Tema 2.3
EL SÓLIDO ELÁSTICO (Ley de Comportamiento)

Nota: Salvo error u omisión, los epígrafes que aparecen en rojo no se pueden hacer hasta un punto más avanzado del temario

Problema 2.3.1

El estado tensional del sólido de la figura 2.3.1, en el que una dimensión es mucho menor que las otras dos, es un estado de tensión plana que viene representado por el tensor bidimensional (coordenadas x e y en cm):

$$[\sigma]=\begin{pmatrix} x+y & -x \\ -x & -x \end{pmatrix}\cdot 100\,\mathrm{Kg/cm^2} \qquad (2.3.1)$$

Sabiendo que las constantes del material son $E = 2\cdot10^6$ Kg/cm^2 y $\nu = 0.3$, se pide:

a. Tensor de deformación.
b. Tensiones y direcciones principales de tensión del punto central del sólido, el punto C de coordenadas (x, y) = (2, 1).
c. Componentes intrínsecas del vector tensión obtenido en el punto C y según el plano AB.
d. Deformaciones y direcciones principales de deformación del punto C.
e. Componentes intrínsecas del vector deformación del punto C, y según una dirección normal al plano AB.

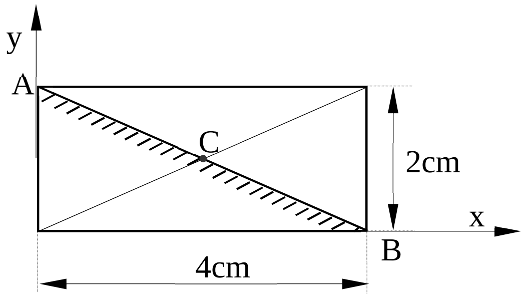

Figura 2.3.1: Laja.

Problema 2.3.2

El tensor de deformación $[\varepsilon]=\begin{pmatrix} 2x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}$ con x, y, en cm corresponde a un sólido en el que la dimensión en el eje OZ es mucho mayor que las otras dos, en los ejes OX y OY. El sólido, de material de constantes $E = 2\cdot10^6$ Kg/cm^2 y ν = 1/3 viene representado en la figura 2.3.2.

Determine:

a. Si el tensor es posible.
b. El incremento de longitud del segmento AB.
c. El tensor de tensiones.
d. Las deformaciones principales y las direcciones principales de deformación en el punto B.

e. Las tensiones principales y las direcciones principales de tensión en el punto B.

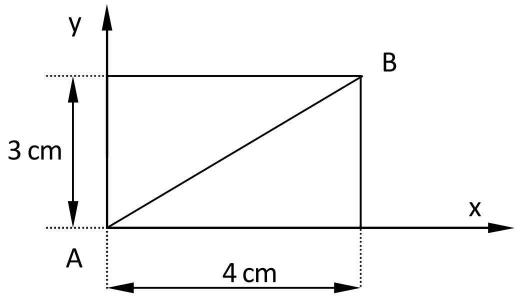

Figura 2.3.2: Sección de un sólido sometido a deformación plana.

Problema 2.3.3

La laja de E = $2.1 \cdot 10^6$Kg/cm^2; υ=0.25; a=10cm y de dimensiones $2a \times a \times \frac{a}{10}$ de la figura está sometida a un tensor de tensiones:

$$[\sigma] = K \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4x \\ 4x & -4y \end{pmatrix} \qquad (2.3.2)$$

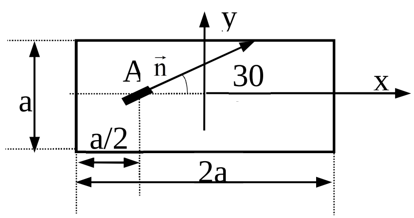

Figura 2.3.3: Laja

Se pide:

a. Obtener analíticamente y representar gráficamente las fuerzas que actúan sobre el sólido.
b. Si se coloca una galga extensométrica[1] en el punto **A** según la dirección representada en la figura, determine el valor que se obtendría de la misma.
c. Tensiones tangencial y normal que se obtendrían en el punto **A** en un plano perpendicular a la dirección $\vec{n}$.
d. Incremento total de volumen que sufre el sólido.

Problema 2.3.4

[1] elemento que se coloca para medir deformaciones longitudinales unitarias en la dirección de la galga

Para medir el estado tensional de un punto de la superficie libre (no sometida a fuerzas externas) de un sólido se utiliza el sistema de galgas de la figura, y se obtienen los valores que se indican: $\varepsilon_a = 2\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_b = 2\cdot10^{-4}$ y $\varepsilon_c = -10^{-4}$. Si las constantes del material son E = 200 GPa y ν = 0.2, se pide determinar el tensor de deformaciones y el de tensiones.

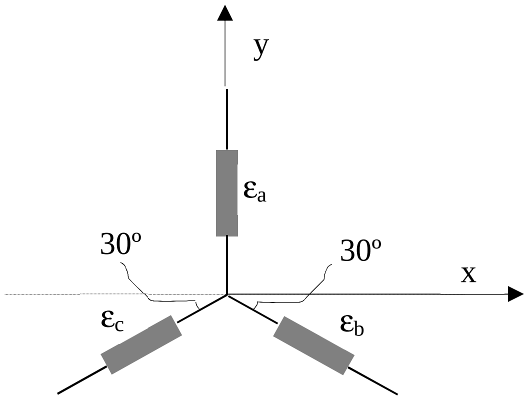

Figura 2.3.4: Roseta de galgas

Problema 2.3.5

El tensor de tensiones siguiente corresponde al sólido de la figura, en el que se muestran las fuerzas de superficie normales que actúan sobre el mismo. Las constantes del material son E = 200Gpa y ν = 0.25.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} x^3 & 0 & 0 \\ 0 & xy^2 & xyz \\ 0 & xyz & 0 \end{pmatrix} \cdot 80KN/m^2 \qquad (2.3.3)$$

Se pide:

a. Demuestre que al tensor de tensiones le corresponde las fuerzas normales representadas.
b. Obtenga el resto de las fuerzas superficiales.
c. Obtenga las fuerzas volumétricas.
d. Demuestre que el tensor es físicamente posible.

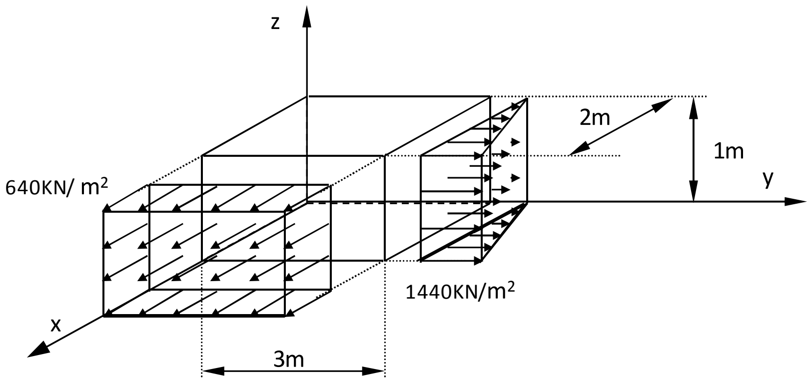

Figura 2.3.5: Sólido sometido a fuerzas superficiales

Problema 2.3.6

Determine la energía de deformación total almacenada por el tetraedro de la figura, sabiendo que las tensiones son constantes y que los planos coordenados son superficies lisas. La fuerza de superficie que actúa sobre el plano inclinado es $\vec{f}_s = \left(-40\vec{i} - 10\vec{j} - 30\vec{k}\right) \mathrm{MPa}$, el módulo de elasticidad es E = $2 \cdot 10^4$ Mpa y el coeficiente de Poisson, ν = 0.25.

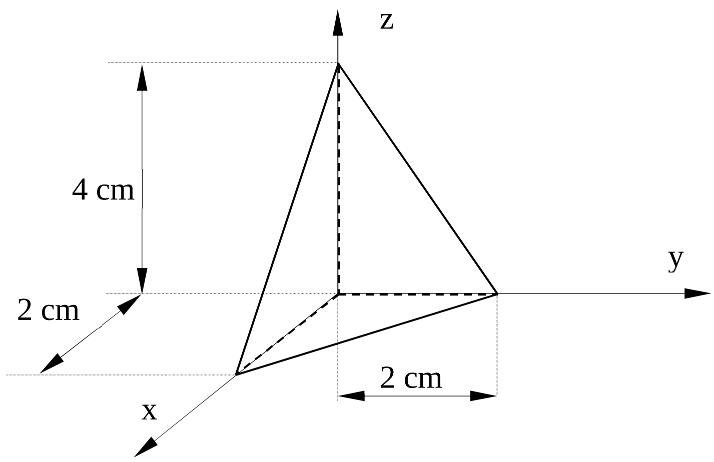

Figura 2.3.6: Tetraedro sometido a un estado de tensiones

Problema 2.3.7

Un taco prismático está introducido en un hueco de paredes lisas que es, exactamente, del mismo tamaño que él, pero una vez dentro se ejerce una presión sobre su superficie superior de 40MPa, si las constantes del material son E = 200 GPa, ν = 0.3 y $\alpha = 1.25 \cdot 10^{-5}$ ºC^{-1} se pide:

a. Demostrar que un estado tensional constante es solución del problema.
b. Determinar ese estado tensional.
c. Determinar el incremento de tensiones si el sólido sufre un incremento de temperatura de ΔT = 50º.

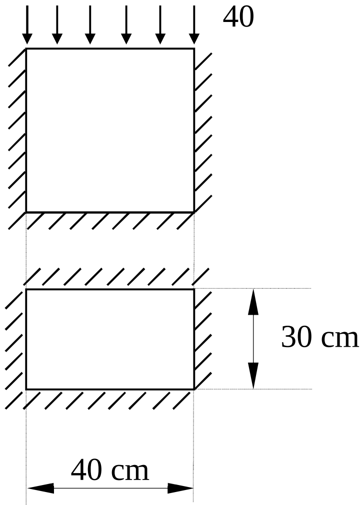

Figura 2.3.7: Taco prismático introducido en un hueco

Problema 2.3.8

Los dos sólidos de la figura son de distinto material y se encuentran entre dos placas rígidas. En cada extremo hay dos tornillos de rigidez infinita. Se pide calcular el número de vueltas que hay que darle a cada tornillo para que se unan los sólidos 1 y 2, permaneciendo paralelas las placas rígidas. Se partirá de que el estado tensional de cada sólido es uniforme. Datos: $E_1 = 10^6$ Kg/cm^2, $\nu_1 = 0.15$, $E_2 = 5 \cdot 10^5$ Kg/cm^2, $\nu_2 = 0.25$, $\delta = 0.1$ mm y el paso de cada tornillo es de 1mm.

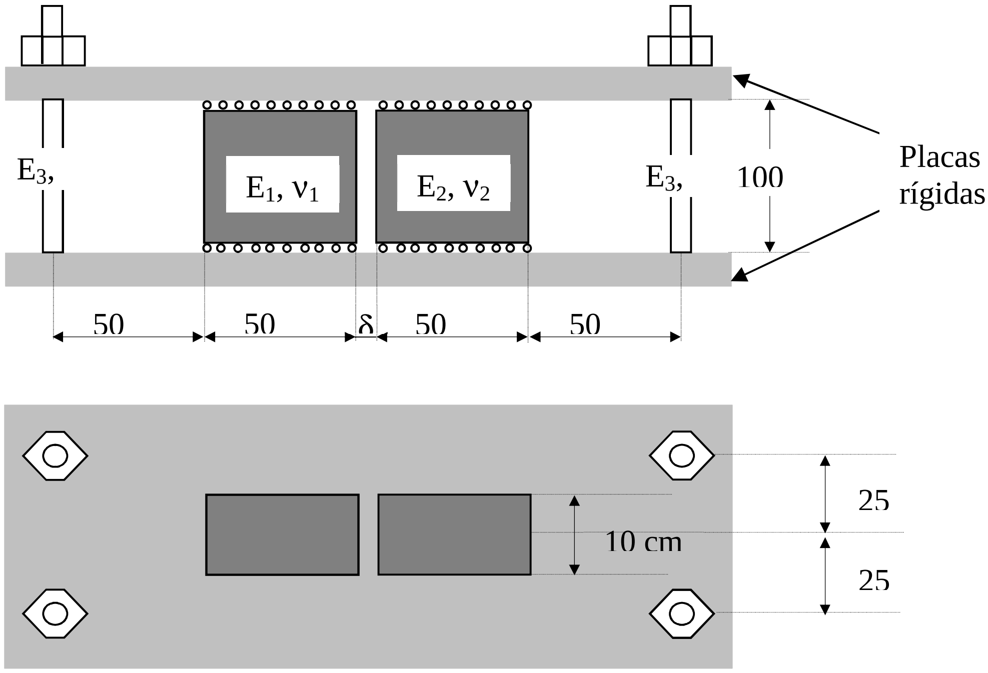

Figura 2.3.8: Sólidos entre placa rígidas

Problema 2.3.9

El sólido de la figura de E = 200 GPa y υ = 0.25 tiene una dimensión mucho mayor según el eje OZ (5m) está sometido al campo de desplazamientos que se indica, se pide:

a. Indique todas las condiciones de contorno.
b. Halle el tensor de deformaciones.
c. Halle el tensor de de tensiones.
d. Halle el incremento de volumen.
e. Compruebe que este campo de desplazamientos puede ser solución del problema.
f. Halle el valor de P.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} 10^{-4} cm, coordenadas\ en\ cm \qquad (2.3.5)$$

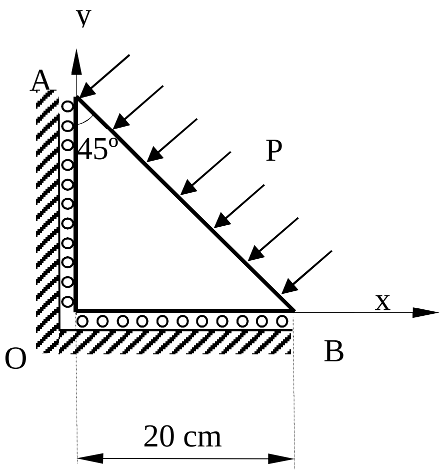

Figura 2.3.9: Laja

Problema 2.3.10

Obtenga el estado tensional de un punto material de un sólido de propiedades E=100 GPa y υ = 0.2 si:

- El incremento unitario de volumen en ese punto es nulo.
- $\sigma_I = \sigma_{II}$
- La deformación angular máxima es $4 \cdot 10^{-4}$.

Problema 2.3.11

El dominio elástico, homogéneo e isótropo; de la figura 2.3.10, de propiedades mecánicas $E = 2GPa$, $\nu = 0{,}2GPa$, se encuentra sometido al estado de tensión representado en (2.3.6) (coordenadas en metros).

a. Represente las direcciones de tensión y las de deformación principal en el baricentro del dominio.
b. Represente la dirección de tensión tangencial máxima en el baricentro del dominio.

c. Represente las acciones sobre la cara BC y obtenga el momento resultante de estas acciones en el punto A.
d. Obtenga el alargamiento del lado AC.
e. ¿Cuánto debería de valer la tensión de fallo del material para que el coeficiente de seguridad en tensiones del dominio fuese 2.5, si se utilizase el criterio de Von Mises?

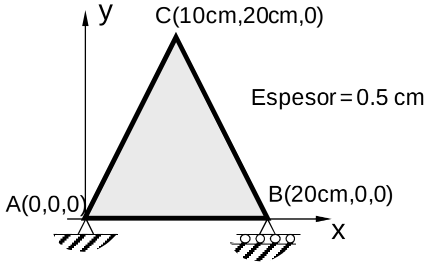

Figura 2.3.10: Dominio elástico triangular.

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x & 3 & 0 \\ 3 & 5y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} MPa \qquad (2.3.6)$$

Problema 2.3.12

Una presa de gravedad con el perfil representado en la figura 2.3.10 está construida mediante hormigón en masa de coeficiente de Poisson ν, módulo de elasticidad E y peso específico $5\gamma/2$, siendo γ el peso específico del agua.

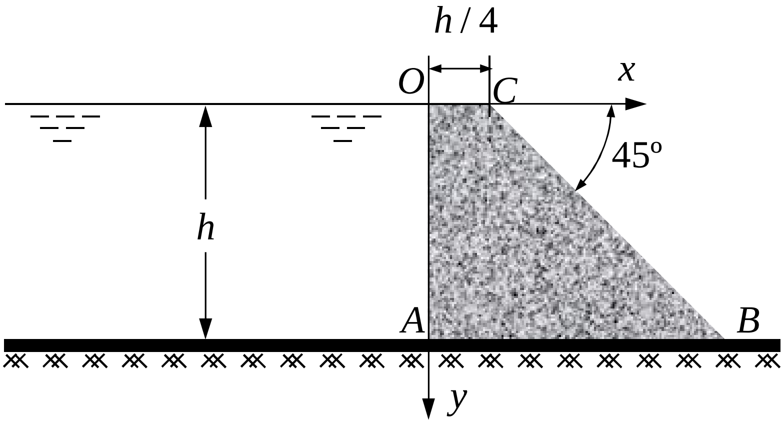

Figura 2.3.11: Esquema de presa de gravedad.

La solución en tensiones de este problema, de deformación plana, viene definida por las componentes del tensor de tensiones indicadas en las expresiones (2.3.7).

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\gamma y \\ \sigma_{yy} &= \frac{\gamma}{2}(x - 3y) \\ \sigma_{xy} &= -\gamma x. \end{aligned} \qquad (2.3.7)$$

a. Represente gráficamente las acciones que el terreno debe realizar sobre la presa para que el resultado indicado sea el correcto.
b. Represente gráficamente las tensiones principales y las direcciones principales en el punto medio de la base de la presa
c. Represente gráficamente las tensiones principales y las direcciones principales en el punto medio del lado CB.
d. Determine las fuerzas de volumen que solicitan la presa.
e. Es conocido que el hormigón, dado su comportamiento predominantemente frágil, puede fallar por tracción para tracciones del orden de un 5% del valor de su resistencia a compresión. En base a esta afirmación ¿qué cota máxima establecería para la altura de la presa si el punto más desfavorable, desde el punto de vista tensional, fuese el punto A y la resistencia a compresión del hormigón fuese σ_h?

Problema 2.3.13

Para el dominio elástico de la figura 2.3.12 -formado por un material de propiedades mecánicas $E = 200\ GPa$ y $\nu = 0.2$- el tensor de tensiones, en el sistema de referencia representado, es el que aparece en (2.3.8), donde las coordenadas han de ser consideradas en centímetros.

a. Determine la expresión del lugar geométrico de los puntos con incremento unitario de volumen nulo.
b. Determine el incremento de superficie para la sección recta situada en $x = 10\ cm$.
c. Determine, en el punto de coordenadas $(200cm, 20cm, 1.5cm)$,
    c1. Las normales, expresadas en el sistema de referencia de la figura, de los planos octaédricos.
    c2. El coeficiente de seguridad en tensiones si la tensión de fallo es de $150\ MPa$.

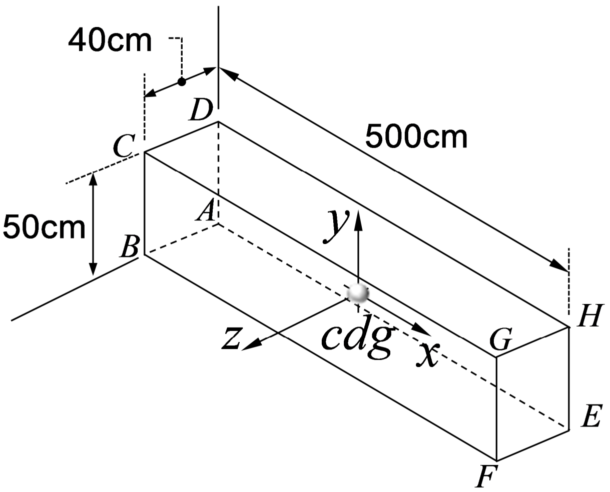

Figura 2.3.12: Dominio elástico prismático.

$$\underset{\sim}{\sigma}(x,y,z)=\begin{pmatrix} 20-\dfrac{xy}{200} & 0 & \dfrac{xyz}{1000} \\ 0 & 50-x & 0 \\ \dfrac{xyz}{1000} & 0 & \dfrac{xy}{100}-50 \end{pmatrix} MPa \qquad (2.3.8)$$

Problema 2.3.14

El dominio elástico, homogéneo e isótropo representado en la figura 2.3.13 está sometido a un estado de cargas que provoca un estado de deformación plana. El tensor de tensiones está definido por las componentes recogidas en (2.3.9).

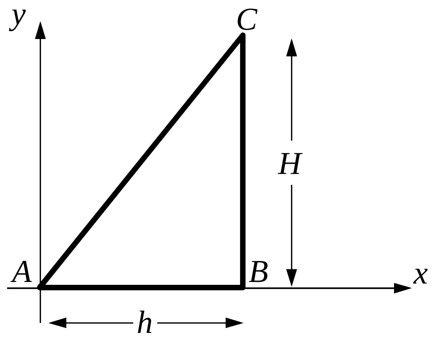

Figura 2.3.13: Dominio elástico triangular.

a. Represente gráficamente las acciones sobre la cara AC.
b. Represente gráficamente las tensiones principales y las direcciones principales en el punto medio de esa cara.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -Ky \\ \sigma_{yy} &= \frac{K}{2}(x-4y) \\ \sigma_{xy} &= -Kx. \end{aligned} \qquad (2.3.9)$$

c. Obtenga el incremento de superficie sufrido por el plano ABC.
d. Suponga que el punto más desfavorable, desde el punto de vista tensional, se encuentra en la línea que une el punto A con el punto de coordenadas (h, h)
¿Cuál debería ser, en ese caso, la tensión de fallo del material para que el coeficiente de seguridad en tensión, en base a la tensión equivalente de von Mises, fuera 2.5?

Datos:
Material: coeficiente de Poisson: $\nu = 0.25$, módulo de elasticidad: $E = 20\ GPa$;
$K = 5\ t \cdot m^{-3}$; $H = 5h/4$;$h = 20m$.

Problema 2.3.15

El dominio de la figura 2.3.14, de un centímetro de espesor, formado por un material elástico isótropo y homogéneo, se encuentra sometido a un estado de cargas que provoca el estado de tensión indicado en (2.3.10).

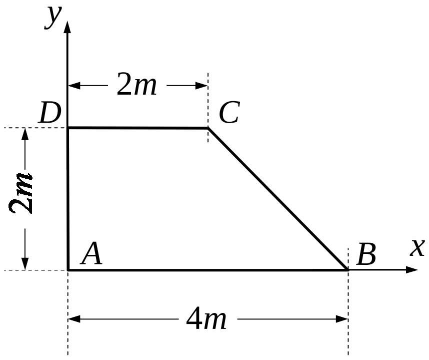

Figura 2.3.14: Dominio elástico.

$$\underset{\sim}{\sigma}(x,y,z)=\begin{pmatrix} -30x+60y+80 & -2x-40 & 0 \\ -2x-40 & 30x-120y+20 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} Pa \qquad (2.3.10)$$

a. Determine y represente las direcciones de deformación angular máxima en el centro de gravedad del dominio.
b. Determine los puntos del dominio en los que se anula el tensor esférico.
c. En el punto con mayor valor para la coordenada x de los calculados en el apartado anterior, determine y represente las direcciones principales. Indique el valor de la tensión principal asociado a cada dirección representada.
d. Desde el punto de vista de la seguridad y considerando el criterio de fallo de von Mises, ¿qué punto de la línea $\overline{AC}$ estima que es el más peligroso? ¿Calcule el coeficiente de seguridad en ese punto?
e. Determine y represente el vector tensión, así como las componentes intrínsecas, en el plano que corta al dominio por la línea $\overline{AC}$ y es paralelo al eje z.

Propiedades del material: Módulo de elasticidad: $2\cdot10^6$ Pa, tensión de fallo plástico: 500 Pa, coeficiente de Poisson: 0.25.