

Tema 2
EL SÓLIDO ELÁSTICO (El tensor de tensiones)

Problema 2.1

Utilizando un sistema de referencia cartesiano OXYZ, los estados tensionales de dos puntos, digamos A y B, de un dominio elástico vienen representados por los tensores de tensiones representados en (2.1).

$$\underline{\underline{\sigma}}^A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot 100 \text{ Kpcm}^{-2}; \quad \underline{\underline{\sigma}}^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 100 \text{ Kpcm}^{-2} \quad (2.1)$$

- Determine las tensiones y direcciones principales en cada punto.
- Represente gráficamente las direcciones principales en cada punto.

Problema 2.2

La figura 2.1 representa el estado tensional de determinado punto de un sólido elástico mediante el paralelepípedo elemental.

Determine:

- El tensor de tensiones en el sistema coordenado representado.
- El vector tensión asociado a un plano definido por la normal representada en (2.2).
- La ecuación característica.

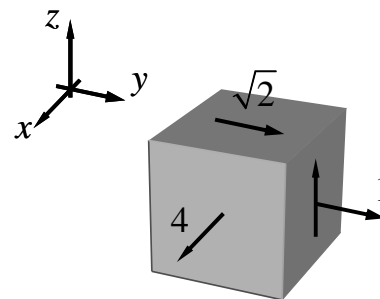


Figura 2.1: Representación de las tensiones en un punto de un sólido elástico mediante el paralelepípedo elemental. Unidades: t/cm^2 .

$$\underline{\underline{\eta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Problema 2.3

El estado tensional de un punto P de un medio continuo viene definido por el paralelepípedo elemental de la figura 2.2.

Determine el valor de la componente x del tensor de tensión (σ_x) para que exista, al menos, un plano que pase por P y que esté libre de tensión.

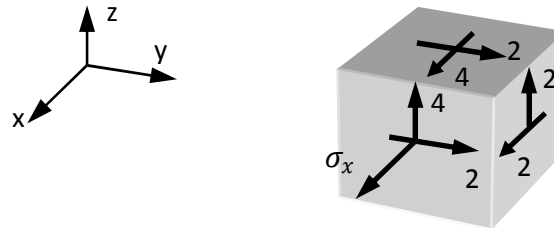


Figura 2.2: Representación de las tensiones en un punto de un sólido elástico mediante el paralelepípedo elemental. Unidades: t/cm^2 .

Problema 2.4

El sólido de la figura 2.3 está sometido a un estado tensional definido en (2.3).

Determine:

- Las fuerzas superficiales en cada cara.
- Las fuerzas volumétricas que actúan sobre el dominio.
- La resultante de las fuerzas superficiales de cada cara.
- La resultante de todas las fuerzas superficiales.
- La resultante de las fuerzas volumétricas.

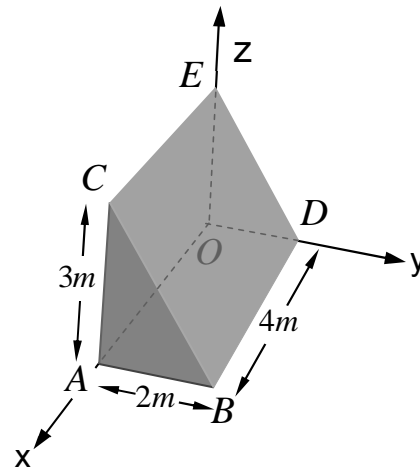


Figura 2.3: Dominio elástico.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3y & 0 & -2x \\ 0 & 0 & 5y + 2z \\ -2x & 5y + 2z & 9x \end{pmatrix} 10^4 N m^{-2} \quad (2.3)$$

Problema 2.5

Para el estado de tensiones representado por el paralelepípedo elemental de la figura 2.4, determine:

- El tensor de tensión, en los ejes representados en la figura.
- Las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a un plano cuya normal forma 30° con la dirección OX y 70° con la OY.

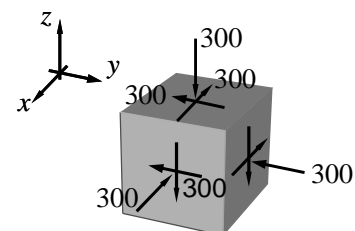


Figura 2.4: Tensiones, en $kp\ cm^{-2}$, en un punto de un dominio elástico.

- c. Tensiones octaédricas.
- d. Tensores esférico y desviador.
- e. ¿Existe alguna dirección en el que las tensiones normales sean nulas? Demuéstrelo.
- f. Tensiones y direcciones principales.

Problema 2.6

Un sólido elástico se encuentra sometido a unas fuerzas volumétricas constantes. Su expresión, en un sistema OXYZ, es la que aparece en (2.4).

$$\underline{F}_v = \begin{pmatrix} F_{vx} \\ F_{vy} \\ F_{vz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} MN m^{-3} \quad (2.4)$$

Determine el valor de las constantes A, B, C, D, E y F; si el estado tensional de cada uno de sus puntos, referidos al sistema de ejes anterior, viene definido por el tensor de tensiones indicado en (2.5).

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} Ax^2 & Dy & Ex \\ Dy & By^2 & Fz \\ Ex & Fz & Cz^2 \end{pmatrix} t/m^2 \quad (2.5)$$

Problema 2.7

El estado tensional de determinado punto de un sólido elástico está formado por la suma de los estados tensionales representados en la figura 2.5.

- a. Represente el paralelepípedo elemental en direcciones principales convenientemente orientado respecto del sistema de referencia x, y, z .
- b. Vector tensión, en el sistema de referencia x, y, z para un plano cuya normal está contenida en el plano formado por las direcciones principales I y III y forma ángulos iguales con esas direcciones.
- c. Normales de los planos para los que las componentes intrínsecas de la tensión tienen los siguientes valores: $\sigma = 5 MPa$, $\tau = 3 MPa$.

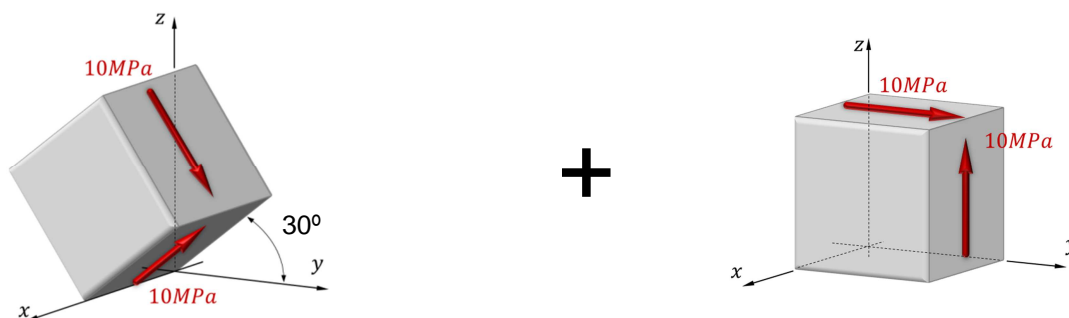


Figura 2.5: Estados tensionales cuya suma es igual al estado tensional del punto analizado.

Problema 2.8

Para el estado tensional representado en la figura 2.6:

- Obtenga y represente el plano, y las componentes intrínsecas del vector tensión asociado al mismo, tal que se cumple:
 $\tau = 2\sigma$ y σ máxima.
- Obtenga y represente el plano tal que $\tau = 2MPa$ y $\sigma = 1MPa$.
- Obtenga el vector tensión asociado al plano cuya normal forma 30° con la primera dirección principal y 80° con la segunda.
- Obtenga y represente el plano y las componentes intrínsecas del vector tensión asociado al mismo, en las siguientes condiciones: la normal al plano forma 30° con la primera dirección principal y 45° con el vector tensión.

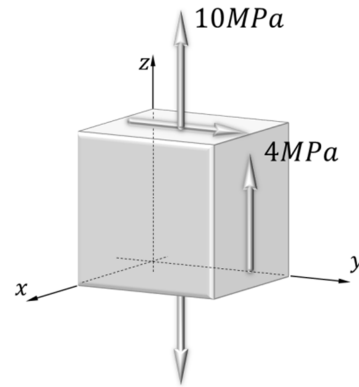


Figura 2.6: Estados tensionales en un punto de un dominio elástico.

Problema 2.9

En el cilindro de la figura 2.7, de 10m de alto y 1m de radio, se encuentra definido el estado tensional representado en (2.6), donde las coordenadas $-x$, y y z - vienen expresadas en metros.

Determine:

- Fuerzas superficiales.
- Fuerzas volumétricas.
- Componentes intrínsecas del vector tensión en el punto A asociado al plano de la figura 2.7.

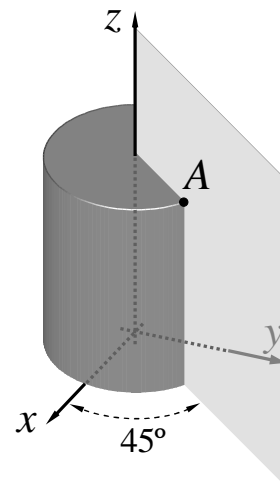


Figura 2.7: Dominio cilíndrico elástico.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} zy^2 & 0 & xyz \\ 0 & zx^2 & xyz \\ xyz & xyz & 0 \end{pmatrix} t/m^2 \quad (2.6)$$

Problema 2.10

La figura 2.8 representa el estado tensional de un punto P sometido a tensión plana.

- Determine el tensor de tensiones según el sistema coordenado $Oxyz$.
- Determine y represente gráficamente, con indicación explícita del sistema $Oxyz$, el tensor de tensiones según el sistema coordenado $Ox'y'z'$.
- Determine y represente gráficamente, con indicación explícita del sistema $Oxyz$, las tensiones y las direcciones principales.
- Determine y represente gráficamente el vector tensión asociado a un plano cuya normal forma 15° con la dirección ox y está contenida en el plano Oxy .

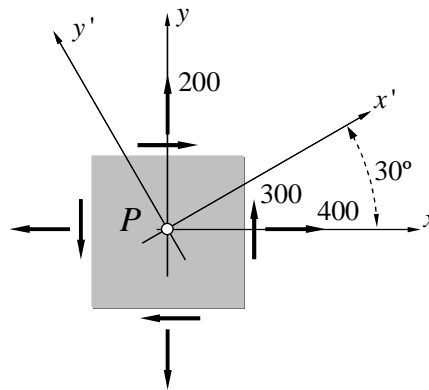


Figura 2.8: Estado de tensión plana en Kp/cm^2 en un punto -P- de un sólido elástico.

Problema 2.11

En un punto del sólido, sometido a tensión plana, se conocen las tensiones normales y tangenciales sobre dos planos que forman entre sí un ángulo α , ver figura 2.9.

Determine gráficamente y analíticamente:

- El ángulo α .
- Las tensiones y direcciones principales
- El tensor de tensiones en los ejes Oxy .
- Represente las direcciones principales

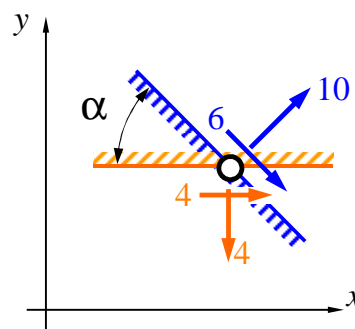


Figura 2.9: Componentes intrínsecas, en Kp/cm^2 , de los vectores tensión asociados a dos planos en un punto de un dominio elástico.

Problema 2.12

Determinado punto de un sólido elástico, homogéneo e isótropo se encuentra sometido a un estado de tensión plana definido por las tensiones $\sigma_{xx} = 13MPa$, $\sigma_{yy} = 7MPa$, $\sigma_{xy} = 4MPa$.

- Indique si es posible encontrar, en ese punto, algún plano tal que la tensión tangencial tenga un valor de 7 MPa.

Si su respuesta ha sido sí, indique alguno de los planos en los que se da ese valor para la tensión angular.

Si su respuesta ha sido no, razone por qué.

- b. Determine el/los plano/s con máxima tensión tangencial de entre aquellos que tienen tensión intrínseca normal de 9 MPa .