MATEMÁTICAS FINANCIERAS

LECCIÓN 2: Leyes financieras clásicas

1.- Introducción.

El número de expresiones matemáticas que podrían ser leyes financieras, por cumplir las propiedades expuestas anteriormente, es muy numeroso. De todas ellas las más utilizadas son las denominadas leyes financieras clásicas.

A continuación estudiaremos cinco leyes clásicas, dos de ellas de capitalización y tres de descuento:

- Capitalización simple
- Capitalización compuesta
- Descuento simple comercial
- Descuento simple racional
- Descuento compuesto

2.- Ley de capitalización simple. Tantos equivalentes. El descuento racional o matemático como conjugado de la capitalización simple. El descuento comercial simple.

Ley de Capitalización Simple

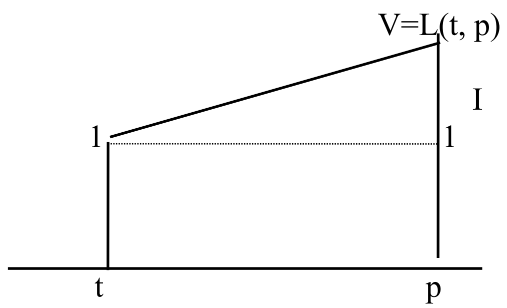
Es aquella en la que los intereses de un periodo cualquiera son proporcionales al capital invertido C_0 y a la duración del periodo, es decir no se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses.

$$I_n = C_0\, n\, i$$

- **i** = tanto;
- **n** = mide el tiempo durante el cual se está capitalizando la cuantía C.

Es importante tener en cuenta que n e i han de ser magnitudes homogéneas.

La característica principal es que los *intereses no son productivos.* Normalmente, se emplea para operaciones a corto plazo (duración menor o igual a 18 meses).



Se denomina <u>montante</u> al capital equivalente en n a las C unidades monetarias del momento inicial.

La cuantía C_n para un capital inicial de C_0 se obtiene:

$$C_n = C_0 + I_n = C_0 + C_0\, n\, i = C_0\,(1 + n\, i)$$

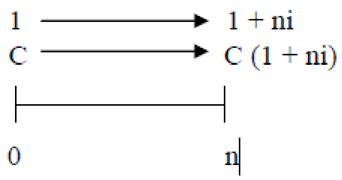
Asimismo, se puede obtener el interés como: $I = C_n - C_0$

definiéndose como el incremento que experimenta el capital de cuantía C al colocarlo durante n períodos de tiempo al interés i.

La **expresión matemática** abreviada de la capitalización simple es:

$$L\,(n) = (1 + n\, i) \qquad \text{con } i > 0$$

El esquema gráfico:



Definición de Tanto Equivalente:

Dos tantos **i** e $\mathbf{i_m}$ referidos a distintas unidades de tiempo son equivalentes cuando aplicados al mismo capital inicial durante el mismo periodo de tiempo producen el mismo capital final o montante.

Sea:

i: Tanto de interés anual.

$\mathbf{i_m}$**:** Tanto de interés de un subperiodo **m** del año (**m** = frecuencia de fraccionamiento)

Se cumple: $(1 + i) = (1 + i_m\, m) \rightarrow$ despejando, $i = m\, i_m$; $i_m = i/m$

Ley de Descuento

Operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento presente. Es una operación inversa a la de capitalización.

En una operación de descuento el punto de partida es un capital futuro conocido (Cn) cuyo vencimiento se quiere adelantar. Deberemos conocer las condiciones en las que se quiere hacer esta anticipación: duración de la operación (tiempo que se anticipa el capital futuro) y tanto de la operación, que podrá ser tanto de interés o tanto de descuento, y en función de esto tendremos el descuento racional o el comercial.

El capital que resulte de la operación de descuento (capital actual o presente –C0–) será de cuantía menor, siendo la diferencia entre ambos capitales los intereses que el capital futuro deja de tener por anticipar su vencimiento. En definitiva, si trasladar un capital desde el presente al futuro implica añadirle intereses, hacer la operación inversa, anticipar su vencimiento, supondrá la minoración de esa misma carga financiera.

El capital presente (Co) es inferior al capital futuro (Cn), y la diferencia entre ambos es lo que se denomina descuento (D), en el caso en que se aplique un tanto de descuento (d), que se aplica al Capital Final (Cn), ó interés (I), en el caso en que se aplique el tipo de interés (i), que se aplica sobre el capital inicial. Se cumple la siguiente expresión:

D = Cn – Co   I = Cn – Co

El descuento no es más que una *disminución de intereses* que experimenta un capital futuro como consecuencia de adelantar su vencimiento, por lo tanto se calcula como el interés total de un intervalo de tiempo (el que se anticipe el capital futuro). Se cumple:

D = Capital x Tipo x Tiempo

Ley de Descuento Simple Racional

Se define como la recíproca o conjugada, o ley inversa de la ley de capitalización simple.

Para calcular el capital inicial de C_n despejamos→ $C_0 = C_n \frac{1}{1+in}$

Ley de Descuento Simple Comercial

Es aquella en la que los descuentos de un periodo son proporcionales a la duración del periodo y al capital anticipado o descontado.

$D_n = Cn * d * n$

Para un capital inicial de C_n tenemos $C_0 = C_n - D = C_n - C_n dn = C_n(1 - dn)$

Se denomina valor descontado o efectivo al capital equivalente en el momento inicial.

Equivalencia entre el Descuento Racional (i) y el Descuento Comercial (d)

$$D_C = C_n nd = C_n \frac{in}{1+in} = D_R \Rightarrow \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{i}{1+in} \\ i = \dfrac{d}{1-dn} \end{array} \right|$$

$$D_R = C_n - C_0 = C_0 in \rightarrow pero\, con\, C_0\, no\, puedo\, comparar, luego\, susituyo\, C_0 = C_n \frac{1}{1+in}$$

3.- Capitalización compuesta.

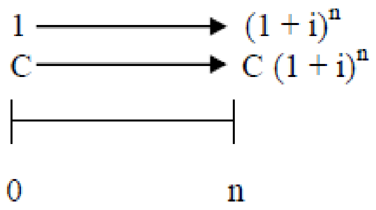
Ley de Capitalización Compuesta

Es aquella en la que los intereses producidos en cada periodo se acumulan al capital para que la suma de ambos produzca intereses en el periodo siguiente, es decir tiene lugar la capitalización periódica de los intereses.

$$L(t,p) = (1+i)^{p-t} \rightarrow \text{si p - t = n} \Rightarrow L(0,n) = (1+i)^n$$

Una u.m. desplazada n períodos a la derecha en el tiempo se transforma en $(1+i)^n$ unidades monetarias. Para un capital inicial de C_0 tenemos $C_n = C_0(1+i)^n$

Gráficamente:



El incremento que experimenta C al estar colocado durante n períodos se denomina interés. Su cuantía se obtiene:

$$I = C_n - C_0 = [C_0 (1 + i)^n] - C_0$$

4.- Tantos equivalentes. Tanto nominal y tanto efectivo. El descuento compuesto como conjugado de la capitalización compuesta.

Tantos Equivalentes en Capitalización Compuesta

Sea:
i: Tanto de interés anual.
i_m: Tanto de interés de un subperiodo **m** del año.
n: número de años.

Se cumple:

$$(1+i)^n = (1+i_m)^{n\,m} \rightarrow (1+i) = (1+i_m)^m$$

Por lo que, conocida una magnitud se puede conocer la otra:

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \rightarrow \text{ Tanto fraccionado}$$

$$i = (1+i_m)^m - 1 \rightarrow \textit{Tanto anual equivalente T.A.E.}$$

$$i = (1+i_m)^m - 1 \rightarrow \textit{Tanto anual equivalente T.A.E.}$$

Se denomina *tanto nominal* de frecuencia m y se denota como j_m al que se obtiene de la siguiente forma:

$$j_m = i_m\, m \rightarrow i_m = j_m / m$$

La expresión que nos relaciona estos tantos es:

$$(1+i) = (1+i_m)^m = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m$$

También podemos encontrarnos con tantos de interés superior al año: i^k. En este caso:

$$(1+i) = (1+i^k)^{1/k} \rightarrow \quad i^k = (1+i)^k - 1 \rightarrow \textit{Tanto Superior}$$

Ley de Descuento Compuesto

Es aquella en la que tiene lugar un descuento periódico del capital. Es inversa a la de capitalización compuesta, y toma la forma:

$$C_0 = C_n(1+i)^{-n}$$

<u>5.- Comparación entre capitalización simple y compuesta.</u>

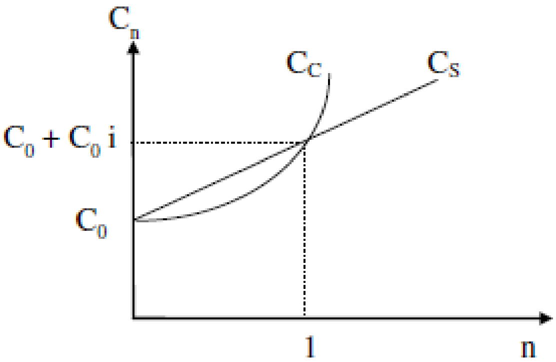
Los montantes obtenidos en las dos leyes tienen las expresiones ya conocidas:

SIMPLE → Cn = Cp (1+n i)

COMPUESTA → Cn = Co $(1+i)^n$

Si los representamos gráficamente para un mismo tanto de interés (i), obtenemos una función lineal para el sistema de capitalización simple (CS) y una función exponencial para el compuesto (CC):

Análisis Gráfico



de lo que se desprende que, según los valores de n, varía la situación. Así, para un mismo capital inicial de u.m. y un mismo i:

$0 < n < 1$ $(1+i)^n < (1+n\,i)$ Montante a interés compuesto < Montante a interés simple

$n = 1$ $(1+i)^n = (1+n\,i)$ Montante a interés compuesto = Montante a interés simple

$n > 1$ $(1+i)^n > (1+n\,i)$ Montante a interés compuesto > Montante a interés simple

Por consiguiente, para periodos menores de un año, la capitalización simple proporciona un mayor montante, a un mismo i; para n=1, es indiferente, y para periodos superiores al año, es la capitalización compuesta la que ofrece un mayor montante a un mismo tipo de interés.

Por otra parte, otra diferencia entre capitalización simple y compuesta es el denominado ***principio de división o escindibilidad***: el montante o cuantía final que genera una operación financiera es independiente de la escisión (división o separación) de dicha operación en un momento *s* del intervalo en que está definida. En este sentido, las operaciones financieras valoradas con una ley de capitalización compuesta verifican este principio (al acumularse los intereses al capital para producir nuevos intereses). En cambio, las operaciones valoradas con una ley de capitalización simple no lo verifican.

C_0 C_n

0 n

escindiendo tenemos:

C_0 C_t C_n'

0 t n

Capitalización Compuesta:

$C_0(1+i)^n = C_n$

$C_n' = C_0(1+i)^t(1+i)^{n-t} = C_t(1+i)^{n-t} = C_0(1+i)^n = C_n$

Capitalización Simple:

$C_0(1+in) = C_n$

$C_n' = C_0(1+it)[1+(n-t)i] = 1+ni+t(n-t)i^2 > (1+ni) = C_n$

En Simple los intereses se hacen productivos.

5.-Extra 1- Cálculo de la duración en capitalización compuesta

Conocidos los demás componentes de la operación: capital inicial, capital final y tipo de interés, basta con tener en cuenta la fórmula general de la capitalización compuesta y despejar la variable desconocida.

- Punto de partida:

$$C_n = C_0 \times (1 + i)^n$$

- Pasar el Co al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + i)^n$$

- Logaritmos a ambos miembros:

$$\log \frac{C_n}{C_0} = \log (1 + i)^n$$

- Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\log C_n - \log C_0 = n \times \log (1 + i)$$

- Despejar la duración:

$$\boxed{n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log (1 + i)}}$$

5.-Extra 2-. Descuento comercial compuesto.

En este caso se considera generador de los intereses de un período el capital al final de dicho período, utilizando el tipo de descuento (d) vigente en dicho período:

$$\boxed{C_0 = C_n \text{ x } (1 - d)^n}$$

Una vez calculado el capital inicial, por diferencia entre el capital de partida y el inicial obtenido, se obtendrá el interés total de la operación (Dc):

$$D_c = C_n - C_0 = C_n - C_n(1-d)^n = C_n\left[1-(1-d)^n\right]$$

Esto se puede hacer en descuento racional también.

6.- Suma financiera y capital unificado en descuento comercial: vencimiento común y vencimiento medio.

Dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2) son *financieramente equivalentes* respecto a una ley financiera si valorados en un mismo momento de tiempo, presentan la misma cuantía.

En capitalización simple:
Si el principio de equivalencia se cumple en un momento de tiempo concreto, no tiene por qué cumplirse en otro momento cualquiera (siendo lo normal que no se cumpla en ningún otro momento). Consecuencia de esta circunstancia será que la elección de la fecha donde se haga el estudio comparativo afectará y condicionará el resultado.

Vencimiento medio: este vencimiento, que tratamos de determinar, se produce cuando el conjunto de capitales es financieramente equivalente a la suma aritmética de los mismos y, por consiguiente, es la media de los vencimientos, ponderada por los respectivos capitales.

Vencimiento común: el planteamiento es análogo al vencimiento medio, sólo que ahora nuestra incógnita es el capital y no el vencimiento que es conocido.