MATEMÁTICAS FINANCIERAS

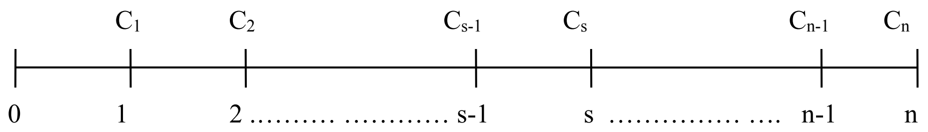
LECCIÓN 4: Valoración de rentas financieras.

1. Introducción.

Las rentas no son operaciones financieras propiamente dichas. No realizaremos consideraciones de tipo económico o jurídico respecto a la naturaleza de los capitales. Sólo recogeremos los aspectos formales y cuantitativos para poder realizar su valoración financiera.

2. Concepto y clasificación de las rentas.

Una renta es una sucesión de capitales financieros disponibles en diferentes periodos de tiempo. El objetivo es obtener un capital que resulte equivalente financieramente, en un momento determinado, a la suma financiera de los términos de una renta. El gráfico de una renta sería:



Para el análisis de una renta, se suele asociar cada capital financiero, no sólo a un instante de tiempo concreto, tal y como se refleja en este gráfico, sino también a un intervalo temporal. Así, C_1 se asocia al primer intervalo que comprende desde el instante 0 al 1; C_2 al intervalo comprendido entre el 1 y el 2, y así sucesivamente. Sin embargo, a efectos prácticos, siempre consideraremos cada capital financiero disponible en un instante de tiempo concreto.

¿Cuáles son los **elementos de una renta**?:

- **Términos** de la renta: cuantías de los capitales financieros que la componen.
- **Periodos** de maduración: amplitud de los intervalos de tiempo a los que están asociados los términos de una renta.
- **Origen**: extremo inferior del primer intervalo temporal que compone la renta.
- **Final**: extremo superior del último intervalo temporal que constituye la renta.
- **Duración**: tiempo que transcurre desde que se inicia la renta, el origen, hasta que finaliza la misma, el final: (0, n).

Las rentas se **clasifican** atendiendo a los siguientes criterios:

1. Ley Financiera que las valora	Capitalización y Descuento Simple.	
	Capitalización y Descuento Compuesto.	
2. Amplitud de los intervalos	Discretas (amplitud finita)	Periódicas (amplitud constante) No periódicas (lo contrario)
	Continuas (amplitud infinitesimal, el intervalo temporal tiende a cero)	
3. Aleatoriedad capitales	Ciertas	Cuantías y Vencimientos ciertos
	Aleatorias	Alguno aleatorio
4. Cuantía de los capitales	Constantes (capitales con misma cuantía)	Por tanto: $C_1=C_2=...=C_n=C$
	Variables (capitales con cuantía variable)	Si siguen un patrón de variación: Progresión aritmética Progresión geométrica
5. Vencimiento del capital en el intervalo	Prepagables: cuantías de los capitales coinciden con el límite inferior de cada intervalo.	$t_0, t_1, ..., t_{n-1}$
	Pospagables: capitales vencen en el límite superior de cada intervalo.	$t_1, t_2, ..., t_n$
6. Duración de la renta	Temporales	Número finito de términos
	Perpetuas	Infinitos términos, no tiene final
7. Punto de valoración	Inmediatas: se valoran en cualquier instante *α* dentro de su duración.	$\alpha \in [t_0, t_n]$
	Diferidas: se valoran en un instante *d* anterior al origen de la renta.	$d < t_0$
	Anticipadas: se valoran en un momento *h* posterior al final de la renta.	$h > t_n$
8. Periodicidad	Anuales / Fraccionadas (capitales vencen con periodicidad inferior al año) / Hiperanuales (periodicidad del vencimiento de los capitales es superior al año).	

El objetivo principal de esta lección es valorar las rentas financieras, es decir, vamos a aprender a buscar un capital financiero (C, t) que sea equivalente al conjunto de capitales que componen la renta. Los instantes de valoración más usuales son el inicio, obteniendo el **valor actual o inicial**, y el final de la renta, dando lugar al **valor final**.

Teniendo en cuenta lo expresado en el párrafo anterior y la clasificación dada, la valoración que vamos a realizar de las rentas va a ser, siempre que sea posible, el **valor actual de la renta pospagable**. Por supuesto, cuando nos interese valorar la renta en cualquier otro instante, sólo tendremos que trasladar dicho valor actual de la renta, como cualquier otro capital financiero, a otro instante, tal y como hemos aprendido en la primera lección.
Por tanto, siempre que exista la renta:

- La relación que hay **entre un valor final, V_n, y un valor actual, V_0**, es:
$$V_n = V_0 \cdot (1+i)^n$$

- Las **rentas diferidas** siempre se obtendrán:
$$Valoración_{renta\ diferida\ en\ d} = V_0 \cdot (1+i)^{-d}$$

- Y en el caso de las **rentas anticipadas**:
$$Valoración_{renta\ anticipada\ en\ h} = V_n \cdot (1+i)^h = V_0 \cdot (1+i)^{h+n}$$

- Por último, **cualquier renta prepagable $(\ddot{V}_0, \ddot{V}_n)$** siempre se podrá obtener **a partir de su correspondiente pospagable**, sin más que multiplicar por *"el factor de conversión"* (1+i):
$\ddot{V}_0 = (1+i) \cdot V_0$ o también $\ddot{V}_n = (1+i) \cdot V_n$

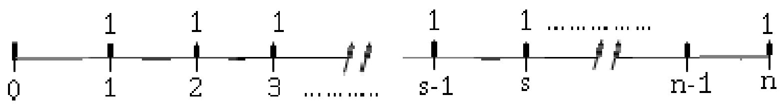
Por otra parte, en esta lección vamos a estudiar las rentas valoradas con leyes compuestas, y más concretamente con la ley de **capitalización compuesta**, $(1+i)^n$, y **descuento compuesto**, $(1+i)^{-n}$, por ser las rentas más comunes.

3. Rentas constantes.

La renta constante es aquella que está compuesta por n capitales de igual cuantía, disponibles en periodos de tiempo consecutivos.

3.1.- Rentas Inmediatas y Temporales.

Características: renta temporal, pospagable, inmediata y de cuantía unitaria



Valor Actual

El valor actual de esta renta se representa mediante el símbolo $a_{\overline{n}|i}$, donde n es el número de términos de la renta, e i es el tipo de interés efectivo del periodo con el que valoramos la renta. El valor actual se obtiene actualizando los términos de la renta al origen:

$$a_{\overline{n}|i} = 1 \cdot (1+i)^{-1} + 1 \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + 1 \cdot (1+i)^{-n} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s}$$

Como podemos observar, los términos de esta suma siguen una progresión geométrica de razón $q = (1+i)^{-1}$, por lo que haciendo uso de la expresión que define dicha suma:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}$$

aplicada a nuestro caso, tendremos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

Sacamos factor común en el numerador y operamos en el denominador:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{-1} \cdot [1-(1+i)^{-n}]}{1-\frac{1}{(1+i)}} = \frac{(1+i)^{-1} \cdot [1-(1+i)^{-n}]}{\frac{i}{(1+i)}}$$

Por tanto, si simplificamos:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Obtenido el valor actual de una renta unitaria, se puede determinar el valor actual de la correspondiente renta constante de cuantía C, multiplicando dicha cuantía por el valor actual de la renta unitaria:

$$V_0 = A(C)_{\overline{n}|i} = C \cdot a_{\overline{n}|i} = C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

En realidad, a partir de esta expresión obtenida, el valor actual de una renta constante, temporal y pospagable, podremos deducir cualquier otro valor.

Valor final

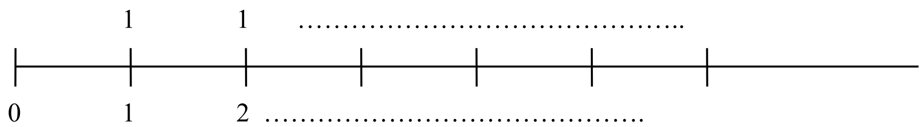
$$V_n = V_0 \cdot (1+i)^n$$

O también:

$$V_n = S(C)_{\overline{n}|i} = C \cdot s_{\overline{n}|i} = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

3.2.- Rentas Inmediatas y Perpetuas.

Características: renta pospagable, inmediata, de cuantía unitaria y perpetua



Valor actual

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

En las rentas perpetuas no tienen sentido los valores finales (por tanto, tampoco una renta anticipada).

Cuando la renta no sea unitaria pero sí constante y de cuantía C, su valoración será el resultado de multiplicar C por la correspondiente renta unitaria.

4. Rentas variables.

Definición: cuando los capitales financieros son variables en su cuantía y/o en su vencimiento.

Se pretenden obtener expresiones análogas a las deducidas para las Rentas Constantes, pero para ello necesitamos que se cumplan unas condiciones:

- Las cuantías han de seguir una ley de variabilidad conocida.
- El tipo de interés se tiene que mantener constante.
- Han de ser rentas periódicas, es decir, la amplitud de los intervalos también son constantes.

¿Qué ocurre con las Rentas Variables sin criterio o ley de variabilidad**?** Pueden ser:

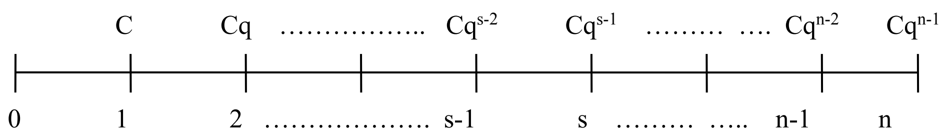
- Variables en cuantía y periodos: se estudiarán con un Ejercicio de clase, el primero de la Relación de Rentas Variables y Fraccionadas.
- Variables en cuantías y tipos de interés: no se van a estudiar.

Rentas variables en progresión geométrica.

Dentro de las rentas financieras variables que siguen una ley de variabilidad, las más frecuentes son las que cambian a partir de una progresión geométrica. ¿Qué características tienen**?**:

- Sus términos son el resultado de **multiplicar** el anterior por una cantidad, la razón de la progresión geométrica, *q*: $C_s = C_{s-1}\cdot q$, sabiendo que $q > 0$ (si $q > 1$, la renta es creciente; y si $q < 1$, decreciente).
- Son las más habituales: se pacta un incremento/decremento del capital en un **tanto por ciento** determinado.

4.1.- Rentas Inmediatas y Temporales.



Valor Actual:

$$A_{(c,q)\,\overline{n|}\,i} = C(1+i)^{-1} + Cq(1+i)^{-2} + \cdots + Cq^{n-1}(1+i)^{-n} = \sum_{s=1}^{n} Cq^{s-1}(1+i)^{-s} = P.G.\,de\,razón\; q(1+i)^{-1} =$$

$$= \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{C(1+i)^{-1} - Cq^{n-1}(1+i)^{-n}\, q(1+i)^{-1}}{1-q(1+i)^{-1}} \Rightarrow A_{(c,q)\,\overline{n|}\,i} = C\frac{1-q^{n}(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Cuando $q = (1+i)$, se anularía el denominador; para evitarlo, se utiliza la expresión siguiente:

$$\textbf{Valor Actual:} \quad A_{(c,(1+i))\,\overline{n|}\,i} = Cn(1+i)^{-1}$$

4.2.- Rentas Inmediatas y Perpetuas.

Para el caso de las perpetuas, sólo podemos sumar una perpetua variable en progresión geométrica cuando la razón *q* sea menor que (1+i), en cuyo caso se obtiene:

$$A_{(c,q)\,\overline{\infty|}\,i} = \frac{C}{1+i-q}$$

Rentas variables en progresión aritmética

Sus características son:

- Sus términos son el resultado de **sumar** al anterior una cantidad constante, la diferencia de la progresión aritmética, *d*: $C_s = C_{s-1} + d$, sabiendo que si $d > 0$, la renta es creciente; y si $d < 0$, decreciente.
- Los incrementos o decrementos del término son **valores absolutos**.

La cuantía de sus términos son de la forma:

$C_1 = C$; $C_2 = C + d$; $C_3 = C + 2d$; **...** $C_n = C + (n-1)d$; con $\mathbf{C_s > 0}$.

4.3.- Rentas Inmediatas y Temporales.

C C+d C+(s-2)d …. C+(s-1)d …… …C+(n-2)d C+(n-1)d

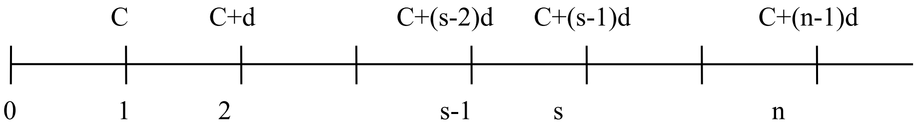
0 1 2 ……………… s-1 s …………….. n-1 n

Valor Actual:

Aunque se utilizan varias expresiones, la más usual es:

$$A_{(C,d)\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i} + dn\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i}$$

4.4.- Rentas Inmediatas y Perpetuas.



Valor Actual:

$$A_{(C,d)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i}(1+i)^{-n}\right] = \left(C + \frac{d}{i}\right)\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} - \frac{d}{i}\lim_{n\to\infty} n(1+i)^{-n} = \left(C + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$$

5. Rentas fraccionadas.

Las rentas fraccionadas son aquellas rentas en las que las variables que las caracterizan no están expresadas en la misma unidad de tiempo. Solucionar este fraccionamiento de las rentas va a consistir en convertir sus variables a la misma unidad de tiempo.

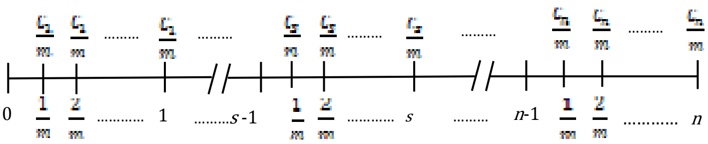
Rentas constantes

Son las más fáciles de solucionar su fraccionamiento ya que solo tienen tres variables que compatibilizar, es decir, referir a la misma unidad temporal:

- C: cuantía del capital.
- n: número de periodo.
- i: tipo de interés.

Si las cuantías de los términos de las rentas no fraccionadas **(C_s)**, se sustituyen por **m** subcuantías **(C_s/m)** y cada periodo se divide en **m** subperiodos; y se hace corresponder el vencimiento de cada **m-ésima** subcuantía con cada **m-ésimo** subperiodo, se obtiene la denominada **Renta Fraccionada** de frecuencia **m**. Si la renta no fraccionada es de **n** términos, la **Renta Fraccionada** es de **n**x**m** términos.

Por consiguiente, el gráfico de una renta fraccionada de frecuencia ***m***, vista en su conjunto, sería:



donde sólo se han presentado los términos correspondientes al primer periodo, a un periodo genérico *s* y al último periodo.

El fraccionamiento que estudiaremos es el uniforme, es decir, las cuantías y los periodos se fraccionan en partes iguales. A partir de ahora vamos a obtener la valoración de estas rentas con fraccionamientos uniformes y de cuantía constante, siendo, en todo caso, de aplicación las expresiones generales de valoración de la lección anterior.

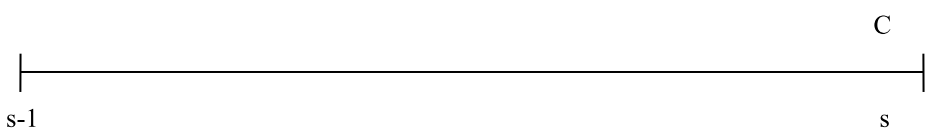
Vamos a valorar las rentas **fraccionadas** a partir de las rentas **sin fraccionar** de las que proceden y viceversa. Es decir, se nos pueden plantear dos problemas:

- ✓ Obtener una renta sin fraccionar (anual) de cuantía **C** financieramente equivalente a la renta fraccionada.
- ✓ Obtener una renta fraccionada de cuantía $\mathbf{C_m}$ financieramente equivalente a la renta sin fraccionar.

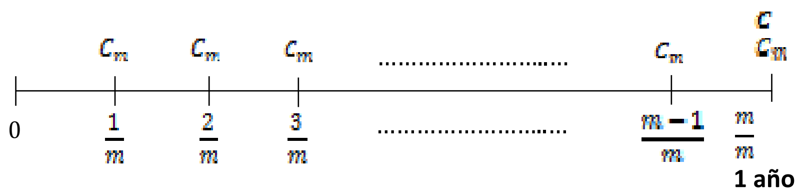
<u>Pospagables.</u>

Veamos el comportamiento de las rentas fraccionadas constantes en el caso pospagable, cuando realizamos un fraccionamiento uniforme, **m,** tanto de las cuantías, **C**, en **m** subcuantías, $\mathbf{C_m}$, como de los periodos en **m** subperiodos de amplitud **1/m**.

El periodo **(s-1, s)** de una renta pospagable sin fraccionar es:



Si la fraccionamos en **m** subperiodos, suponiendo que dicho periodo sea un año, tenemos:



Haciendo una serie de transformaciones, se obtiene la relación de equivalencia entre las cuantías de los capitales en una renta fraccionada:

$$\boxed{\frac{C}{i} = \frac{C_m}{i_m}}$$

Lo anterior lo podemos extender a Rentas Hiperanuales, donde la cuantía hiperanual sería la equivalente a la anual y la cuantía anual la equivalente a la subcuantía del subperiodo, a partir de:

$$\frac{C}{i} = \frac{C_m}{i_m} = \frac{C^k}{i^k}$$

<u>Prepagable</u>

$$\boxed{\frac{C}{i}(1+i)=\frac{C_m}{i_m}(1+i_m)}$$

que nos permite conocer cualquier magnitud conocidas las demás.

Generalizando a Rentas Hiperanuales, donde la cuantía hiperanual sería la equivalente a la anual y la cuantía anual la equivalente a la subcuantía del subperiodo, a partir de:

$$\boxed{\frac{C}{i}(1+i)=\frac{C_m}{i_m}(1+i_m)=\frac{C^k}{i^k}(1+i^k)}$$

En rentas pospagables (prepagables) el valor financiero **(C')** de la renta fraccionada es mayor (menor) que el de la renta sin fraccionar **(C)**.

C' > C (pospagable)

C' < C (prepagable)

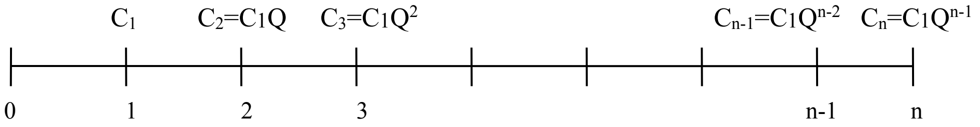
Rentas variables

Tienen sentido cuando una cuantía anual $\mathbf{C_j}$, se quiere fraccionar en **m** cuantías constantes $\mathbf{c_{jm}}$ o viceversa, variando estas cuantías de un año a otro según la razón.

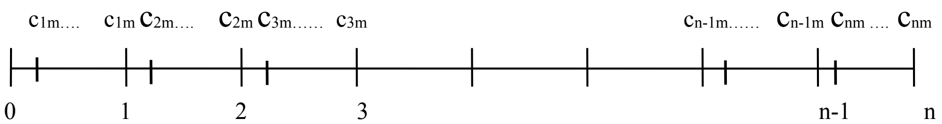
Rentas Variables en Progresión Geométrica.

Ya no es tan sencillo solucionar su fraccionamiento puesto que, además de las tres variables (C, n, i), aparece una más para hacerla compatible a la misma unidad temporal, la ***q***, la razón de la progresión. Con una particularidad: en este tipo de rentas **conviene siempre convertir las variables a la misma unidad de tiempo con la que se incrementa/decrementa la renta (**aunque esto tiene una excepción: cuando la frecuencia de la renta sea superior al año, una renta hiperanual, y, sin embargo, el incremento/decremento sea anual, siempre va a convenir, por razones de comodidad, convertir las variables de la renta a la unidad temporal en que se expresan los capitales. Lo ilustraremos con un ejercicio de clase**)**.

<u>Pospagables</u>



Si hacemos un fraccionamiento **m** tenemos:



con

$$c_{1m};\ c_{2m} = c_{1m}q; c_{3m} = c_{1m}q^{2};\cdots;c_{nm} = c_{1m}q^{n-1}$$

Y después de una serie de transformaciones, se llega a la siguiente conclusión:

$$\Rightarrow \boxed{q = Q} \text{ y en general } \boxed{\frac{C}{i} = \frac{c_{m}}{i_{m}}}$$

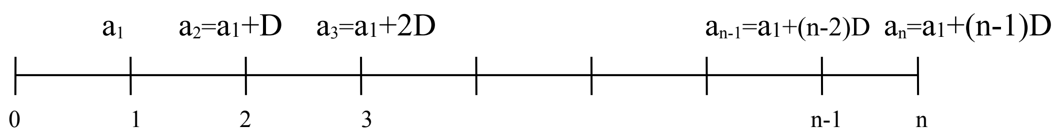
E igual en las prepagables

$$\Rightarrow \boxed{q = Q} \text{ y en general } \boxed{\frac{C}{i}(1+i) = \frac{c_{m}}{i_{m}}(1+i_{m})}$$

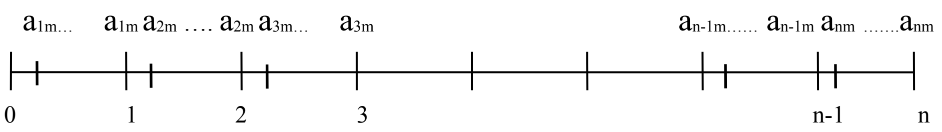
Rentas Variables en Progresión Aritmética.

Al igual que en las Geométricas, en las Fraccionadas Variables Aritméticas tenemos que compatibilizar cuatro variables. Ahora nuestra nueva variable es la diferencia, *d*. Aquí también hay que respetar la unidad de tiempo en el que viene expresada la diferencia convirtiendo, por tanto, el resto de variables. Por otra parte, en las Fraccionadas Aritméticas, también es muy importante saber **distinguir** entre **lo que se incrementa** (la mensualidad, trimestralidad, semestralidad, etc.) **y cada cuanto tiempo se incrementa** (anualmente, trienalmente, etc.).

<u>Pospagables</u>



Si hacemos un fraccionamiento **m** tenemos:



con

$$a_{1m};\ a_{2m} = a_{1m} + d; a_{3m} = a_{1m} + 2d;\cdots;a_{nm} = a_{1m} + (n-1)d$$

Obteniéndose la conclusión:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{i} = \frac{d_{m}}{i_{m}}} \text{ y en general } \boxed{\frac{C}{i} = \frac{c_{m}}{i_{m}}}$$

Por consiguiente, en las Fraccionadas Aritméticas, a diferencia de las Geométricas, las "razones" (diferencias) sí mantienen la misma relación de equivalencia que las cuantías.

Y en las prepagables:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{i}}(1+\boldsymbol{i}) = \frac{\boldsymbol{d}_m}{\boldsymbol{i}_m}(1+\boldsymbol{i}_m)} \text{ y en general } \boxed{\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{i}}(1+\boldsymbol{i}) = \frac{\boldsymbol{c}_m}{\boldsymbol{i}_m}(1+\boldsymbol{i}_m)}$$

Las rentas hiperanuales se comportan de forma análoga a como lo hacen las rentas constantes con cuantías $c_j^{\mathbf{m}}$ y tipo de interés $\mathbf{i^m}$.