Álgebra Lineal y Matemática Discreta.

E.T.S. Ingenería de Telecomunicación.

Prueba de repaso de Matrices y Sistemas de Ecuaciones

---

1. Matrices

Ejercicio 1 — PAU - Junio de 2013. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

1. Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.
2. Estudia el rango de M según los valores de m.
3. Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

Solución (Ejercicio 1) — 1. Las tres filas serán linealmente independientes si y sólo si el rango de M es 3, $rg(M) = 3$. Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix} \overset{F_3=F_3-F_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3=F_3-(m+1)F_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & -m(m+1) \end{pmatrix}$$

Por tanto, $rg(M) = 3$ si y solo si $-m(m+1) \neq 0$ y esto se cumple para todo

$$m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$$

2. A la segunda cuestión prácticamente hemos respondido en el apartado anterior:
   - Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ entonces $rg(M) = 3$.
   - En otro caso, es decir, si $m = 0$ o $m = -1$, el rango es 2.

3. Si $m = 1$, a tenor de lo dicho en el apartado anterior, $rg(M) = 3$ y, por tanto, $|M| \neq 0$. La matriz, en ese caso, es regular y tiene inversa. La calculamos siguiendo también el método de Gauss (con los mismos pasos que en el apartado 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Podemos comprobar que, efectivamente, se cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 — PAU - Junio de 2013. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Comprueba que $A^2 = 2I_2$ y calcula A^{-1}.

Solución (Ejercicio 2) — 1. Multiplicamos: $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Además, como $AA = 2I_2$, tenemos que $\frac{1}{2}AA = I_2$ y $\left(\frac{1}{2}A\right)A = A\left(\frac{1}{2}A\right) = I_2$. Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Como $A^2 = 2I_2$ y, haciendo uso de la regla de la división, tenemos que $2013 = 2 \cdot 1006 + 1$, podemos calcular

$$A^{2013} = A^{2\cdot 1006+1} = \left(A^2\right)^{1006}A = \left(2I_2\right)^{1006}A = 2^{1006}I_2^{1006}A = 2^{1006}I_2A = 2^{1006}A = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}$$

y, para calcular su inversa,

$$\left(A^{2013}\right)^{-1} = \left(2^{1006}A\right)^{-1} = \frac{1}{2^{1006}}A^{-1} = \frac{1}{2^{1006}}\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{1}{2^{1007}}A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2^{1007}} & \dfrac{1}{2^{1007}} \\ \dfrac{1}{2^{1007}} & -\dfrac{1}{2^{1007}} \end{pmatrix}$$

2. Determinantes

Ejercicio 3 — PAU - Junio de 2013. Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes:

1. $Det(-2A)$ y $Det(A^{-1})$.
2. $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & r \end{vmatrix}$

Solución (Ejercicio 3) — 1. $Det(-2A) = \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -2d & -2e & -2f \\ -2p & -2q & -2r \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2d & -2e & -2f \\ -2p & -2q & -2r \end{vmatrix} = (-2)^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -2p & -2q & -2r \end{vmatrix} =$

$(-2)^3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -8 \cdot 4 = -32$ y $Det(A^{-1}) = \dfrac{1}{Det(A)} = \dfrac{1}{4}$.

3. Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 4 — PAU - Junio de 2012. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= \lambda + 1 \\ 3y + 2z &= 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z &= \lambda \end{aligned}$$

1. Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.
2. Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una solución única.
3. ¿Existe algún valor de λ para que el sistema admita la solución $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$?

Solución (Ejercicio 4) — 1. Para $\lambda = 1$, la matriz ampliada del sistema es la siguiente, a la que le aplicamos el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3=F_3-3F_1}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array}\right) \overset{F_3=F_3+F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2=\frac{1}{3}F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz y de la matriz ampliada coincide y es 2. Como el número de incógnitas era 3, las soluciones tendremos que expresarlas en función de un parámetro (1 grado de libertad). Tomamos $z = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$ arbitrario.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -t+2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}t+\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ o, en términos de ecuaciones, $\begin{aligned} x + y &= -t + 2 \\ y &= -\frac{2}{3}t + \frac{5}{3} \end{aligned}$

Despejando de abajo hacia arriba obtenemos el conjunto de soluciones que es $\left\{\left(-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3},-\frac{2}{3}t+\frac{5}{3},t\right) \;\mid t\in\mathbb{R}\right\}$

$$\text{SOLUCIÓN:}\quad \begin{array}{rcl} x &=& -\frac{1}{3}t+\frac{1}{3} \\ y &=& -\frac{2}{3}t+\frac{5}{3} \\ z &=& t \end{array} \qquad \text{para cada } t\in\mathbb{R}$$

2. Para que tenga solución y ésta sea única es necesario que $rg(A)=rg(A^*)=3$ y esto se cumple cuando $|A|\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 3-2(\lambda-1)+6-9=-2\lambda+2$$

El sistema es compatible determinado (con solución única) si $\lambda\neq 1$.

3. Para garantizar que $(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ es solución, sustituimos estos valores en el sistema de ecuaciones y obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} &=& \lambda+1 \\ 3\cdot 0+2\frac{1}{2} &=& 2\lambda+3 \\ 3\left(-\frac{1}{2}\right)+(\lambda-1)0+\frac{1}{2} &=& \lambda \end{array}$$

Nos queda pues el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& \lambda+1 \\ 1 &=& 2\lambda+3 \\ -1 &=& \lambda \end{array}$$

que es compatible determinado. La solución es pues $\lambda=-1$.