Apellidos:	
Nombre:	DNI:

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.

6 de febrero de 2013

E.T.S. Ingeniería de Telecomunicación.

☐ Grupo A de Sist. de Telecom. ☐ Grupo A de Sist. Electrón. ☐ Grupo A de Son. e Im. ☐ Grupo A de Telem.

☐ Grupo B de Sist. de Telecom. ☐ Grupo B de Sist. Electrón. ☐ Grupo B de Son. e Im. ☐ Grupo B de Telem.

---

1. Consideremos el subconjunto de los números complejos $G = \{1, -1, i, -i\}$ con la operación de multiplicación habitual.

   a) Pruebe que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.

   b) Consideremos la función $f\colon G \to G$ definida $f(z) = z^2$. Justifice si f es o no es biyectiva y encuentre, si existe, la función inversa f^{-1}.

   Para que $(G, \cdot)$ sea un grupo abeliano es necesario que:

   - *el producto sea una operación interna*
   - *con propiedad asociativa: $a(bc) = (ab)c$ para todo $a, b, c \in G$,*
   - *conmutativa: $ab = ba$ para todo $a, b \in G$,*
   - *con un elemento neutro: $e \in G$ tal que $ea = ae = a$ para todo $a \in G$*
   - *y todo elemento tiene que tener simétrico: para todo $a \in G$ debe existir $a' \in G$ tal que $aa' = a'a = e$.*

   Comprobamos que el producto es operación interna en G:

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

   Además, es inmediato ver en la tabla que tiene propiedad conmutativa (la tabla es simétrica respecto de la diagonal principal). La propiedad asociativa no es necesario comprobarla porque, al tratarse del producto de números complejos, sabemos que se satisface. El elemento neutro es el 1 (véase cómo se comporta en la tabla) y en la siguiente tabla tenemos el simétrico de cada uno de los elementos:

a	1	-1	i	$-i$
Simétrico de a	1	-1	$-i$	i

   Para el segundo apartado, en la siguiente tabla representamos la función f

z	1	-1	i	$-i$
$f(z)$	1	1	-1	-1

   Se trata de una función porque cada elemento de G tiene una única imagen. Sin embargo no es invectiva porque, por ejemplo, $f(1) = f(-1)$. Tampoco es sobreyectiva porque, por ejemplo, $i \notin \mathrm{Im} f$. Finalmente, al no ser biyectiva no tiene función inversa.

2. Considere, en $\mathbb{R}^4$, el subespacio $U = L(\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,-5,0), (3,3,2,-1)\})$ y el subespacio $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_3 = 0\}$.

   a) Determine una base de U y exprese U con ecuaciones implícitas. *A partir del sistema generador de U, $\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,-5,0), (3,3,2,-1)\}$, buscamos un sistema generador que sea linealmente independiente. Esto se puede hacer de varias maneras. Una de ellas es colocar los vectores como filas de una matriz y estudiar su rango (esto nos indicará el mayor número de filas linealmente independientes. Hagámoslo buscando una matriz equivalente escalonada por filas usando sólo operaciones elementales fila:*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-5&0\\3&3&2&-1\end{pmatrix} \overset{F4\leftarrow F_4-3F_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-5&0\\0&0&2&-1\end{pmatrix} \overset{\substack{F4\leftarrow F_4-2F_2\\F3\leftarrow F_3+5F_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&5\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{F3\leftarrow\frac{1}{5}F_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \overset{F4\leftarrow F_4+3F_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=3$$

En consecuencia, podemos decir que U tiene dimensión 3 y que una base de U la podemos obtener, por ejemplo, escogiendo las filas no nulas de la última matriz

$$B=\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$$

Ojo: Esto último es sólo cierto si hemos colocado los vectores como filas de la matriz y hemos empleado operaciones elementales fila.
Para obtener las ecuaciones implícitas, podemos hacerlo a partir de las ecuaciones paramétricas, o bien, colocando los vectores como columnas de una matriz, añadiendo una columna genérica (x_1,x_2,x_3,x_4) e imponiendo que su rango sea 3 para forzar a que sea combinación lineal de las anteriores.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&x_1\\1&0&0&x_2\\0&1&0&x_3\\0&1&1&x_4\end{pmatrix} \overset{F2\leftarrow F_2-F_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&x_1\\0&0&0&x_2-x_1\\0&1&0&x_3\\0&1&1&x_4\end{pmatrix} \overset{F2\leftrightarrow F_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&x_1\\0&1&0&x_3\\0&0&0&x_2-x_1\\0&1&1&x_4\end{pmatrix}$$

$$\overset{F4\leftarrow F_4-F_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&x_1\\0&1&0&x_3\\0&0&0&x_2-x_1\\0&0&1&x_4-x_3\end{pmatrix} \overset{F3\leftrightarrow F_4}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&x_1\\0&1&0&x_3\\0&0&1&x_4-x_3\\0&0&0&x_2-x_1\end{pmatrix}$$

Y, para que el rango de esa matriz sea 3, es necesario y suficiente que $x_2-x_1=0$. Es decir, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1=x_2\}$.

b) Estudie si los vectores $(2,1,2,1)$, $(2,2,1,1)$ y $(1,2,2,1)$ pertenecen a U y, en caso afirmativo, encuentre su representación respecto de la base del apartado anterior. *A partir de la ecuación implícita de U, es inmediato que, de los vectores propuestos en este enunciado, el único que pertenece a U es $(2,2,1,1)$ y como*

$$(2,2,1,1)=2(1,1,0,0)+1(0,0,1,1)+0(0,0,0,1)$$

su representación respecto de la base B es $(2,1,0)$.

c) Determine $U\cap V$ y $U+V$. ¿Es suma directa? *Como $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1=x_2\}$ y $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1-x_3=0\}$ tenemos que $U\cap V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1=x_2=x_3\}$ que tiene dimensión 2 ya que una base de este subespacio intersección sería, por ejemplo, $\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$.*
El subespacio suma tiene que tener la siguiente dimensión:

$$\operatorname{Dim}(U+V)=\operatorname{Dim}(U)+\operatorname{Dim}(V)-\operatorname{Dim}(U\cap V)=3+3-2=4$$

Por tanto, la suma es $\mathbb{R}^4$. Además, como $U\cap V\neq\{(0,0,0,0)\}$, la suma no es directa.

3. En $\mathbb{R}^3$, determine una base ortonormal considerando el producto escalar

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle=2x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_2+x_3y_3$$

Para ello, aplicamos el método de Gram-Smith a una base cualquiera, como, por ejemplo, la base canónica:

$$\vec{u_1}=(1,0,0)$$
$$\vec{u_2}=(0,1,0)-\frac{\langle(0,1,0),(1,0,0)\rangle}{\langle(1,0,0),(1,0,0)\rangle}(1,0,0)=(-\tfrac{1}{2},1,0)$$
$$\vec{u_3}=(0,0,1)-\frac{\langle(0,0,1),(1,0,0)\rangle}{\langle(1,0,0),(1,0,0)\rangle}(1,0,0)-\frac{\langle(0,0,1),(-\frac{1}{2},1,0)\rangle}{\langle(-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},1,0)\rangle}(-\tfrac{1}{2},1,0)=(0,0,1)$$

donde

$$\langle(0,1,0),(1,0,0)\rangle=2\cdot0\cdot1+1\cdot1+0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0=1 \qquad \langle(1,0,0),(1,0,0)\rangle=2$$
$$\langle(0,0,1),(-\tfrac{1}{2},1,0)\rangle=2\cdot0\cdot(-\tfrac{1}{2})+0\cdot(-\tfrac{1}{2})+0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0=0 \qquad \langle(0,0,1),(1,0,0)\rangle=0$$

Los vectores obtenidos son ortogonales, para que sean ortonormales tenemos que hacerlos unitarios dividiendo por su norma:

$$||\vec{u_1}||=\sqrt{\langle\vec{u_1},\vec{u_1}\rangle}=\sqrt{2} \qquad \vec{u_1}^{\,0}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0)=(\tfrac{\sqrt{2}}{2},0,0)$$
$$||\vec{u_2}||=\sqrt{\langle\vec{u_2},\vec{u_2}\rangle}=\tfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \vec{u_2}^{\,0}=\sqrt{2}(-\tfrac{1}{2},1,0)=(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},0)$$
$$||\vec{u_3}||=\sqrt{\langle\vec{u_3},\vec{u_3}\rangle}=1 \qquad \vec{u_3}^{\,0}=(0,0,1)$$

Una base ortonormal (con este producto escalar) es $\{(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0),(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},0),(0,0,1)\}$.

4. Clasifique la siguiente forma cuadrática $q(x, y, z) = 3x^2 + 2xz$. *La matriz asociada a esta forma cuadrática es*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero el criterio de Sylvester no nos permite clasificarla ya que los menores principales son 3, 0 *y* 0. *Se puede hacer completando cuadrados. Así,* $q(x, y, z) = \left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}z\right)^2 - \frac{1}{3}z^2$. *Como tiene coeficientes negativos y positivos, es indefinida.*
Es fácil de comprobarlo ya que $q(1, 0, 0) = 3$ *y* $q(1, 0, -4) = -5$.
Otra posibilidad es calcular los autovalores. Obtendríamos $-\frac{\sqrt{13}-3}{2}$ *,*$\frac{\sqrt{13}+3}{2}$ *y* 0. *Como hay uno positivo y otro negativo concluirímos que es indefinida.*
OjO Un fallo habitual es clasificarla en función del signo de los elementos de la diagonal principal de la matriz (sin diagonalizarla antes). Estos signos no determinan el carácter de la forma cuadrática.

5. *a*) Consideremos la cuadrícula:

   1) ¿De cuántas formas se puede pintar si cada casilla puede ser indistintamente blanca o negra? *Como tenemos 2 opciones para cada casilla y hay 16 casillas, el número de formas en que se puede colorear es* $PR(2, 16) = 2^{16}$.
   2) ¿De cuántas formas se puede pintar si debe haber 2 casillas blancas, 4 negras y 10 rojas? *Se trata de ordenar 2 blancas, 4 negras y 10 rojas:*

$$POR(2, 4, 10) = \binom{16}{2, 4, 10} = \binom{16}{2}\binom{14}{4}\binom{10}{10} = \frac{16!}{2! \cdot 4! \cdot 10!}$$

   b) ¿Cuántos números de 4 cifras y múltiplos de 5, empiezan por 3, por 5 o por 9 y contienen al menos un dígito que sea 7 y al menos un dígito que sea 5? *Consideramos como universo,* U, *el conjunto de los números de 4 cifras y múltiplos de 5, empiezan por 3, por 5 o por 9. Tenemos que, aplicando el principio del producto y considerando las opciones que hay para cada dígito,*

$$|U| = 3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2$$

En este conjunto universo, consideramos A *el conjunto de los que tienen al menos un dígito* 7 *y* B *los que al menos tienen un dígito* 5. *Buscamos pues el cardinal de* $A \cap B$ *y, para ello, consideramos su complementario y aplicamos inclusión-exclusión:*

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |U| - |\overline{A \cap B}| = |U| - |\overline{A} \cup \overline{B}| = |U| - \left(|\overline{A}| + |\overline{B}| - |\overline{A} \cap \overline{B}|\right) \\ &= 3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 - 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 - 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1 \end{aligned}$$

6. En $\mathbb{R}^5$, determine la matriz de cambio de base de la canónica a

$$B = \{(1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, -1, 0, 1), (1, 0, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1, 0)\}$$

La matriz de cambio de base de B *a la canónica es*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, la matriz de paso de la canónica a B *será su inversa, que calculamos a continuación:*

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 \leftarrow F_2 - F_1 \\ F_5 \leftarrow F_5 - F_1 \\ \approx \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \approx \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_4 \leftarrow F_4 - F_2 \\ \approx \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} F_3 \leftrightarrow F_5 \\ \approx \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} F_2 \leftarrow F_2 + F_3 \\ F_4 \leftarrow F_4 - F_3 \\ \approx \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} F_4 \leftrightarrow F_5 \\ F_4 \leftarrow -F_4 \\ \approx \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 \leftarrow F_1 - F_4 \\ F_2 \leftarrow F_2 - F_4 \\ F_5 \leftarrow F_5 + 2F_4 \\ \approx \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} F_5 \leftarrow -F_5 \\ \approx \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 \leftarrow F_1 - F_5 \\ F_2 \leftarrow F_2 - F_5 \\ F_4 \leftarrow F_4 + F_5 \\ \approx \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz solicitada, por tanto, es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Se considera la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -\beta & -1 \end{pmatrix}$

   a) Para los valores de $\alpha = 3$ y $\beta = 0$ encuentre una matriz diagonal semejante a la matriz A, indicando la matriz de paso correspondiente. *Para estos valores la matriz A es la siguiente*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar calculamos los autovalores

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda)[(1-\lambda)(1+\lambda)+8] = (1+\lambda)[1-\lambda^2+8] = (1+\lambda)(9-\lambda^2) \end{aligned}$$

Por tanto los autovalores son -1, 3 y -3, todos con multiplicidad 1. Como todos los autovalores son distintos, es diagonalizable. Para cada uno de ellos encontramos los autovectores resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente que, si hemos calculado bien los autovalores, debe ser un sistema compatible indeterminado. Para $\lambda = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos que $N_{-1} = \{(x,y,z) \mid x = z = 0\} = \{(0,a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,1,0)\})$. Para $\lambda = 3$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos que $N_3 = \{(x,y,z) \mid y = 0, x = 2z\} = \{(2a,0,a) \mid a \in \mathbb{R}\} = L(\{(2,0,1)\})$. Para $\lambda = -3$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos que $N_{-3} = \{(x,y,z) \mid y = 0, x = -z\} = \{(a,0,-a) \mid a \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,-1)\})$. *Una base formada por autovectores es, por ejemplo,* $\{(0,1,0),(2,0,1),(1,0,-1)\}$. *La matriz diagonal y la matriz de paso para esta base es*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

OjO: La matriz de paso P *debe ser regular. Si, por ejemplo, hubiésemos obtenido una matriz con una columna o una fila de ceros (como en algunos exámenes corregidos) seguro que hemos cometido algún error. Comprobamos que no nos hemos equivocado:*

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Halle los valores propios de A en función de los parámetros α y β. *Calculamos los autovalores*

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \beta & \alpha+1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -\beta & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha+1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)[(1-\lambda)(1+\lambda) + 2(\alpha+1)] = (1+\lambda)[1-\lambda^2+2(\alpha+1)] = (1+\lambda)[(2\alpha+3)-\lambda^2]$$

Por tanto, los autovalores, que no dependen de β, *son* $\lambda = -1$, $\lambda = +\sqrt{2\alpha+3}$ *y* $\lambda = -\sqrt{2\alpha+3}$ *que serán reales sólo en el caso de que* $\alpha \geq -\frac{3}{2}$.

c) Determine los valores de α y β para que A sea diagonalizable y tenga un valor propio doble igual a -1. *Para que* -1 *sea autovalor doble es necesario que* $2\alpha+3 = 1$ *y esto se tiene con* $\alpha = -1$. *Y para que sea diagonalizable es necesario que* N_{-1} *tenga dimensión* 2 *con dicho* α. *Y esto es cierto si y sólo si la siguiente matriz tiene rango* 1.

$$A - (-1)I_3 = \begin{pmatrix} 2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Esto sólo es cierto si la primera fila y la tercera son linealmente dependientes. Para ello se debe cumplir que $\beta = -\beta$. *Por tanto, la respuesta es* $\alpha = -1$ *y* $\beta = 0$.