TEMA 1

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Índice

1.1. Matrices

Definición 1.1. Llamamos matriz A de orden $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, a $m \cdot n$ elementos del cuerpo dispuesto en una tabla de la forma

Si $n = 1$ tenemos una *matriz columna*, si $m = 1$ tenemos una *matriz fila*. Si $m = n$ tenemos una *matriz cuadrada*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ lo expresamos $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Normalmente trabajaremos con el cuerpo de los reales $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y, más ocasionalmente, el cuerpo de los complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Generalmente sobreentenderemos el cuerpo y expresaremos este conjunto como $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Matriz traspuesta Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ llamamos matriz transpuesta de A a

$$A^T = (a_{ij}^T) = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$$

Es decir, intercambiamos filas y columnas. Claramente se tiene

$$\left(A^T\right)^T = A$$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Diagonal principal Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, llamamos diagonal principal a los elementos de la forma a_{ii}. Aquí señalamos la diagonal principal en la matriz A de orden 2×3 anterior: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Matrices triangulares y diagonales

- Decimos que una matriz $U = (u_{ij})$ es *triangular superior* cuando los elementos que están debajo de la diagonal son todos ceros, es decir, $u_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- Decimos que una matriz $L = (l_{ij})$ es *triangular inferior* cuando los elementos que están encima de la diagonal son todos ceros, es decir, $u_{ij} = 0$ para todo $i < j$.
- Decimos que una matriz $D = (d_{ij})$ es *diagonal* si es triangular superior e inferior, es decir: $i \neq j \Longrightarrow d_{ij} = 0$.

Las matrices diagonales donde todos los elementos de la diagonal son el mismo elemento se llaman *matrices escalares*.

Ejercicio 1.2. *Construye matrices triangulares de todo tipo: inferiores, superiores y diagonales (cuadradas y no cuadradas).*

En caso de matrices cuadradas tenemos las siguientes definiciones:

Las matrices simétricas y antisimétricas necesariamente son matrices cuadradas. ¿Porqué?

Matrices simétricas. Una matriz A es *simétrica* cuando si $A^T = A$.

Matrices antisimétricas. Una matriz A es *antisimétrica* cuando $A^T = -A$.

Traza. Es la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Definición 1.3. Llamamos *matriz identidad* de orden **n**, I_n, a la única matriz diagonal $n \times n$ cuyos elementos en la diagonal principal son todos *unos*.

Claramente, la matriz identidad es un ejemplo de matriz escalar.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

1.1.1. Operaciones con matrices

Producto de matrices Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, se define $C = A \cdot B$ como la matriz de orden $m \times p$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Ejercicio 1.4. *Define tres matrices reales: $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $C \in \mathcal{M}_{2\times 1}$ y comprueba la propiedad asociativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.*

Es fácil probar que el producto de matrices no es conmutativo. Además el producto, respecto a la traspuesta cumple la siguiente

Proposición 1.5. *Si A y B son matrices multiplicables entonces*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Demostración. Sea $A \cdot B = C = (c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$.

Entonces $(A \cdot B)^T = (c_{ji}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}\right)$.

Por otro lado, $B^T \cdot A^T = \left(\sum_{k=1}^{n} b^T_{ik}a^T_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}\right) = (A \cdot B)^T$. □

Ejercicio 1.6. *Prueba que, para cualquier matriz A, las matrices $B = AA^T$ y $C = A^TA$ son simétricas.*

Operaciones vectoriales El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ se puede dotar de suma y de producto externo por elementos del cuerpo, así:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

La suma de matrices es, por tanto, una suma elemento a elemento y el producto de un número por una matriz es multiplicar cada elemento de la matriz por dicho número.

Proposición 1.7. *Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ son matrices y $\lambda \in \mathbb{K}$ es un número, entonces:*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Demostración. Es evidente con más que aplicar las definiciones. □

Ejercicio 1.8. *Prueba que si A es una matriz cuadrada, entonces la matriz $A + A^T$ es simétrica y la matriz $A - A^T$ es antisimétrica.*

Usa lo anterior para probar que toda matriz cuadrada se puede expresar como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

1.1.2. Determinantes

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ definimos el determinante de A como

$$\det A = |A| = \sum_{\alpha\in S_n} (-1)^{sg(\alpha)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

siendo $\alpha = \left\{ \begin{array}{c} 1\to j_1 \\ 2\to j_2 \\ \vdots \\ n\to j_n \end{array} \right\}$ cada una de las permutaciones y donde $sg(\alpha)$ denota el número de inversiones de α o, lo que es lo mismo, el número de veces que hay que intercambiar elementos de las imágenes en la identidad $\left\{ \begin{array}{c} 1\to 1 \\ 2\to 2 \\ \vdots \\ n\to n \end{array} \right\}$ para conseguir α.

Ejemplo 1.9. Para calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ calculamos, en primer lugar, el conjunto S_3 de todas las permutaciones de tres elementos:

$$S_3 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} 1\to 1 \\ 2\to 2 \\ 3\to 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1\to 2 \\ 2\to 1 \\ 3\to 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1\to 3 \\ 2\to 2 \\ 3\to 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1\to 1 \\ 2\to 3 \\ 3\to 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1\to 3 \\ 2\to 1 \\ 3\to 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1\to 2 \\ 2\to 3 \\ 3\to 1 \end{array} \right\} \right\}$$

Calculamos ahora $sg(\alpha)$ para cada $\alpha \in S_3$ y obtenemos $0, 1, 1, 1, 2$ y 2 respectivamente. El determinante de A es, por tanto,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

El problema que tiene la definición anterior es que hace tedioso (en la práctica no factible) el cálculo determinantes de orden superior, ya que

$$|S_4| = 4! = 24,\ |S_5| = 5! = 120,\ |S_6| = 6! = 720, \ldots$$

Para facilitar el cálculo del determinante usaremos las siguientes propiedades (no se prueban):

Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz diagonal o triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.
2. $|A| = |A^T|$.
3. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
4. Al intercambiar dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo.
5. Si dos filas (o columnas) son iguales, el determinante es cero.
6. Si una fila (o columna) es de ceros, el determinante es cero.
7. Si multiplicamos una fila (o columna) por un escalar λ, el determinante queda multiplicado por λ.
8. Si una fila (o columna) es combinación lineal de las restantes, el determinante es cero.
9. Si cambiamos la fila (o columna) A_i por $A_i + \lambda A_j$, el determinante no cambia.

Ejercicio 1.10. *Usa las propiedades 4 y 9 y 1 para calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Menor. Llamamos *menor* de una matriz a cualquier determinante que se pueda obtener eliminando filas y/o columnas de dicha matriz.

Ejemplo 1.11. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -6 \\ 5 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ entonces, eliminando la primera 1 y las columnas 2 y 3, el menor obtenido es

$$M = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 30 = 18$$

Adjuntos o cofactores. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ llamaremos *adjunto o cofactor del elemento* a_{ij} al resultado de multiplicar $(-1)^{i+j}$ por el menor obtenido al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A. Se acostumbra a expresar por A_{ij} al adjunto del elemento a_{ij}.

El siguiente resultado (que no probaremos) nos da un método para calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada, que se denomina *método de desarrollo por adjuntos de una fila (o una columna)*.

Teorema 1.12. *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$ se tiene que*

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} = \\ &= a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.13. *Calcula de nuevo el determinante del ejercicio 1.10 desarrollando por la cuarta fila. Haz lo mismo por la tercera columna.*

1.1.3. El Anillo de matrices cuadradas

En el conjunto de matrices cuadradas $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n$ el producto de matrices es una operación interna asociativa, con elemento neutro (I_n) y no conmutativa, que distribuye con la suma, por tanto, $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ es una anillo (no conmutativo) unitario (véase 43).

Matriz inversa Si una matriz A es regular, entonces tiene simétrico respecto al producto (inversa) A^{-1} y, por tanto, es una *matriz invertible*. Las matrices que no son invertibles se denominan matrices singulares.

Definición 1.14 (Matriz adjunta)**.** Llamaremos matriz adjunta de una matriz cuadrada A a la matriz formada al sustituir cada elemento de A por su adjunto.

$$\operatorname{adj} A = (A_{ij})$$

Ejemplo 1.15. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.16. *Calcula la matriz adjunta de* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

La matriz adjunta nos permite el cálculo de la matriz inversa. El desarrollo del determinante por adjuntos nos da el siguiente resultado:

Proposición 1.17. *Si A es una matriz cuadrada, entonces*

$$A \cdot \operatorname{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I_n$$

Nota. Dicho de otro modo, al multiplicar una matriz cuadrada por la matriz adjunta de su traspuesta nos da una matriz escalar (véase nota al Ejemplo 1.3 en página 3) formada por el $\det A$. También es fácil de comprobar que la matriz adjunta de la matriz traspuesta es igual que la matriz traspuesta de la adjunta, es decir, $\operatorname{adj}(A^T) = (\operatorname{adj} A)^T$.

De lo anterior se deduce que si una matriz tiene determinante no nulo, podemos dividir por él y obtenemos una expresión de la matriz inversa.

Teorema 1.18. *Una matriz cuadrada A es invertible si y solo si su determinante* $\det A = |A| \neq 0$. *Además se cumple*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A^T)}{|A|}}$$

A partir del anterior teorema es evidente el siguiente

Corolario 1.19. *Si A es una matriz invertible, entonces A^T también lo es y*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Ejercicio 1.20. *Calcula la inversa de las matriz A del ejemplo 1.15 y de la matriz B del ejercicio 1.16.*

Nota. Como se verá en el tema más adelante (proposición 2.51 en página 40) en todo anillo el elemento simétrico (inverso) es único, por tanto la inversa de una matriz es única. Además se verifica

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \tag{1.1}$$

Ejercicio 1.21. *Da dos matrices cuadradas reales y comprueba la igualdad (1.1) anterior.*

1.2. Equivalencia de matrices

Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se dice que son

- *equivalentes por filas* si y solo si existe una matriz invertible $Q \in \mathcal{M}_m$ tal que
$$B = Q^{-1} \cdot A$$
Nota. Conviene considerar la inversa Q^{-1} como se justificará mas adelante (teorema 5.30).

- *equivalentes por columnas* si y solo si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n$ tal que
$$B = A \cdot P$$

- *equivalentes* (a secas) si y solo si existen matrices invertibles $Q \in \mathcal{M}_m$ y $P \in \mathcal{M}_n$ tales que
$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Observaciones:

1. Si dos matrices son equivalentes por filas (o por columnas) entonces son equivalentes. Esto es evidente, puesto que
$$B = Q^{-1} \cdot A \Rightarrow B = Q^{-1} \cdot A \cdot I_n$$
En cambio dos matrices equivalentes no tienen por que ser equivalentes por filas ni por columnas.

2. En el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ las tres relaciones anteriores son de equivalencia.

Ejercicio 1.22. *Comprueba las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de una de estas tres relaciones (las otras se prueban de forma similar).*

1.2.1. Matrices escalonadas

Dada una matriz $m \times n$ llamamos *cabecera de fila (columna)* al primer elemento no nulo de la fila (columna) si existe. En caso de no existir una cabecera de fila (columna) es porque la fila (columna) es de ceros.

Definición 1.23. Diremos que una matriz es *escalonada por filas* si cumple las tres condiciones siguientes:

1. Las filas de ceros, si existen, están todas al final.

2. La cabecera de una fila siempre está más a la derecha que la cabecera de la fila precedente.

Cambiando "filas" por "columnas" y "derecha" por "debajo" en esta definición obtenemos la definición de *escalonada por columnas*.

Ejemplo 1.24.

Matriz escalonada por filas	Matriz escalonada por columnas
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 1.25. Diremos que una matriz es *escalonada reducida por filas* si cumple:

1. Es escalonada por filas.
2. Cada cabecera de fila es el único elemento no nulo de su columna.
3. Cada cabecera de fila es un 1.

Cambiando "filas" por "columnas" en esta definición obtenemos la definición de *escalonada reducida por columnas*.

Ejemplo 1.26. Las matrices del ejemplo 1.24 no son escalonas reducidas. Las siguientes sí lo son.

Matriz escalonada reducida por filas	Matriz escalonada reducida por columnas
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La siguiente proposición simplifica las cosas.

Proposición 1.27. *Una matriz A es escalonada (reducida) por filas si y solo si la traspuesta A^T es escalonada (reducida) por columnas.*

Demostración. Es evidente. □

1.2.2. Transformaciones y matrices elementales

Las transformaciones elementales son operaciones efectuadas a las filas (o columnas) de una matriz de orden $m \times n$ de forma que la nueva matriz obtenida es equivalente por filas (o columnas) a la anterior.

Las *matrices elementales* son el resultado de aplicar una transformación elemental por filas (o columnas, da igual) a la matriz identidad.

	Transformación elemental por filas (igual por columnas)	Matriz elemental (Ejemplo)
Tipo I	Intercambiar la fila i por la j $(i \neq j)$ $F_i \longleftrightarrow F_j$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Tipo II	Multiplicar la fila i por un elemento $\alpha \neq 0$ $F_i \longleftrightarrow \alpha F_i$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$
Tipo III	Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un elemento α $(i \neq j)$ $F_i \longleftrightarrow F_i + \alpha F_j$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

Cuadro 1.1: Transformaciones y matrices elementales.

Ejemplo 1.28. En el cuadro 1.1 exponemos los tres tipos de transformaciones elementales y ejemplos correspondientes de matrices elementales.

Una trasformación elemental por filas (columnas) en una matriz A es el resultado de multiplicar a la izquierda (derecha) de dicha matriz por la correspondiente matriz elemental del mismo tipo. Luego *las transformaciones elementales por filas (columnas) nos dan matrices equivalentes por filas (columnas).*

Ejercicio 1.29. *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y \; E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(E_1 y E_2 son de tipo I y III, respectivamente)

Calcula los productos $E_1 \cdot A$ y $A \cdot E_2$. Fíjate bien y observa que hacen estos productos (el primero sobre las filas de A y el segundo sobre las columnas de A).

Proposición 1.30. *Las matrices elementales son todas invertibles y su inversa es otra escalonada del mismo tipo.*

Demostración. Es trivial comprobar que las matrices elementales tienen todas determinantes no nulos. Concretamente, si E_1, $E_2(\alpha)$ y E_3 son matrices elementales de tipo I, II y III, respectivamente, los determinantes son:

$$\begin{aligned} \det E_1 &= -1 \\ \det E_2(\alpha) &= \alpha \neq 0 \\ \det E_3 &= 1 \end{aligned}$$

sin más que desarrollar convenientemente el determinante por adjuntos por una columna.

Con un poco más de atención se puede comprobar que la inversa de cada una de ellas es también elemental y del mismo tipo. Así $E_1^{-1} = E_1$, $E_2(\alpha)^{-1} = E_2(\frac{1}{\alpha})$ e, igualmente, dejamos al alumno que piense cómo es la inversa de una matriz elemental de tipo III. □

Ejercicio 1.31. *Siguiendo la proposición anterior, calcula calcula las inversas de las siguientes matrices:*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Llamaremos *combinación lineal de filas (o columnas)* $f_1, \ldots, f_k$ a una expresión de la forma

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_k f_k$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$.

Diremos que un conjunto de filas (o columnas) de una matriz son *linealmente independientes* si ninguna de ellas se puede expresar como combinación lineal de las demás. En caso contrario se dice que son linealmente dependientes.

Ejemplo 1.32. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ podemos asegurar que sus filas son linealmente independientes mintras que sus columnas no lo son (son linealmente dependientes) ya que la tercera es suma de las dos primeras ($C_3 = C_1 + C_2$).

Rango por filas y rango por columnas Llamaremos *rango por filas (columnas)* de una matriz al máximo número de filas (columnas) linealmente independientes.

Teorema 1.33. *El rango por filas y el rango por columnasde cualquier matriz coinciden. A dicho valor lo llamos* rango de la matriz.

Teorema 1.34. *El* rango *de una matriz coincide con el orden del* mayor menor distinto de cero *de la matriz.*

Ejercicio 1.35. *Calcula el rango de las matrices de los ejemplos 1.11 y 1.32.*

Métodos de Gauss y Gauss-Jordan

Los siguientes teoremas son el núcleo de las secciones siguientes y se pueden probar (aunque no lo haremos) de forma algorítmica. Se corresponden con los llamados *método de Gauss y método de Gauss-Jordan*.

Teorema 1.36. *Toda matriz de orden $m \times n$ distinta de la matriz 0 es equivalente por filas (columnas) a una matriz escalonada por filas (columnas).*

Teorema 1.37. *Toda matriz de orden $m \times n$ distinta de la matriz 0 es equivalente por filas (columnas) a una <u>única</u> matriz escalonada reducida por filas (columnas).*

1.2.3. Cálculo del rango de una matriz y de la matriz inversa (por el método de Gauss)

Las matrices escalonadas tienen un rango especialmente fácil de calcular, puesto que es el número de filas (o de columnas) que no son nulas. Además, las transformaciones elementales mantienen el rango, por tanto:

Teorema 1.38. *Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango.*

Ejemplo 1.39. Si aplicamos operaciones elementales por filas a la matriz A del ejemplo 1.11

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -6 \\ 5 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que nos dice (sin calcular ningún determinante) que el rango es 2.

Ejercicio 1.40. *Calcula el rango de la siguiente matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -6 \\ 5 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa

Los teoremas 1.37 y 1.38 nos permite llegar a la conclusión de que una matriz invertible es equivalente por filas (o por columnas) a la matriz identidad del mismo orden, es decir, si A es una matriz cuadrada de orden n de rango también n, entonces por transformaciones elementales

$$A \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow} I$$

o, lo que es lo mismo, podemos encontrar una sucesión de matrices elementales $E_1, E_2, \dots E_k$ tales que

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$

Aplicando la propiedad asociativa del producto de matrices

$$(E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1) \cdot A = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1}$$

Si representamos $(A|B)$ la *matriz ampliada*, es decir, la matriz obtenida añadiendo a las columnas de A las columnas de B, en la práctica se obtiene la inversa siguiendo el procedimiento que se expresa en este diagrama

$$(A \mid I) \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow} (E_1 \cdot A \mid E_1 \cdot I) \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow} (E_2 \cdot E_1 \cdot A \mid E_2 \cdot E_1) \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow} (I|A^{-1})$$

Ejemplo 1.41. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ vamos a intentar calcular su inversa por este método.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -8 & 3 \end{array}\right)$$

y vemos que A *no es invertible* puesto que su rango es menor que 3.

Ejemplo 1.42. Aquí vemos el resultado de aplicar el método a una matriz de orden 4. Son cálculos laboriosos, pero si tienes suficiente tiempo y paciencia puedes intentar el método de los determinante y comparar

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & -2 & -15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{61}{240} & \frac{29}{30} & -\frac{89}{80} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{120} & \frac{1}{30} & -\frac{3}{40} & \frac{1}{30} \end{array}\right)$$

1.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineal, siempre se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\}$$

donde a_{ij} son elementos de un cuerpo (normalmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Usaremos la siguiente terminología:

- Si, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $c_i = 0$ decimos que el sistema es **homogéneo**.
- Llamamos **solución** a cualquier n-upla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ que haga ciertas todas las igualdades.
- Decimos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Los sistemas de ecuaciones se clasifican según sus soluciones según el siguiente cuadro

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{incompatible} \\ \\ \text{compatible} \begin{cases} \text{determinado} \\ \\ \text{indeterminado} \end{cases} \end{cases}$$

donde:

Incompatible: El conjunto de soluciones es vacío.

Compatible determinado: Tiene una única solución.

Compatible indeterminado: Tiene más de una única solución. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ necesariamente son infinitas soluciones.

Ejercicio 1.43. *Da ejemplos de sistemas (2 ecuaciones con 2 incógnitas) de cada uno de los tipos anteriores, es decir, incompatible, compatible determinado e indeterminado.*

Representación matricial

Es muy conveniente la representación del sistema en forma matricial.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{C}$$

Que escribiremos $AX = C$. Obsérvese que aparecen dos matrices columnas, X o *matriz de incógnitas* y C o *matriz de términos independientes*. A la matriz de coeficientes A se le llama *matriz del sistema*.

Definición 1.44 (Matriz ampliada del sistema)**.** Es la matriz obtenida añadiendo a la matriz A del sistema la columna C de términos independientes, es decir

$$(A|C) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

1.3.1. Teorema de Rouché-Fröbenius

Consideraremos este importante teorema del álgebra lineal del que no damos demostración.

Teorema 1.45 (Rouché-Fröbenius)**.** *Un sistema de ecuaciones lineales (real o complejo) $AX = C$ es compatible si y solo si el rango de la matriz de coeficientes A es igual al rango de la matriz ampliada $(A|C)$. Además un sistema compatible con n incógnitas*

1. *Es determinado si y solo si* $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|C) = n$.

2. *Es indeterminado si y solo si* $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|C) < n$.

Al valor $n - \operatorname{rango}(A)$ se le llama *grado de libertad* del sistema indeterminado y determina el número de parámetros que definen las soluciones.

Ejercicio 1.46. *Determina los valores del parámetro a para que el sistema siguiente tenga soluciones.*

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = & -2 \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_2 + x_3 & = & -2 \end{array}\right\}$$

Indicación: *Una forma de hacerlo es aplicar el método de Gauss conforme a la sección 1.2.3 a la matriz ampliada y comparar* $\operatorname{rango}(A)$ *y* $\operatorname{rango}(A|C)$.

[SOLUCIÓN: $a = 14$]

1.3.2. Resolución de sistemas por eliminación gaussiana

Dado un sistema de ecuaciones $AX = C$ *las transformaciones elementales aplicadas a las ecuaciones* (cambiar dos ecuaciones, multiplicar una ecuación por un número $\alpha \neq 0$ y sumar a una ecuación un múltiplo de otra) nos devuelven un sistema de ecuaciones equivalentes. Esto se puede traducir directamente a la aplicación de operaciones elementales por filas a la matriz ampliada del sistema $(A|C)$. Se pretende, entonces encontrar una matriz equivalente por filas a esta última que permita una más fácil resolución del sistema, es decir

Las operaciones elementales necesariamente han de ser por filas. Las operaciones por columnas no respetan las soluciones del sistema.

$$(A|C) \overset{\text{Por filas}}{\rightsquigarrow} (E|D)$$

donde:

- $(E|D)$ es escalonada $\longleftrightarrow$ *Método de Gauss*

- $(E|D)$ es escalonada reducida $\longleftrightarrow$ *Método de Gauss-Jordan*

Ejemplo 1.47. Supongamos que queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones de tipo 4×3, es decir 4 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ 14x_2 - 39x_3 & = & -13 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & -4 \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

El método de Gauss consiste en realizar transformaciones elementales por filas, hasta conseguir una matriz escalonada como la siguiente (no es la única posible)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 14 & -39 & -13 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \underset{\leftrightsquigarrow}{\text{Por filas}} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto nos da un sistema de ecuaciones equivalentes a (1.2) pero mucho más fácil

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 & = 1 \\ 3x_2 - 8x_3 & = -1 \\ -5x_3 & = -25 \end{array}\right\}$$

El método de Gauss-Jordan, requiere más transformaciones elementales para encontrar una matriz escalonada reducida, pero a cambio, esta matriz es única y además las soluciones (si las hay) se encuentran directamente

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 14 & -39 & -13 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \underset{\leftrightsquigarrow}{\text{Por filas}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Claramente, la única solución del sistema original (1.2) es

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (7, 13, 5)}$$

Sistemas Homogéneos

Supongamos $AX = 0$, entonces

- Todos los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son compatibles. Esto es evidente, puesto que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|0)$.
- El sistema es compatible indeterminado si y sólo si $\text{rango}(A) < n$. Este caso existen soluciones distintas de la solución trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Ejemplo 1.48. Vamos a resolver el siguiente sistema homogéneo aplicando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\}$$

que en forma matricial se expresa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss a la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Por filas}}{\leftrightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde deducimos que el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad. Además este método nos lleva a resolver un sistema más fácil

$$\left.\begin{array}{r} x - 4y + z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \end{array}\right\} \overset{z=\lambda}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} x - 4y = -\lambda \\ 11y = 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = \dfrac{3}{11}\lambda \\ x = 4(\dfrac{3}{11}\lambda) - \lambda = \dfrac{1}{11}\lambda \end{array}$$

Si elegimos como parámetro $z = 11\lambda$, simplificamos la expresión de las soluciones:

$$\boxed{(x, y, z) = (\lambda, 3\lambda, 11\lambda)}$$

Sistemas cuadrados no homogéneos. Método de Cramer

Consideremos el caso de sistemas no homogéneos en que hay coincidencia entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas. En estos casos, obviamente, la matriz del sistema es cuadrada. En este caso, del teorema de Rouché-Fröbenius podemos enunciar el siguiente

Corolario 1.49. *Un sistema cuadrado no homogéneo $AX = C$ es compatible determinado si y solo si* $\det A \neq 0$*.*

Aunque generalmente es mejor el método de Gauss (o Gauss-Jordan) para resolver este tipo de sistemas está muy extendido el método de Cramer que se enuncia a continuación:

Teorema 1.50 (Método de Cramer)**.** *Si el sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}\right\} \iff AX = C$$

es compatible determinado, entonces cualquier solución x_i viene determinado por la siguiente expresión:

Obsérvese que es absolutamente necesario que el determinante del sistema $|A|$ sea distinto de cero.

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

donde el numerador es el determinante de la matriz que resulta de sustituir la columna i-ésima por la columna C.

Ejemplo 1.51. Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

comprobamos que tiene solución única ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$

Entonces las soluciones son:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{22} = \frac{9}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{22} = \frac{3}{22}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{22} = \frac{5}{22}$$

Ejercicios Propuestos

Ej. 1.1 — Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) $A + B$.
b) AC.
c) CB y $C^T B$.
d) $(2A + B)\,C$.
e) ABC.
f) $C^T\left(\frac{1}{2}B - A\right)$.
g) A^2, B^2 y C^2.

Ej. 1.2 — Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, comprueba si es verdadero o falso:

a) $AB = BA$.
b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
c) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.
d) $ABA^{-1} = B$.

Ej. 1.3 — Mediante matrices elementales, transforma la matriz A en una escalonada equivalente E. Determina las matrices P y Q tales que $PAQ^{-1} = E$ y determina el rango de A.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$.
b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.
c) $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ej. 1.4 — Mediante operaciones elementales, determina el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro a.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Ej. 1.5 — Mediante operaciones elementales, determina, si existe, la matriz inversa de cada una las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Ej. 1.6 — Calcula el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

1. Desarrollando por la cuarta fila.
2. Desarrollando por la fila o columna para la que es necesario calcular menos adjuntos.
3. Desarrollando por la segunda columna realizando antes operaciones elementales de forma que solamente sea necesario calcular un adjunto.

Ej. 1.7 — Sabiendo que A y B son matrices cuadradas de orden 4 tales que $|A| = 5$ y $|B| = -6$, calcula, si es posible:

a) $|AB|$. c) $|ABA^T|$. e) $|(AB)^T|$. g) $|2B|$.
b) $|B^T|$. d) $|ABA^{-1}|$. f) $|A^{-1}|$. h) $|A^2|$.

Ej. 1.8 — Calcula la inversa de las siguientes matrices para aquellos valores del parámetro real a para los que sea posible.

a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & -1 & -5 \\ 10 & 4 & -1 \\ 4 & 2a & 9 \end{pmatrix}$

Ej. 1.9 — Resolver por el método de Gauss y, si es posible, por el método de Cramer, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}.$ b) $\left.\begin{array}{r} x+y-2z+3t=-1 \\ -x-2y-3z-4t=0 \\ 2x+3y+5z+7t=1 \\ 2x+2y+4z+6t=2 \end{array}\right\}.$

Ej. 1.10 — Clasificar y resolver, donde sea posible, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+3z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \end{array}\right\}.$$

Ej. 1.11 — (Sept. 2011) Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro m y resuélvelo para algún valor de m para el que el sistema sea compatible.

$$\left.\begin{array}{r} mx+mz=0 \\ my+z=0 \\ mx+y+mz=m \\ mx+my+mz=0 \end{array}\right\}$$

Ej. 1.12 — Tres amigos, Pedro, Luis y Pablo, deciden asociarse para montar una empresa, necesitando para ello un capital de 15.000€. Como no todos disponen del mismo dinero deciden invertir de la siguiente manera: Pedro aporta el triple de lo que ponen Luis y Pablo juntos, y por cada 20€ que aporta Luis, Pablo aporta 30€. ¿Cuánto capital aportó cada uno de ellos?

Ej. 1.13 — Una fábrica de dispositivos eléctricos fabrica tres tipos de componentes a partir de cobre y estaño:

- Disponsitivo A: Necesita 8 unidades de cobre y ninguna de estaño.
- Disponsitivo B: Necesita 6 unidades de cobre y 2 de estaño.
- Disponsitivo C: Necesita 7 unidades de cobre y 1 de estaño.

En un momento dado se disponen de 100 unidades de cobre y 12 de estaño,

1. ¿Cuántas dispositivos de cada tipo se pueden fabricar usando todo el material disponible?
2. Sabiendo que el precio de producción del dispositivo A es de 2€, el de B es de 7€ y el de C es de 5€, ¿Hay alguna combinación que cueste 60€ consumiendo todo el material?
3. ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de euros que se pueden invertir para tener producción de componentes con la condición de invertir todo el material de cobre y estaño?