MATEMÁTICAS FINANCIERAS

LECCIÓN 5: Operaciones financieras a largo plazo.

1. Introducción.

En este capítulo vamos a hacer uso del estudio de rentas realizado en la lección anterior. Concretamente aplicaremos dichos conocimientos a aplicarlos a las operaciones de constitución de capital y al estudio de préstamos.

2. Operaciones de constitución de capital.

Este epígrafe se realiza su estudio a través de la relación de problemas que se han realizado en clase. Versan sobre planes de pensiones y/o jubilación, estudiando básicamente su aspecto financiero.

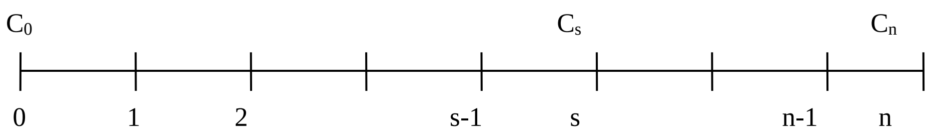
3. Préstamos: planteamiento general.

Una Operación de Préstamo es una operación financiera en la que **Prestamista** (sujeto activo) entrega a **Prestatario** (sujeto pasivo) un capital **C** en el instante $\mathbf{t_0}$, a cambio el **Prestatario** se compromete a reembolsar la cantidad prestada y el pago de un precio o **Intereses**.
En el momento de concertarse el préstamo, debe existir una equivalencia entre Prestación y Contraprestación que cumplirá una Ley Financiera, aceptada por las partes.

Características de un Préstamo:
- Nominal.
- Duración.
- Formas de Devolución ó Amortización, que pueden ser dos:
    - Mediante un sólo pago (operación financiera simple).
    - Mediante varios pagos que constituyen una renta (caso general).

Veamos estas dos formas.

4.- Amortización de préstamo mediante un sólo pago.



Consiste en la entrega del **Acreedor o Prestamista** de un capital de cuantía $\mathbf{C_0}$ en el origen al **Deudor o Prestatario** para que este a cambio entregue **n** períodos después la cuantía $\mathbf{C_n}$. Es decir la Prestación y Contraprestación están formadas por un solo capital (préstamo elemental simple).

Un concepto importante en este tipo de operaciones es el de **Reserva Financiera, Saldo Financiero o Capital Vivo (C_s)**, que es la Deuda Pendiente en un punto intermedio de la duración del Préstamo, su cálculo se puede realizar por tres métodos:

Método Prospectivo: Referir al presente los compromisos de futuro de las partes:

$$C_s = C_n(1+i)^{-(n-s)}$$

Método Retrospectivo: Referir al presente los compromisos de pasado de las partes:

$$C_s = C_0(1+i)^s$$

Método Recurrente: Referir al presente los compromisos del período anterior:

$$C_s = C_{s-1}(1+i)$$

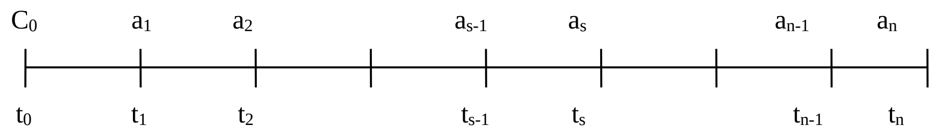
Relacionado con lo anterior está lo que se denomina **Cancelación Anticipada** y que se puede dar en cualquier operación de préstamo. Surge cuando el Prestatario o Deudor quiere cancelar su préstamo mediante un solo pago en el momento **s<n**, pues bien la cantidad adeudada, según los métodos, será:

$$C_s = C_n(1+i)^{-(n-s)} = C_0(1+i)^s = C_{s-1}(1+i)$$

La cancelación anticipada puede ser total o parcial y puede conllevar unas comisiones por la cuantía de capital cancelado.

5.- Amortización de préstamo mediante una renta.

5.1.- Planteamiento General.

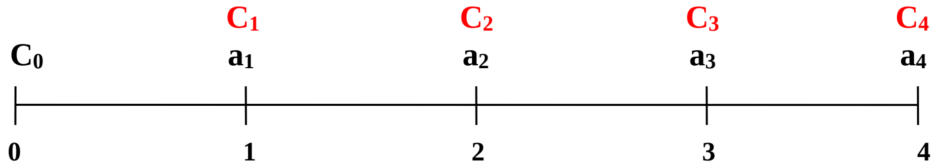


En este caso la operación está formada por una **prestación única (C_0, t_0)** y una **contraprestación múltiple ((a_1,t_1), (a_2,t_2), ... , (a_n,t_n))**. Los capitales de la contraprestación devuelven el principal y abona los intereses y se denominan **términos amortizativos**.

En la práctica es frecuente, en este tipo de operaciones, la aplicación de la ley de capitalización compuesta y períodos uniformes. La notación que vamos a utilizar es:

C_0: Cuantía del principal prestado en el origen de la operación.
a_s: Cuantía del término amortizativo que vence al final del período **s**.
C_s: Reserva, Saldo o Capital Pendiente de amortización al principio del período **s+1**.
M_s: Cuantía del Capital Amortizado en los **s** primeros períodos.
I_s: Cuantía que se abona por intereses en el período **s**, o cuota de intereses generado por **C_{s-1}**.
A_s: Cuota de Amortización del período **s (C_{s-1}-C_s)**.

<u>Ejemplo teórico para 4 periodos</u>



Magnitudes: C_0, a_s, C_s, A_s, I_s, M_s

suponemos conocidas $\mathbf{C_0}$ (siempre) y $\mathbf{a_s}$, el resto serán:

"C_s"

$C_1 = C_0\,(1 + i) - a_1$
$C_2 = C_1\,(1 + i) - a_2$
$C_3 = C_2\,(1 + i) - a_3$
$C_4 = C_3\,(1 + i) - a_4 = 0$
$C_s = C_{s-1}\,(1 + i) - a_s$

"A_s"

$A_1 = C_0 - C_1$
$A_2 = C_1 - C_2$
$A_3 = C_2 - C_3$
$A_4 = C_3 - C_4 = C_3$
$A_s = C_{s-1} - C_s$

"I_s"

$I_1 = a_1 - A_1 = C_0\,i$
$I_2 = a_2 - A_2 = C_1\,i$
$I_3 = a_3 - A_3 = C_2\,i$
$I_4 = a_4 - A_4 = C_3\,i$
$I_s = a_s - A_s = C_{s-1}\,i$

"M_s"

$M_1 = C_0 - C_1 = A_1$
$M_2 = C_0 - C_2 = M_1+A_2=A_1+A_2$
$M_3 = C_0 - C_3 = M_2+A_3=A_1+A_2+A_3$
$M_4 = C_0 - C_4 = C_0=M_3+A_4=A_1+A_2+A_3+A_4$
$M_s = C_0 - C_s = M_{s-1}+A_s$

suponemos conocidas $\mathbf{C_0}$ (siempre) y $\mathbf{A_s}$, el resto serán:

"C_s"

$C_1 = C_0 - A_1$
$C_2 = C_1 - A_2$
$C_3 = C_2 - A_3$
$C_4 = C_3 - A_4$
$C_s = C_{s-1} - A_s$

"M_s"

$M_1 = A_1$
$M_2 = M_1 + A_2$
$M_3 = M_2 + A_3$
$M_4 = M_3 + A_4$
$M_s = M_{s-1} + A_s$

"I_s"

$I_1 = C_0\,i$
$I_2 = C_1\,i$
$I_3 = C_2\,i$
$I_4 = C_3\,i$
$I_s = C_{s-1}\,i$

"a_s"

$a_1 = I_1 + A_1$
$a_2 = I_2 + A_2$
$a_3 = I_3 + A_3$
$a_4 = I_4 + A_4$
$a_s = I_s + C_s$

En este tipo de amortización se producen dos movimientos de signo contrario en cada uno de los períodos:

- **Crecimiento:** por efecto de los intereses.

- **Disminución:** por el pago del término amortizativo.

La suma de estos dos movimientos nos da la variación total de la **Reserva** en el período:

- Disminuirá la Reserva o la Deuda si el término amortizativo es mayor que los intereses generados en el período.

- Aumentará la Deuda cuando el interés sea mayor que el término amortizativo.

- No variará cuando el término amortizativo coincida con la cuota de interés.

En base a esto tenemos:

- **Operación de amortización regular:** cuando la Deuda o Capital Vivo no crece de un período a otro ($C_0 \geq C_1 \geq C_2 \ldots\ldots \geq C_{n-1} > C_n = 0$) ó ($A_1 \geq 0$; $A_2 \geq 0$; ... $A_{n-1} \geq 0$; $A_n > 0$).

- **Operación de amortización no regular:** cuando existe alguna cuota de amortización negativa, es decir en algún período crece el capital vivo o deuda pendiente.

Dentro de la amortización mediante una renta existen distintas formas llamadas sistemas o métodos de amortización y que surgen al hacer hipótesis sobre cualquiera de las variables que intervienen en la operación (C_s, a_s, I_s,A_s, M_s).

5.2.- Método americano ó de abono de intereses.

Los **términos amortizativos (a_s)** verifican lo siguiente:

$$a_1 = C_0 i;\ a_2 = C_0 i;\ \ldots;\ a_{n-1} = C_0 i;\ a_n = C_0 i + C_0;$$

es decir se abonan periódicamente los intereses, amortizando el principal (C_0) al final de la operación.

Las **cuotas de amortización (A_s)** son todas nulas excepto la última:

$$A_1 = A_2 = \ldots\ldots = A_{n-1} = 0;\ A_n = C_0$$

El **capital vivo o deuda pendiente (C_s)** es igual al capital prestado (C_0), excepto C_n:

$$C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1};\ \text{con } C_n = 0$$

La **equivalencia financiera** con la ley de capitalización compuesta es:

$$C_0 = C_0 i\, a_{\overline{n}|i} + C_0 (1+i)^{-n}$$

- **Reembolso anticipado:** Si el prestatario quiere pagar su préstamo, después de pagados los intereses del año **s**, la cantidad que cancela el préstamo es $\mathbf{C_0}$, además, si las hubiere, las comisiones que se impongan.

- **Reembolso parcial:** Se desembolsaría la cantidad deseada **X** más la comisión, si la hubiere, quedando pendiente a partir de ese momento $\mathbf{C_0-X}$.

5.3.- Amortización con fondo de amortización (ó Método Americano con *Sinking Found).*

Este método de amortización también es llamado de *"dos tantos de interés"*, y consiste, por parte del prestatario, en:
- Pago periódico de los intereses al prestamista.
- Reconstrucción del capital para abonarlo al final al prestamista.

Por tanto el **término amortizativo**, es suma de dos conceptos:
- Los intereses del Capital, $\mathbf{C_0}$, al tanto de interés, **i**, estipulado en el contrato, $\mathbf{C_0 i}$.
- El depósito en una entidad financiera de una cantidad, **F**, que invertida al tanto **i'**, generalmente menor que **i**, reproduzca al final del período **n** el capital $\mathbf{C_0}$ que tiene que entregar al prestamista.

Es decir el término amortizativo será:

$$a = F + C_0 i \quad ;\text{donde} \quad F\, s_{\overline{n|}i'} = C_0 \quad \text{con} \quad F = \frac{C_0}{s_{\overline{n|}i'}}$$

Si esta operación se realiza en la misma entidad financiera, que es lo normal. El prestamista (prestatario) adquiere una doble personalidad, acreedora (deudora) en la operación de amortización tipo americano y deudora (acreedora) en la operación de constitución.

El saldo conjunto de las dos operaciones coincide, en todo momento, con el capital vivo en la operación inicial.

5.4.- Método de amortización francés ó de términos amortizativos (a) constantes.

Es un tipo que amortiza progresivamente la deuda en **n** períodos. Características:

- Tipo de interés constante y vencido para todos los períodos $\mathbf{(i_1=i_2= ... =i_n=i)}$.
- Término amortizativo constante para todos los períodos $\mathbf{(a_1=a_2= ... =a_n=a)}$.

La cuantía del término amortizativo ha de ser suficiente para abonar los intereses del capital pendiente en cada período y para amortizar parte de la deuda, de tal forma que al final de la operación se cancele el préstamo. Veamos la determinación de todas las magnitudes:

C_0	a	a		a	a		a	a
0	1	2		s-1	s		n-1	n

Términos amortizativos (a):

$$C_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \Rightarrow \boxed{a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}}}$$

Capital pendiente (C_s):

M. Prospectivo: $C_s = a\,a_{\overline{n-s}|i} = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} a_{\overline{n-s}|i} = C_0 \frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$

M. Retrospectivo: $C_s = C_0(1+i)^s - a\,S_{\overline{s}|i} = C_0(1+i)^s - \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} S_{\overline{s}|i} = C_0\left[(1+i)^s - \frac{S_{\overline{s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}\right]$

M. Recurrente: $C_s = C_{s-1}(1+i) - a = C_{s-1} - A_s$

Cuota de amortización (A_s):

$$\begin{aligned} C_s &= C_{s-1}(1+i) - a \\ C_{s+1} &= C_s\,(1+i) - a \end{aligned}$$

$$\underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}(1+i) \Rightarrow A_{s+1} = \underbrace{A_s(1+i)}_{progresion\ geometrica} \Rightarrow A_s = A_1(1+i)^{s-1}$$

$$como \quad a = C_0 i + A_1 \Rightarrow A_1 = a - C_0 i$$

$$o\ \ bien \quad como \quad C_0 = \sum_{s=1}^{n} A_s = \sum_{s=1}^{n} A_1(1+i)^{s-1} = A_1\,S_{\overline{n}|i} \Rightarrow A_1 = \frac{C_0}{S_{\overline{n}|i}}$$

Capital Amortizado (M_s):

$$M_s = C_0 - C_s = \sum_{h=1}^{s} A_h = \sum_{h=1}^{s} A_1(1+i)^{h-1} = A_1\,S_{\overline{s}|i} = \frac{C_0}{S_{\overline{n}|i}} S_{\overline{s}|i} = C_0 \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}}$$

Cuota de Interés (I_s):

$$I_s = a - A_s = C_{s-1} i$$

5.5.- Método de cuotas de amortización constantes (método italiano).

En este método se cumple la condición:

$$A_1 = A_2 = \ \dots\ = A_n = A$$

como $$C_0 = \sum_{r=1}^{n} A_r = nA \Rightarrow A = \frac{C_0}{n}$$

Capital pendiente (C_s):

El Capital Vivo ó Saldo disminuye en progresión aritmética de razón: $A = \frac{C_0}{n}$ y es:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r = (n-s)A = C_{s-1} - A$$

Capital amortizado (M_s):

Crece en la misma proporción:

$$M_s = \sum_{r=1}^{s} A_r = sA = M_{s-1} + A$$

Cuotas de interés (I_s):

$$I_s = C_{s-1} i$$

y que decrecerán en progresión aritmética de razón **Ai**, así:

$$I_{s+1} = C_s i = (C_{s-1} - A) i = C_{s-1} i - Ai = I_s - Ai$$

Términos amortizativos (a_s):

$$a_s = I_s + A = C_{s-1} i + A$$

y varían en la misma forma:

$$\begin{array}{l} a_{s+1} = C_s i + A \\ a_s = C_{s-1} i + A \\ \hline a_{s+1} - a_s = \underbrace{(C_s - C_{s-1})}_{-A} i \Rightarrow a_{s+1} = a_s - Ai \end{array}$$

5.6.- Método de términos variables en progresión geométrica.

Se trata de amortizar un capital (C_0, t_0), mediante **n** términos que varían en progresión geométrica ($a_s = a_{s-1}q = a_1q^{s-1}$ con $q>0$), es decir:

C_0	a	aq		aq^{s-2}	aq^{s-1}		aq^{n-2}	aq^{n-1}
0	1	2		s-1	s		n-1	n

Términos amortizativos (a):

$$C_0 = A_{(a,q)\overline{n|}i} = a\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \Rightarrow \boxed{a = C_0 \frac{1+i-q}{1-(1+i)^{-n}q^n}}$$ con $a_s = a_{s-1}q = aq^{s-1}$

Capital pendiente (C_s):

$$C_s = A_{(a_{s+1},q)\overline{n-s|}i} = aq^s \frac{1-q^{n-s}(1+i)^{-(n-s)}}{1+i-q}$$

Cuotas de amortización (A_s):

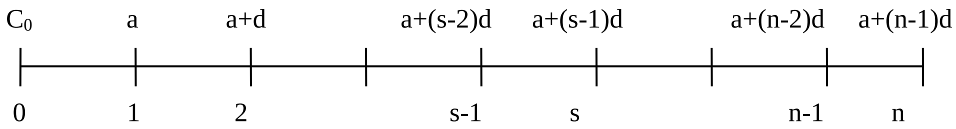
$$\begin{array}{l} C_s = C_{s-1}(1+i) - aq^{s-1} \\ \underline{C_{s+1} = C_s(1+i) - aq^{s}} \end{array}$$

$$\underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}(1+i) - aq^{s-1} + aq^s = A_s(1+i) + a\left(q^s - q^{s-1}\right) =$$

$$= A_s(1+i) + aq^{s-1}(q-1) = A_s(1+i) + a_s(q-1)$$

$$\begin{array}{l} C_s \;=\; C_{s-1}(1+i) - aq^{s-1} \\ C_{s+1} = C_s(1+i) - aq^{s} \end{array}$$

5.7.- Método de términos variables en progresión aritmética.



6.- Cálculos de los tantos efectivos en los préstamos.

Hasta hemos considerado como tanto efectivo (TAE) al tipo de interés que verificaba la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación y que era igual para prestamista y prestatario **(i)**.

No obstante en las operaciones financieras, en general, y en las de amortización de préstamos, en particular, además de la prestación y contraprestación nominal existen pagos y cobros por parte de prestatario y/o prestamista que alteran el equilibrio antes citado, como son:

- Gastos iniciales de formalización del préstamo.
- Gastos de administración.
- Impuestos sobre rendimientos.
- Gastos finales

A estas cantidades se le denominan **Características Comerciales** y son de dos tipos:

- Bilaterales: una vez definida la operación financiera, son las que modifican las cuantías o vencimientos de la prestación o de la contraprestación, para las dos partes.

- Unilaterales: son las que modifican las cuantías o vencimiento de la prestación o de la contraprestación pero que afectan a una sola de las partes contratantes.

Atendiendo a esto, tenemos:

- Tanto efectivo del prestamista o acreedor (i_a): es el tanto medio que iguala lo realmente entregado por el prestamista con lo realmente percibido. También llamado Tanto Interno de Rentabilidad (T.I.R.) y que representa la rentabilidad que obtiene el prestamista por el dinero prestado.

- Tanto efectivo del prestatario o deudor (i_d): es el tanto medio que iguala lo realmente obtenido por el prestatario con lo realmente entregado. Representa lo que le cuesta al prestatario el préstamo recibido.

- **Tanto anual equivalente (i) (T.A.E.)**: es el tanto que iguala prestación y contraprestación con características comerciales bilaterales.