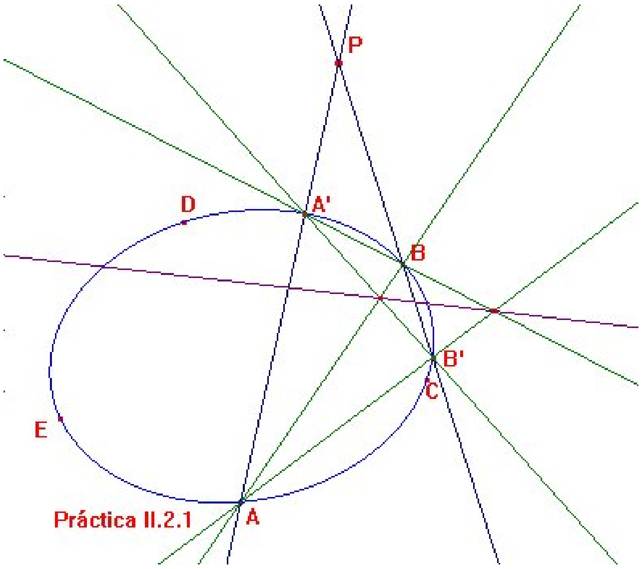
Prácticas del capítulo II.2 (Tema 7)

Índice

Práctica II.2.1

Polar de un punto

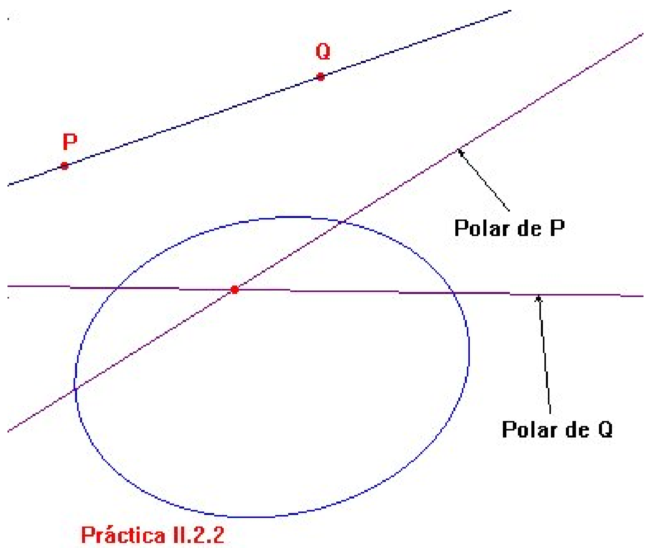


Enunciado Escríbase una macro que dé la polar de un punto P respecto a una cónica $\mathcal{C}$ que no pasa por él.

Indicaciones Teniendo en cuenta el corolario II.2.1, basta con inscribir en $\mathcal{C}$ un cuadrivértice del que P sea punto diagonal. Eso sí, con el fin de que los objetos iniciales se limiten a P y $\mathcal{C}$, conviene utilizar como vértices algunos de los cinco puntos que usa CABRI para definir una cónica.

Práctica II.2.2

Polo de una recta determinada por dos puntos

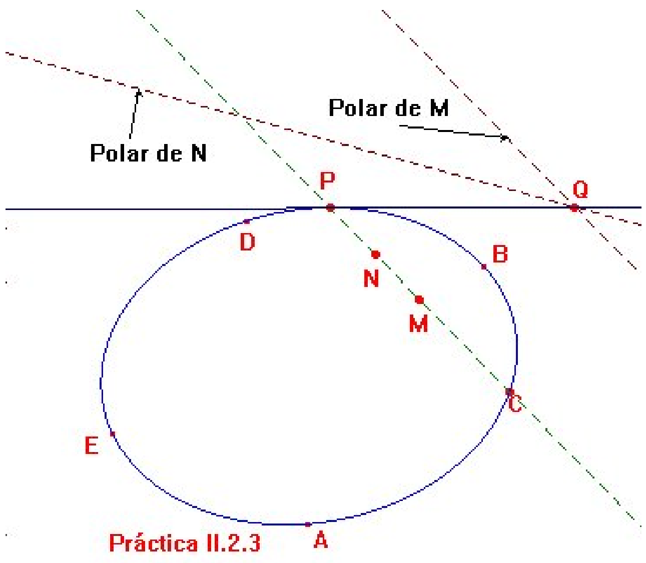


Enunciado Redáctese una macro que trace la polar respecto de una cónica $\mathcal{C}$ de la recta que pasa por dos puntos fuera de $\mathcal{C}$.

Indicaciones Recuérdese que las polares de los puntos de una recta pasan por el polo de la recta.

Práctica II.2.3

Tangente a una cónica por uno de sus puntos



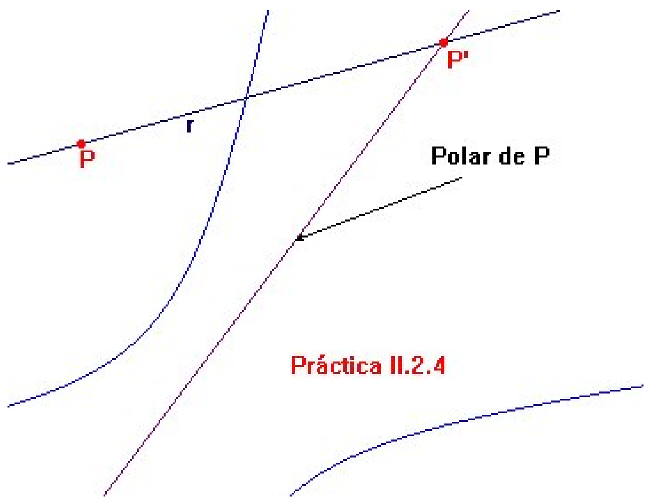
Enunciado Escríbase una macro que trace la tangente a una cónica $\mathcal{C}$ por un punto $P \in \mathcal{C}$.

Indicaciones Aunque la tangente a P sea su polar, si el punto pertenece a $\mathcal{C}$, no funcionará la macro de la práctica II.2.1 ya que las rectas por P cortarán a la cónica en, a lo sumo, un punto más, siendo necesarios dos para inscribir el cuadrivértice. No obstante, adviértase que $P^\perp$ queda determinada conociendo el polo Q de cualquier recta secante a $\mathcal{C}$. Para no incluir objetos iniciales superfluos, puede recurrirse a cualquiera de los cinco puntos que utiliza CABRI para la definición de la cónica. En la figura se ha escogido el C y, en la recta $\overline{PC}$, dos puntos de cálculo automático, por ejemplo, el punto medio M entre P y C, y el punto medio N entre M y P. la macro de la práctica II.2.2 proporciona ahora el punto Q.

Nótese que esta macro traza la tangente a $\mathcal{C}$ en todo punto salvo el C.

Práctica II.2.4

Involución inducida en una recta por una cónica

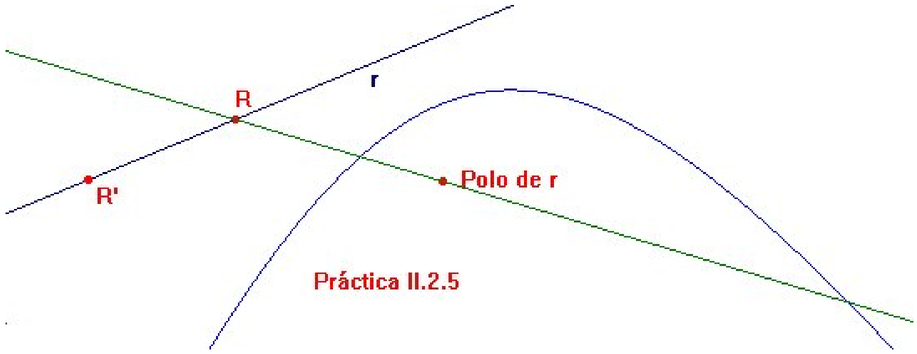


Enunciado Siendo una recta r exterior o secante a la cónica $\mathcal{C}$, escríbase una macro que halle el transformado P' de un punto P por la involución $\sigma : r \to r$ que aplica cada punto en su conjugado respecto de $\mathcal{C}$.

Indicaciones No se precisan indicaciones.

Práctica II.2.5

Involución inducida en un haz por una cónica

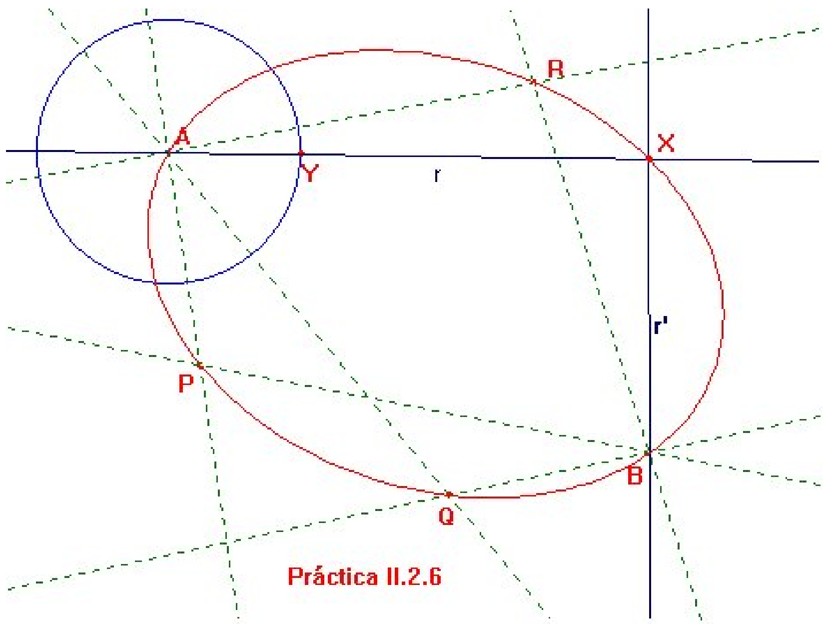


Enunciado Siendo R un punto por el que no pasa la cónica $\mathcal{C}$, escríbase una macro que trace la transformada r' de una recta r por la involución $\sigma : R^* \to R^*$ que aplica cada recta en su conjugada respecto de $\mathcal{C}$.

Indicaciones Tampoco se precisan indicaciones, aunque sí de un punto adicional $R' \in r$ que afea la macro.

Práctica II.2.6

Cónica definida por una proyectividad entre haces



Enunciado Usando el teorema II.2.7, trácese la cónica que pasa por cinco puntos dados A, B, P, Q y R. Se prohíbe recurrir a la herramienta *Cónica*.

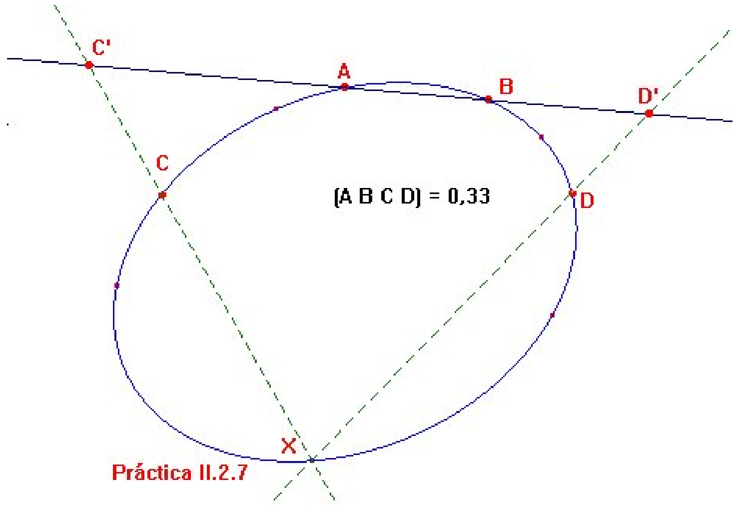
Indicaciones Según el teorema citado, la cónica será el lugar geométrico de los puntos $X = r \cap \sigma(r)$, con σ la proyectividad entre los haces A^* y B^* que transforma $\overline{AP}$ en $\overline{BP}$, $\overline{AQ}$ en $\overline{BQ}$, y $\overline{AR}$ en $\overline{BR}$. Esto invita a hechar mano de la macro de la práctica I.4.9.

Ahora bien, la herramienta *Lugar* de CABRI requiere que el segundo objeto sea un punto ligado a otro objeto. Aquí se ha resuelto esta pega colocando un punto Y sobre una circunferencia centrada en A. La macro dibuja la imagen $r' = \sigma(r)$ de la recta $r = \overline{AY}$, y la cónica será entonces el *lugar* de X variando Y.

Una solución dinámica también puede obtenerse combinando las herramientas *Traza* y *Animación*.

Práctica II.2.7

Razón doble de cuatro puntos sobre una cónica

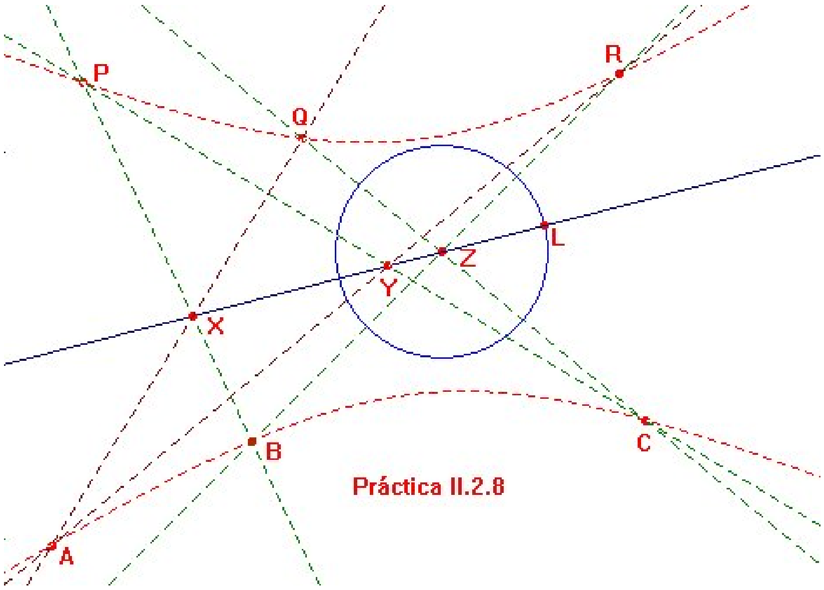


Enunciado Redáctese una macro que dé la razón doble de cuatro puntos sobre una cónica.

Indicaciones Usando el teorema de Steiner (teorema II.2.8), la razón doble buscada será la misma que la de un lápiz inscrito en la cónica. Aquí se ha tomado como punto base del lápiz alguno de los que definen la cónica. El problema se reduce ahora a combinar el teorema I.4.5 con la macro de la práctica I.4.5.

Práctica II.2.8

Trazado de una cónica por el teorema de Pascal

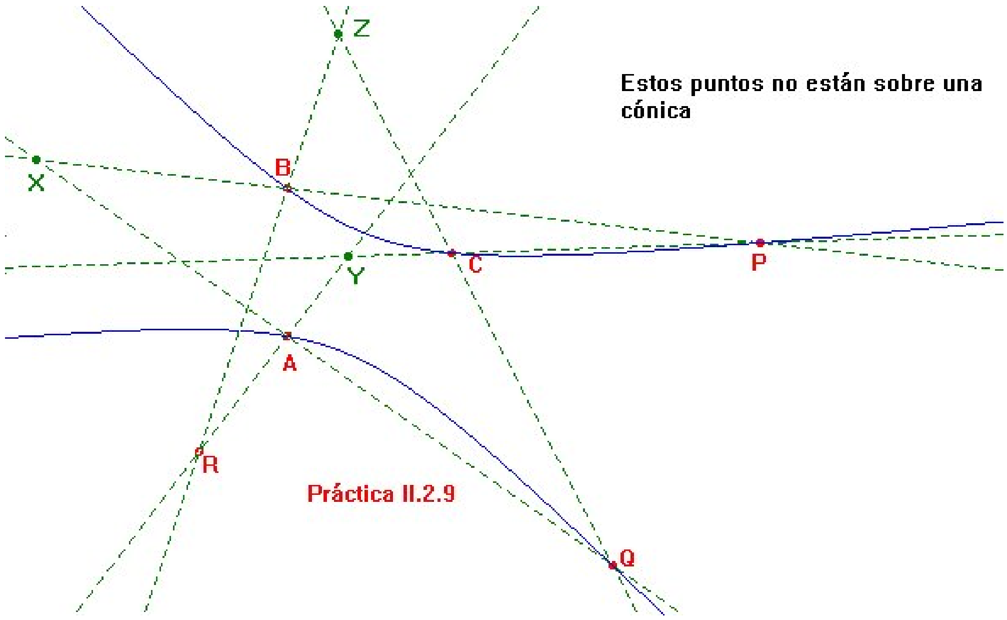


Enunciado Usando el recíproco del teorema de Pascal (teorema II.2.10, trácese la cónica que pasa por cinco puntos dados B, C, P, Q y R. Se prohíbe recurrir a la herramienta *Cónica*.

Indicaciones El teorema mencionado permite trazar un punto A de la cónica por cada recta r que pase por $Z = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$. Ahora se podrá *animar* la recta r con la *traza* del punto A activada, o bien proceder como se sugirió en la práctica II.2.6, esto es, haciendo $r = \overline{ZL}$ con L un punto sobre una circunferencia centrada en Z. Si se obra de esta última forma, el lugar geométrico de los puntos A, variando L sobre la circunferencia, será la cónica buscada.

Práctica II.2.9

Pertenencia de un punto a una cónica

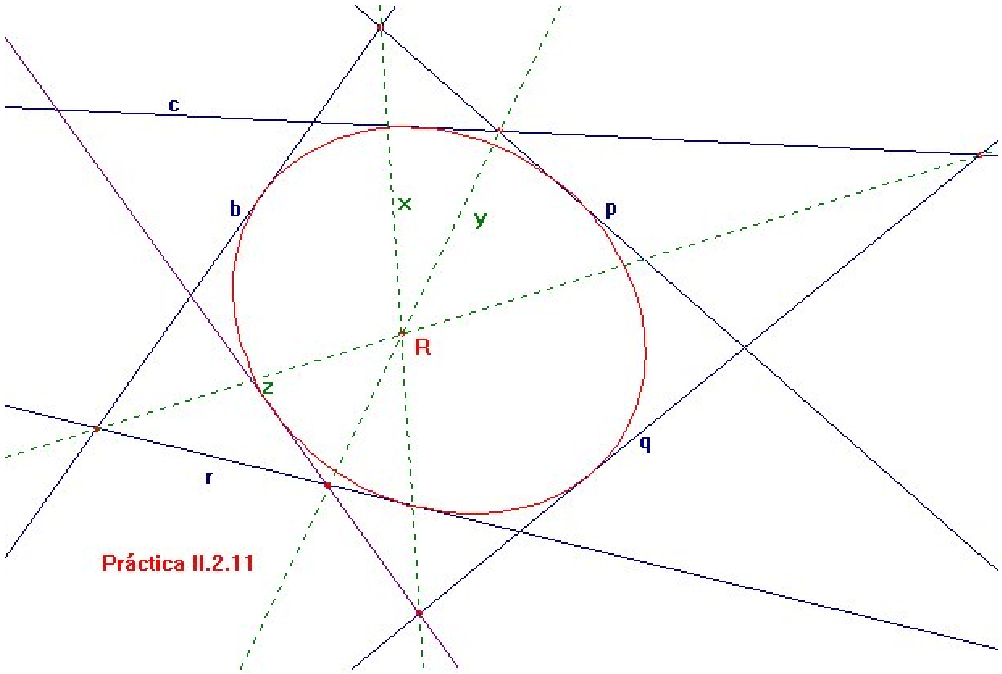


Enunciado Sin recurrir a la herramienta *Cónica*, escríbase una macro que dictamine si seis puntos dados A, B, C, P, Q y R pertenecen a alguna cónica (distinta a la que llena el plano, claro).

Indicaciones La acción combinada del teorema de Pascal y su recíproco (teoremas II.2.9 y II.2.10) permite afirmar que los seis puntos están sobre una cónica si y solo si los puntos $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$, $Y = \overline{AR} \cap \overline{CP}$ y $Z = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$ son colineales. Por medio de la herramienta *Redefinir objeto* pueden alterarse los dos textos de salida de la propiedad *Alineados?* Es una lástima que estas modificaciones no perduren en la macro y solo persistan en el fichero original.

Práctica II.2.10

Trazado de una cónica por el teorema de Brianchon

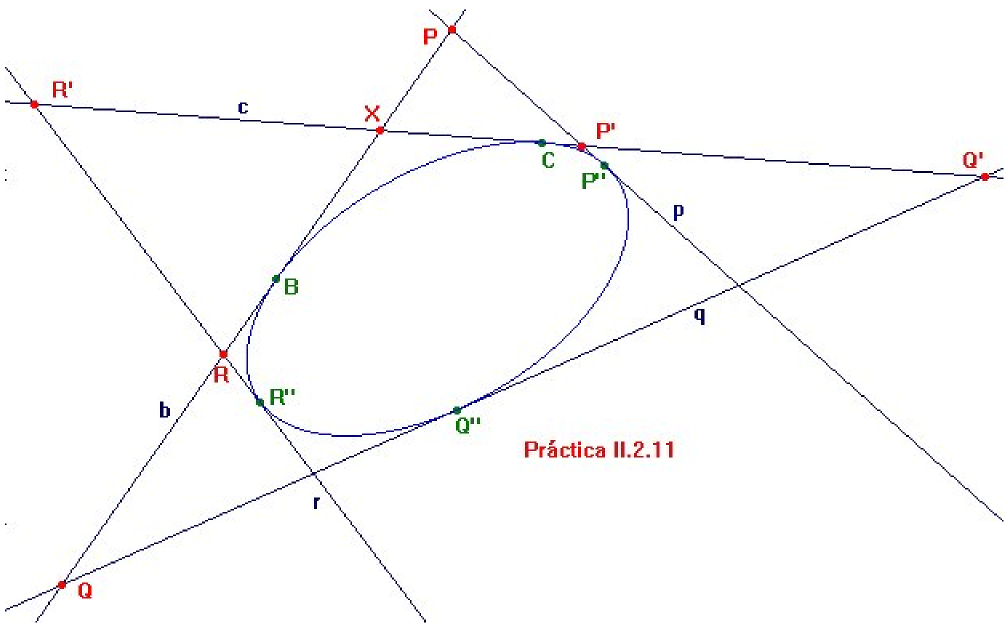


Enunciado Úsese el teorema de Brianchon (ejercicio II.2.10) para trazar la cónica tangente a cinco rectas dadas b, c, p, q y r.

Indicaciones Solo es preciso dualizar el método seguido en la práctica anterior. Se advierte que, en este caso, la herramienta *Lugar* puede aplicarse directamente a la recta a, variando el punto R sobre la recta $z = \overline{(b \cap r)(c \cap q)}$. Eso sí, si en las ediciones de CABRI anteriores a la II Plus el lugar geométrico dejaba bastante que desear, tampoco resulta muy aconsejable confiar en la última versión para el cálculo de los puntos de tangencia, dado el carácter aproximado de los lugares geométricos. Este problema será subsanado en la práctica siguiente.

Práctica II.2.11

Cónica tangente a cinco rectas



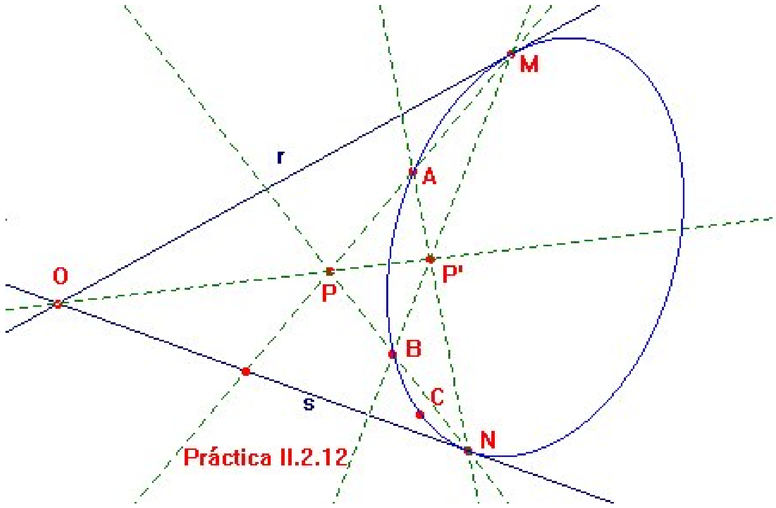
Enunciado Redáctese una macro que devuelva la cónica tangente a cinco rectas dadas b, c, p, q y r, más sus respectivos puntos de tangencia.

Indicaciones El problema está resuelto si se encuentran los puntos de tangencia. Una buena idea es la de repasar la solución al ejercicio II.2.4, donde se dualizaba el teorema II.2.7. Así, la cónica $\mathcal{C}$ buscada induce una proyectividad σ entre las rectas b y c tal que $\overline{Y\sigma(Y)}$ es tangente a $\mathcal{C}$ cualquiera que sea $Y \in b$. Es obvio que σ ha de transformar el punto $X = b \cap c$ en el punto de tangencia C de la recta c. Determinando σ, se podrá calcular C. Ahora es cuando intervienen el resto de tangentes. De la proyectividad se sabe que ha de aplicar $P = p \cap b$ en $P' = p \cap c$, $Q = q \cap b$ en $Q' = q \cap c$, y $R = r \cap b$ en $R' = r \cap c$. La macro de la práctica I.4.2 dará entonces el transformado C de X. A fin de no repetir cinco veces el razonamiento, el lector debería crear una macro provisional que, con objetos iniciales b, c, p,

q y r, devolviese el objeto final C. Aplicando sucesivamente esta macro a permutaciones circulares del conjunto de las cinco rectas que se dieron como datos, se hallarían el resto de puntos de tangencia B, P'', Q'' y R''.

Práctica II.2.12

Cónica por un punto y tangente a dos rectas

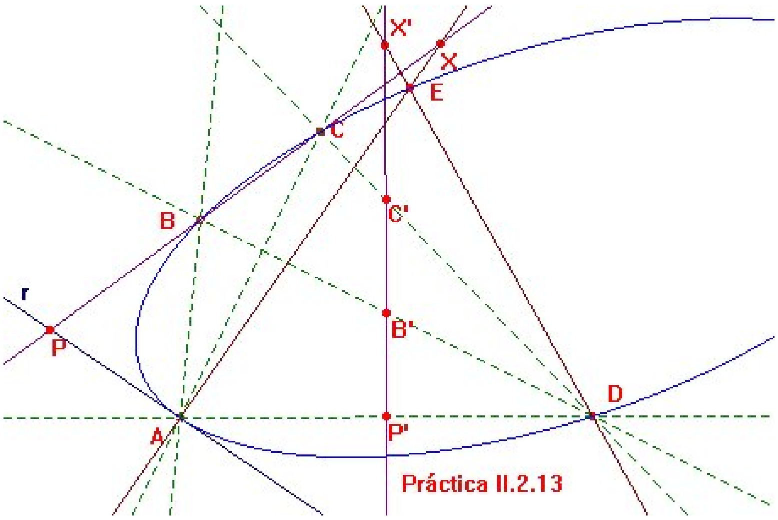


Enunciado Escríbase una macro que trace la cónica que pasa por un punto A y es tangente a dos rectas r y s en los respectivos puntos M y N.

Indicaciones El problema geométrico lo resuelve el ejercicio II.2.13. Para que los únicos objetos iniciales sean A, r, s, M y N, hay que automatizar la elección del punto P. Aquí se ha escogido como P el punto medio entre A y la intersección de $\overline{AM}$ con s. Otra dificultad es que a CABRI le hacen falta cinco puntos para trazar la cónica. Por eso interesa escribir una macro provisional que devuelva el punto B. Aplicando esta macro a B, r, s, M y N, se hallaría el quinto punto C necesario.

Práctica II.2.13

Cónica por tres puntos y tangente a una recta



Enunciado Como datos de una cónica $\mathcal{C}$ se dan tres de sus puntos B, C y D, y la tangente r en un cuarto punto A. Redáctese una macro que devuelva la cónica como objeto final.

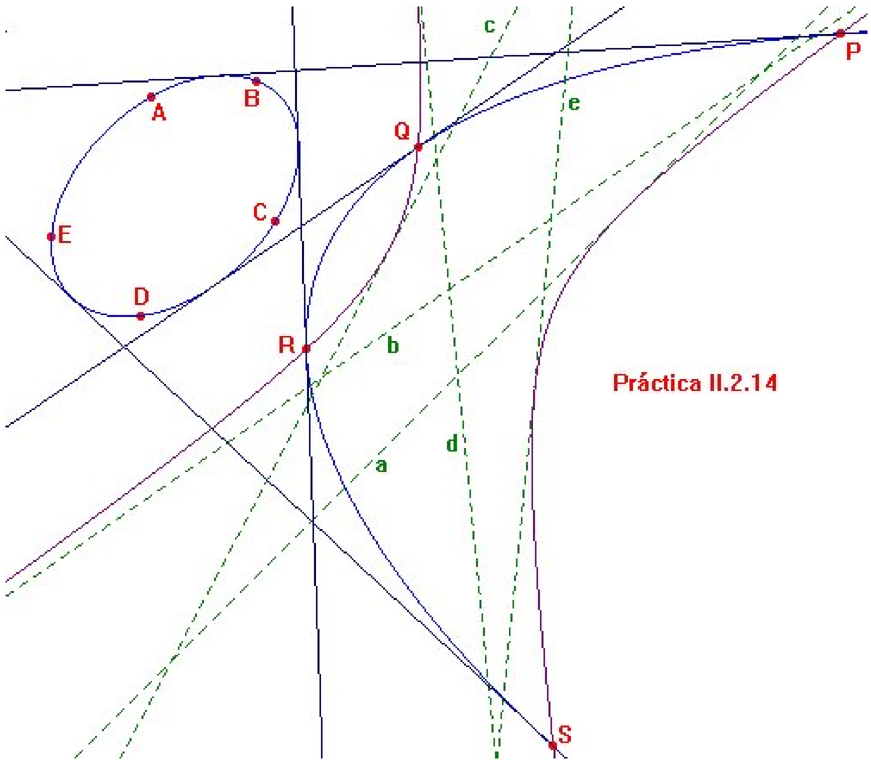
Indicaciones De nuevo la inspiración hay que buscarla en el teorema II.2.7. La cónica inducirá una proyectividad $\sigma : A^* \to D^*$ que transforma $\overline{AB}$ en $\overline{DB}$, $\overline{AC}$ en $\overline{DC}$ y $r = A^\perp$ en $\overline{DA}$. Bastará entonces con tomar otra recta r por A y hallar la intersección con su imagen para obtener un quinto punto E de $\mathcal{C}$. Para que esta elección sea automática y no provoque la necesidad de objetos iniciales innecesarios, aquí se ha escogido $r = \overline{AX}$ con X el *simétrico* de B respecto de C, pero cualquier otra opción quizá serviría.

Eso sí, el hecho de que entre los datos de σ se encuentre la recta que atraviesa por los puntos base de los haces provoca que no funcione aquí la macro de la práctica I.4.9. Por eso se ha optado por desviar el problema hacia otra proyectividad τ entre la recta $\overline{BC}$ y la mediatriz t del segmento determinado por A y B. Haciendo $\tau(B) = B' = \overline{BD} \cap t$, $\tau(C) = C' = \overline{CD} \cap t$

y $\tau(P) = P' = \overline{AD} \cap t$, con $P = A^{\perp} \cap \overline{BC}$, se tendrá, aplicando la macro de la práctica I.4.2, que $\sigma(r) = \overline{DX'}$, donde $X' = \tau(X)$.

Práctica II.2.14

Tangentes comunes a dos cónicas



Enunciado Escríbase una macro que devuelva, con objetos iniciales dos cónicas, todas las tangentes comunes a ambas, más sus puntos de tangencia.

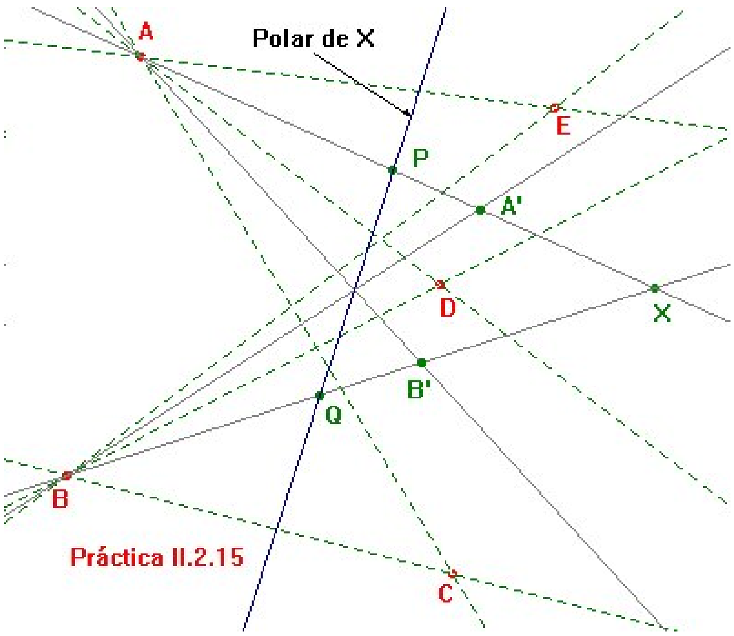
Indicaciones Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ las dos cónicas que se dan como datos. Si el lector ha resuelto el ejercicio II.2.22, sospechará que el problema estaría casi solventado si se traza la cónica $\mathcal{C}_3$ tal que las polares de sus puntos respecto de $\mathcal{C}_2$ son tangentes a $\mathcal{C}_1$. En efecto, si $P \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$, entonces la tangente a $\mathcal{C}_2$ por P es tangente también a $\mathcal{C}_1$. Existe entonces una tangente común por cada intersección de $\mathcal{C}_3$ con $\mathcal{C}_2$. Si hay cinco o más de estos puntos de corte es que las tres cónicas deben de coincidir (¿por qué?) Por tanto, salvo en este caso trivial, las cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ pueden compartir 0, 1, 2, 3 ó 4 tangentes.

Como sugerencia adicional para la construcción de $\mathcal{C}_3$ se dirá que basta con usar inteligentemente las macros de las prácticas II.2.1 y II.2.11. Las de las prácticas II.2.2 y II.2.3 serán útiles para la redacción de la macro buscada.

Experimente el lector con distintas posiciones relativas entre las dos cónicas para visualizar que se dan las cinco circunstancias posibles, desde que haya 4 tangentes comunes, hasta que no exista ninguna.

Práctica II.2.15

Polar de un punto sin trazar la cónica



Enunciado Sin trazar la cónica que pasa por cinco puntos A, B, C, D y E, hállese la polar de otro punto X.

Indicaciones La recta $\overline{AX}$ debería cortar a la cónica en algún punto A', que el lector sabrá calcular si ha completado la práctica II.2.6. El teorema II.2.6 asegura que el cuarto armónico P de la terna (A, A', X) ha de pertenecer a $P^{\perp}$. Este punto P es trazable mediante la macro de la práctica I.4.8. Un procedimiento análogo desembocará en la construcción de otro punto Q de la polar de P.