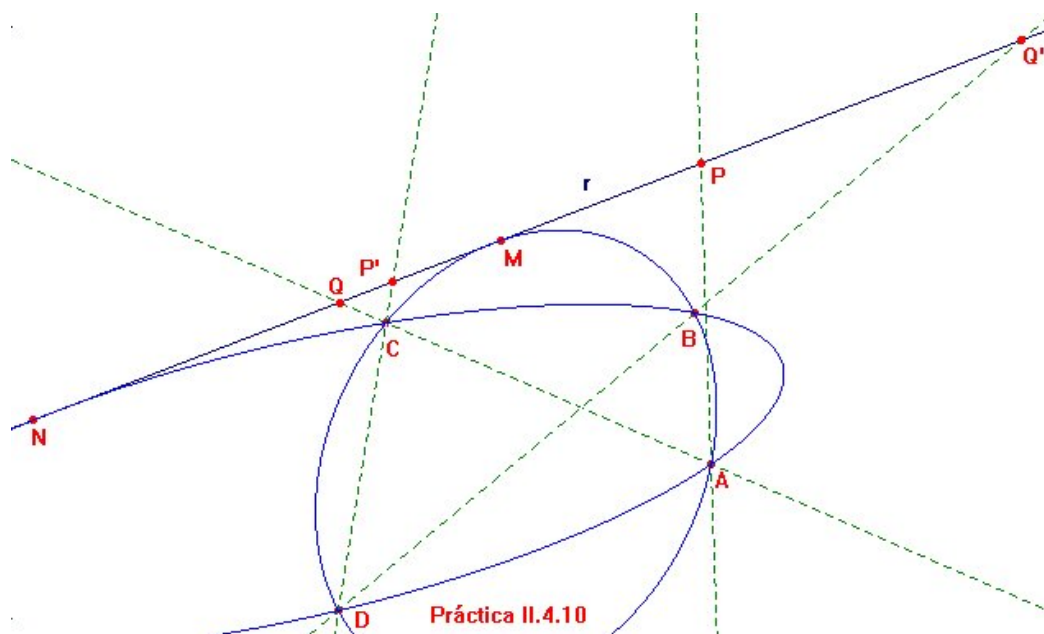


**Enunciado** Trácese las asíntotas de una hipérbola dada.

**Indicaciones** Consúltese el ejercicio II.4.3 y recúrrase a las macros de las prácticas II.3.1 y II.3.2.

## Práctica II.4.10

### Cónica por cuatro puntos y una tangente



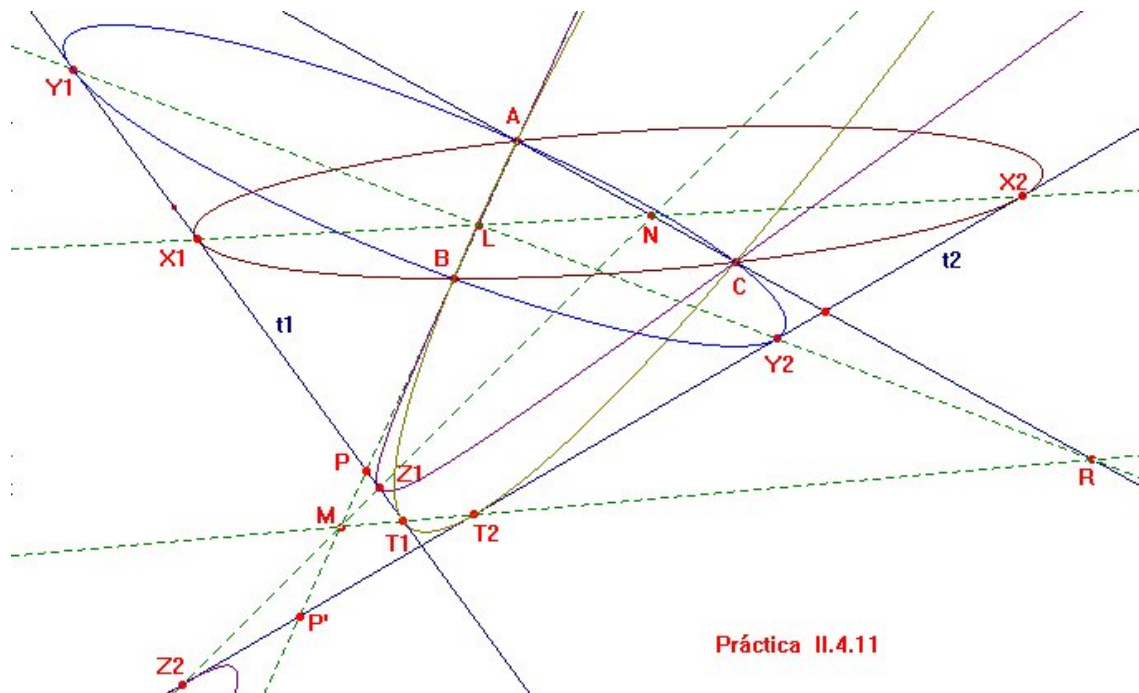
**Enunciado** Escribese una macro que trace las posibles cónicas que contienen a los vértices de un simplex  $(A, B, C, D)$  y son tangentes a una recta  $r$  que no pasa por ellos.

**Indicaciones** Considérese el haz de cónicas del tipo I determinado por el simplex  $(A, B, C, D)$ . Según el teorema de Desargues-Sturm (teorema II.4.7), este haz induce una involución  $\sigma$  en  $r$  tal que  $r \cap \mathcal{Q} = \{X, \sigma(X)\}$ , para cada  $X \in r$ , donde  $\mathcal{Q}$  es la única cónica del haz que pasa por  $X$ . De ahí que los puntos de tangencia de las cónicas buscadas sean los puntos dobles de  $\sigma$ .

El problema es ahora sencillo. No hay más que usar la macro de la práctica II.4.6, y recordar que dos de las cónicas del haz son las que degeneran en  $\overline{AB} \cup \overline{CD}$  y  $\overline{AC} \cup \overline{BD}$ .

## Práctica II.4.11

### Cónicas por tres puntos y dos tangentes

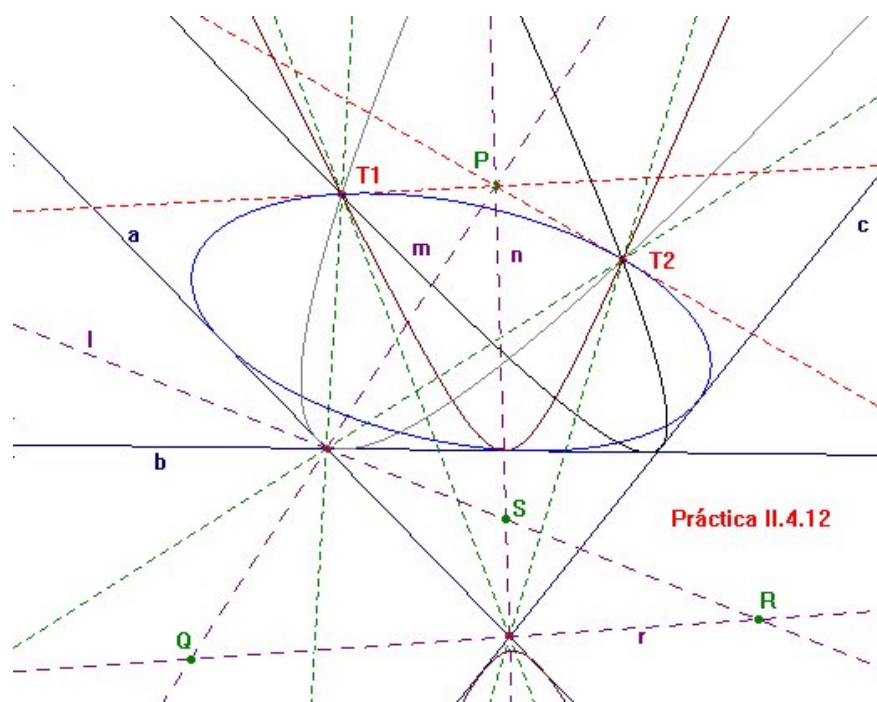


**Enunciado** Escribese una macro que trace las posibles cónicas (0, 1, 2, 3 ó 4) que pasan por 3 puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$  y son tangentes a dos rectas distintas  $t_1$  y  $t_2$  que no los contienen.

**Indicaciones** El método para resolver este problema ya ha sido comentado en los apuntes al final de la [sección II.4.3](#).

## Práctica II.2.12

### Cónica por dos puntos y tres tangentes



**Enunciado** Trácese las posibles cónicas que pasan por dos puntos  $T_1$  y  $T_2$  y son tangentes a tres rectas no concurrentes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , con  $T_1, T_2 \notin a \cup b \cup c$ .

**Indicaciones** No es casualidad que se hayan denotado los elementos que aquí intervienen con las mismas letras que los de la práctica anterior, pero intercambiando las mayúsculas por las minúsculas. Y es que el método que aquí se ha escogido es justo el dual del que se utilizara allí. Así, si se considera la involución  $\sigma$  del haz de rectas que pasan por  $a \cap b$  en sí mismo que aplica,  $a$  en  $b$ , y  $\overline{(a \cap b)T_1}$  en  $\overline{(a \cap b)T_2}$ , sus rectas dobles  $l$  y  $m$  se corresponderán con los objetos duales de los puntos  $L$  y  $M$  hallados entonces. Realizando lo propio con el haz de rectas que pasan por  $a \cap c$ , se construyen nuevas rectas  $m$  y  $n$ , que dan lugar a los puntos  $P = m \cap n$ ,  $Q = m \cap r$ ,  $R = l \cap r$  y  $S = l \cap n$ . Una de las 4 posibles cónicas, por ejemplo, será la tangente a  $a$ ,  $b$ ,

## Cuaderno de prácticas

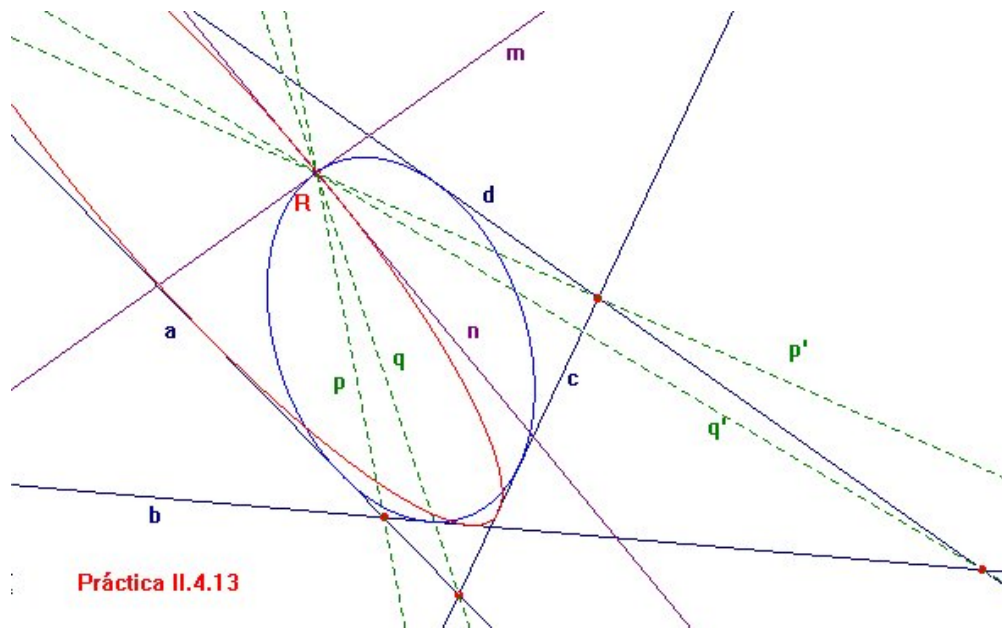
$c$ ,  $\overline{T_1P}$  y  $\overline{T_2P}$ , la cual puede ser trazada ahora de varias maneras. Por decir una, recórrase a la macro de la [práctica II.2.11](#).

En la figura se ha visualizado el caso de 4 soluciones, cada una en un color distinto para que sean distinguidas con facilidad.



## Práctica II.4.13

### Cónicas por un punto y cuatro tangentes

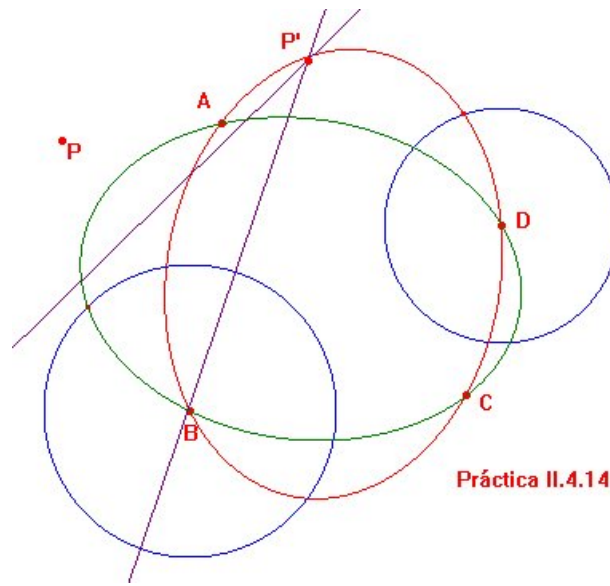


**Enunciado** Escribese una macro que trace las posibles cónicas que son tangentes a las 4 rectas  $a, b, c$  y  $d$  de un cuadrilátero, y que pasen por un punto  $R$  no perteneciente a ninguno de sus lados.

**Indicaciones** Sígase el proceso dual al descrito en la [práctica II.4.10](#).

## Práctica II.4.14

### Conjugado de un punto respecto de un haz

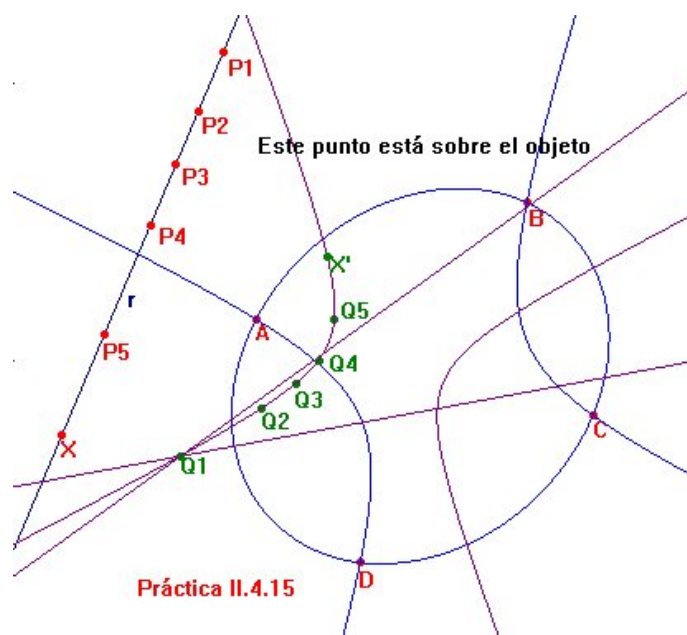


**Enunciado** Es bien sabido (ejercicio II.4.10) que para todo punto  $P$  del plano existe un único  $P'$  conjugado de  $P$  respecto de todas las cónicas de un haz no degenerado. Escribase una macro que trace ese punto  $P'$ , cuyos *objetos iniciales* sean  $P$  y los cuatro puntos base  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de un haz del tipo I.

**Indicaciones** El punto  $P'$  ha de pertenecer a todas las polares de  $P$  respecto de las cónicas del haz. De ahí con que baste mecanizar algún proceso de elección de dos de las cónicas del haz para recurrir después a la macro de la práctica II.2.1.

## Práctica II.4.15

### Conjugada de una recta respecto de un haz



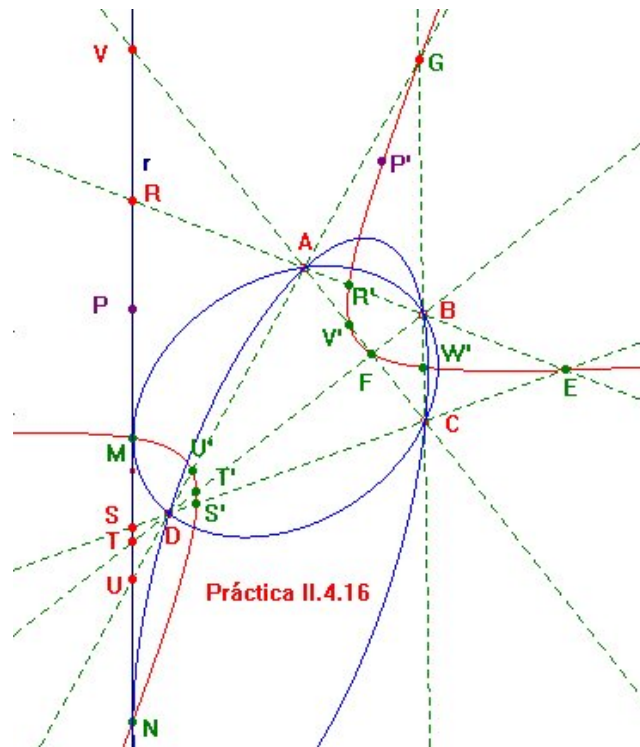
**Enunciado** En el [ejercicio II.4.11](#) se pedía demostrar que la aplicación  $\sigma$  que lleva cada punto  $X$  a su conjugado  $X'$  respecto de todas las cónicas de un haz del tipo I transforma rectas en cónicas. Escribese una macro que trace esta cónica dados una recta  $r$  y un haz determinado por un simplejo  $(A, B, C, D)$ , y compruébese experimentalmente que  $\sigma(r)$  es una cónica.

**Indicaciones** Para trazar la cónica pedida, son precisos 5 puntos. Mecanícese pues de alguna forma la elección de  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$  sobre  $r$ , y hállese sus respectivos conjugados respecto del haz por medio de la macro de la práctica anterior. Una idea puede ser tomar  $P_1 = \overline{AD} \cap r$ ,  $P_5 = \overline{AB} \cap r$  e intercalar entre ellos los demás a base de *puntos medios*.

Para la comprobación empírica del [ejercicio II.4.11](#), *ánimese* otro punto  $X$  sobre  $r$  y corrobórese que su conjugado  $X'$  respecto del haz *pertenece* a la cónica determinada por los  $Q_i = \sigma(P_i)$ .

## Práctica II.4.16

### La cónica de los once puntos

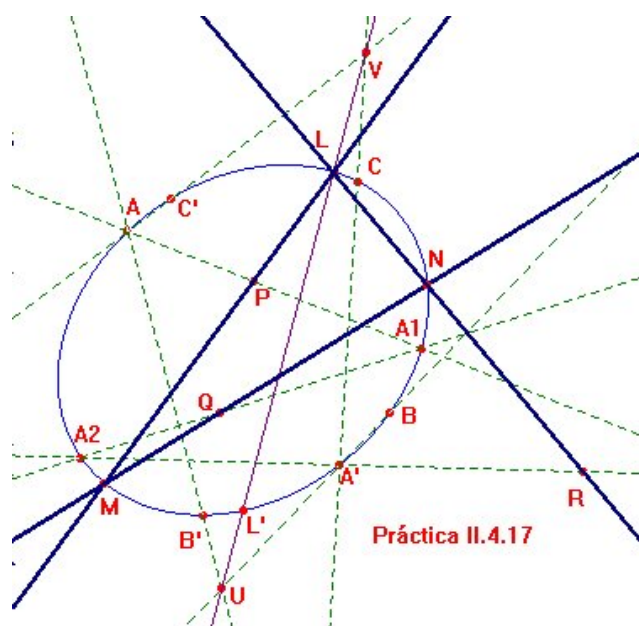


**Enunciado** Compruébese experimentalmente que la cónica de los once puntos (véase el ejercicio II.4.12) pasa por donde tiene que pasar.

**Indicaciones** No se precisan indicaciones.

## Práctica II.4.17

### El primer problema de Poncelet



**Enunciado** Dados una cónica  $\mathcal{Q}$  y tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  sobre ella, trácense los posibles triángulos inscritos en  $\mathcal{Q}$  tales que cada uno de sus lados pase exactamente por uno de los tres primeros puntos.

**Indicaciones** Escójase un punto  $A$  sobre la cónica. La homología de centro  $P$  y eje  $P^\perp$  deja a  $\mathcal{Q}$  invariante y transforma  $A$  en la otra intersección  $A_1$  de  $\overline{PA}$  con la cónica. La homología de centro  $Q$  y eje  $Q^\perp$  lleva  $A_1$  a  $A_2$ , con  $\mathcal{Q} \cap \overline{QA_2} = \{A_1, A_2\}$ . Por último, la homología de centro  $R$  y eje  $R^\perp$  aplicaría  $A_2$  en el otro punto  $A'$  en que la cónica corta a  $\overline{RA_2}$ . Si  $A' = A$ , entonces  $(A, A_1, A_2)$  es uno de los triángulos buscados. En otro caso, la aplicación  $\sigma : A \mapsto A'$  es una proyectividad de la cónica en sí misma pues resulta de componer tres proyectividades. Conviene definir una macro provisional que dé la imagen  $X' = \sigma(X)$  de cualquier otro punto  $X \in \mathcal{Q}$ . Si  $\sigma \neq 1_{\mathcal{Q}}$ , dependiendo del número de puntos dobles de  $\sigma$  el primer problema

## Cuaderno de prácticas

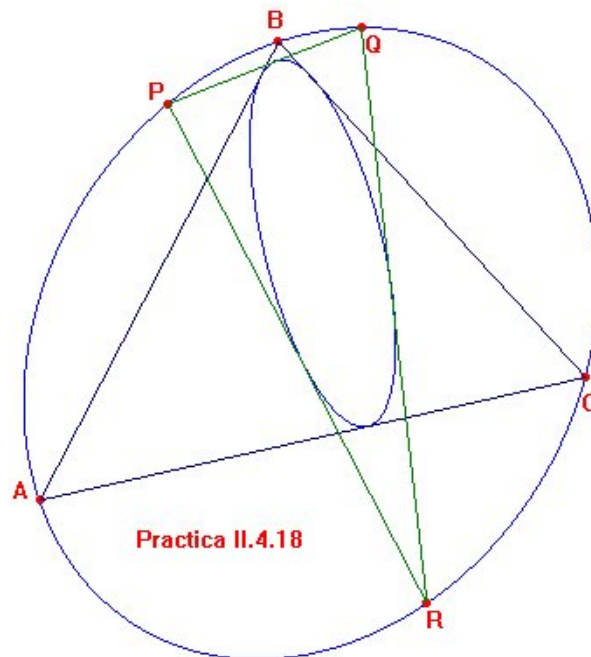
de Poncelet tendrá 0, 1 ó 2 soluciones.

Ahora bastará con tomar otros dos puntos  $B$  y  $C$  en la cónica y hallar el eje de Steiner  $e$  de  $\sigma$ .

En la figura se ilustra el caso de dos soluciones, aunque solo se ha resaltado una de ellas, la  $(L, M, N)$ , con  $L$  una de las dos intersecciones del eje de Steiner con  $\mathcal{Q}$ .

## Práctica II.4.18

### El segundo problema de Poncelet



**Enunciado** Dadas dos cónicas  $Q$  y  $Q'$ , el segundo problema de Poncelet estudia las circunstancias bajo las que puede inscribirse un polígono de  $n$  lados en la primera de ellas, tal que esté circunscrito en la segunda. Aunque no será probado aquí, sepa el lector que en caso de existir alguna solución, cada punto  $P$  de la primera cónica da lugar a nuevas soluciones sin más que ir trazando una sucesión de puntos sobre  $Q$ , cada uno de los cuales no es sino la intersección con  $Q$  de una de las tangentes del punto anterior a la cónica  $Q'$ .

En esta práctica se propone comprobar experimentalmente este hecho para el caso de los triángulos ( $n = 3$ ).

**Indicaciones** Con la ayuda de las macros redactadas con anterioridad, constrúyase una solución particular al segundo problema de Poncelet, esto es,

## Cuaderno de prácticas

dos cónicas  $\mathcal{Q}$  y  $\mathcal{Q}'$  más un triángulo  $(A, B, C)$  con sus vértices en  $\mathcal{Q}$  y sus lados tangentes a  $\mathcal{Q}'$ . Situado un punto  $P$  en la primera cónica, sean  $Q$  y  $R$  las intersecciones con  $\mathcal{Q}$  de las tangentes a  $\mathcal{Q}'$  por  $P$ . Compruébese ahora que  $\overline{QR}$  es tangente a  $\mathcal{Q}'$ .

Si se *anima*  $P$  sobre  $\mathcal{Q}$ , se visualizarán la totalidad de las soluciones al segundo problema de Poncelet. Obsérvese que, en ocasiones, puede que el triángulo  $(P, Q, R)$  degenerare al superponerse dos de sus vértices.



Castellón Serrano, Alberto (2012) Geometría afín y proyectiva.  
OCW- Universidad de Málaga <http://ocw.uma.es>  
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0 ES

